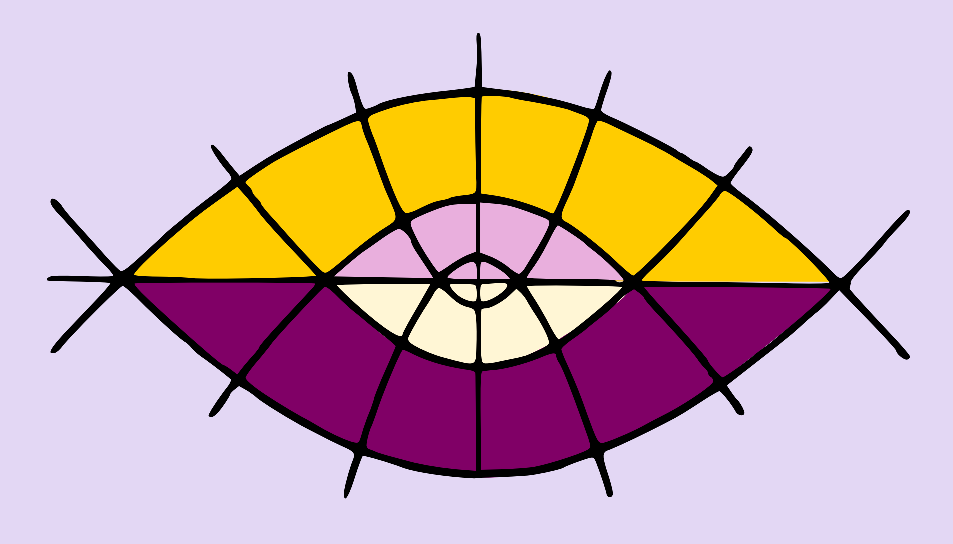
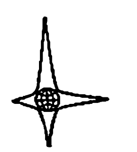
A. Markushevich

TEORIA DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

Tome I



Editorial Mir Moscú



EDITORIAL MIR

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ТОМ I НАЧАЛА ТЕОРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

A. MARKUSHEVICH

TEORIA
DE LAS
FUNCIONES ANALITICAS

TRADUCIDO DEL RUSO

POR

EMILIANO APARICIO BERNARDO

CANDIDATO A DOCTOR EN CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS,

CATEDRATICO DE MATEMATICAS SUPERIORES

EDITORIAL MIR

MOSCU

1970

CDU 517.5=60

На испанском языке

PROLOGO DEL TRADUCTOR

Es sabido que las funciones analíticas se emplean con frecuencia en distintas disciplinas teóricas y aplicadas: en la teoría analítica de los números, ecuaciones diferenciales, geometría, hidromecánica, mecánica celeste, etc. El conocimiento de los principios fundamentales de la teoría de las funciones analíticas es una premisa indispensable en la educación matemática moderna. Actualmente esta teoría se ha desarrollado tanto que resulta difícil abarcar en un solo libro todas sus múltiples ramificaciones. Entre las diversas obras que se han escrito sobre esta disciplina, la «Teoría de las funciones analíticas» de A. I. Markushévich posee una serie de méritos particulares. En primer lugar, abarca un amplio material, debido a lo cual se edita en dos tomos. Por otra parte, es accesible para aquel que no conozca aún los elementos de la teoría de las funciones de variable compleja y desee emprender un estudio individual de la misma. Además, consideramos que es una de las obras más completas y mejores de la teoría en cuestión. Para poder comprenderla basta con tener los conocimientos que se exigen en los dos primeros cursos de la Facultad de Matemáticas de la Universidad. Puede ser útil también para los que preparan la tesis doctoral y deseen especializarse en teoría de funciones. Posiblemente, para algunos lectores esta obra servirá de punto de partida para ampliar sus investigaciones sobre algún tema.

El autor expone en este curso tanto los elementos de la teoría de las funciones analíticas como sus secciones modernas. Las demostraciones de los teoremas y, en ge-

neral, las cuestiones más difíciles, se analizan con todo detalle y de manera muy razonada.

El libro contiene numerosos ejemplos que, frecuentemente, ilustran los temas que son objeto de estudio. En muchos casos estos ejemplos desempeñan un papel decisivo, comprobando que el teorema estudiado pierde su valor en condiciones más moderadas.

Al final del segundo tomo y como apéndice, se incluye un artículo del mismo autor «Sobre la base en el espacio de las funciones analíticas». Los enunciados y teoremas expuestos en él se deben también al profesor Markushévich.

Al final de cada tomo se inserta una amplia bibliografía sobre los distintos problemas estudiados.

Esperamos que la edición española de esta obra sea bien acogida. Al final del primer tomo de la presente edición española incluimos un apéndice del traductor—«Seudopolinomios ortogonales»—en el que se hace una generalización de los polinomios de Legendre, expuestos en el libro.

Quedaremos muy agradecidos a todos aquellos que deseen darnos su opinión acerca de la traducción.

E. Aparicio Bernardo

PREFACIO A LA EDICION ESPAÑOLA

En el presente curso de «Teoría de las Funciones Analíticas» en dos volúmenes se han recopilado las lecciones dadas a lo largo de varios años por el autor en la facultad Mecánico-Matemática de la Universidad Lomonósov de Moscú. Abarca con suficiente amplitud la teoría de las funciones de una variable compleja, incluyendo las transformaciones conformes, interpolación de las funciones por polinomios, elementos de la teoría de las funciones armónicas y subarmónicas, fundamentos de la teoría de las funciones enteras y meromorfas, el concepto de superficie de Riemann y prolongación analítica.

El lector que desee estudiar los importantes problemas de la teoría moderna de las funciones analíticas de varias variables complejas deberá consultar otros libros.

El autor espera que su obra será útil para los que deseen estudiar una de las partes más interesantes del análisis clásico y de la teoría de las funciones.

Es para mí sumamente grato que a las ediciones en ruso, inglés y chino venga ahora a sumarse esta edición en uno de los idiomas universales, como es el español.

Aprovecho la ocasión para expresar mi sincero agradecimiento al traductor, E. Aparicio, por su esmerada y competente traducción.

A. Markushévich

INDICE

CAPITULO PRIMERO

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

CAPITULO SEGUNDO

LA DERIVABILIDAD Y SU SIGNIFICADO GEOMETRICO. LAS FUNCIONES ELEMENTALES

CAPITULO TERCERO

INTEGRALES Y SERIES DE POTENCIAS

CAPÍTULO CUARTO

DIVERSAS SERIES. RESIDUOS. FUNCIONES INVERSAS E IMPLÍCITAS

CAPITULO
PRIMERO

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

§ 1. EL OBJETO DE LA TEORIA

1.1. La disciplina matemática que se expone en este libro lleva dos denominaciones: teoría de las funciones analíticas y teoría de las funciones de variable compleja. Cada una de éstas está justificada.

Una función de variable real, definida en cierto intervalo (a, b) se llama analítica en un punto x_0 de este intervalo, si en un entorno de este punto la función se puede expresar en forma de la suma de una serie de potencias convergente, dispuesta según las potencias de $x - x_0$:

$$a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots$$

Una función que es analítica en cada uno de los puntos del intervalo se llama analítica en este intervalo. Todas las funciones elementales que se estudian en el análisis son analíticas en toda la región de su definición, a excepción, posiblemente, de algunos puntos. Por ejemplo, un polinomio $P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, la función exponencial e^x, las funciones trigonométricas (son x y $\cos x$), son analíticas en todos los puntos, puesto que para cualquier x_0 subsisten los desarrollos:

$$P_m(x) = P_m(x_0) + \frac{P_m'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P_m^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m,$$

$$e^x = e^{x_0} + \frac{e^{x_0}}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 + \frac{\cos x_0}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{\operatorname{sen}\left(x_0 + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

$$\cos x = \cos x_0 - \frac{\operatorname{sen} x_0}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{\cos\left(x_0 + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots;$$

la función $\frac{1}{a-x}$ es analítica para $x \neq a$, puesto que

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-x_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-x_0}{a-x_0}} =$$

$$= \frac{1}{a-x_0} - \frac{1}{(a-x_0)^2}(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{(a-x_0)^{n+1}}(x-x_0)^n + \ldots .$$

si $x_0 \neq a$ y $\left|\frac{x-x_0}{a-x_0}\right| < 1$; la función $\sqrt[3]{x}$ es analítica para $x \neq 0$, puesto que

$$\sqrt[3]{x} = x_0^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= x_0^{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{x_0^{\frac{2}{3}}}(x-x_0) + \ldots + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!\cdot x_0^{n-\frac{1}{3}}} \times$$

$$\times (x-x_0)^n + \ldots ,$$

si $x_0 \neq 0$ y $\left|\frac{x-x_0}{x_0}\right| < 1$; la función $\ln x$ es analítica en todo el campo de su definición, puesto que

$$\ln x = \ln x_0 + \ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right) = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x-x_0) -$$

$$- \frac{1}{2x_0^2}(x-x_0)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{nx_0^n}(x-x_0)^n + \ldots ,$$

si $x_0 > 0$ y $\left|\frac{x-x_0}{x_0}\right| < 1$, etc.

Como el resultado de las principales operaciones algebraicas y analíticas (suma, resta, multiplicación, división, derivación e integración), efectuadas con las series de potencias, se expresa también, generalmente *), por una serie de potencias convergente, es posible hacerse ahora una idea de la amplitud e importancia de la clase de las funciones analíticas. En realidad, su importancia es todavía mayor puesto que son también analíticas en los correspondientes intervalos, por ejemplo, las funciones analíticas de funciones analíticas, las funciones inversas a las analíticas, las funciones que satisfacen a una ecuación de la forma

$$P_0(x) + P_1(x) f(x) + \ldots + P_n(x) [f(x)]^n = 0$$

---

*) En el caso de la división, son excepcionales solamente los puntos aislados en los que se anula el divisor.

(ecuación algebraica de grado n con respecto a $f(x)$) o a una ecuación de la forma

$$p_0(x) f(x) + p_1(x) \frac{df(x)}{dx} + \ldots + p_n(x) \frac{d^n f(x)}{dx^n} = q(x)$$

(ecuación diferencial lineal de orden n con respecto a $f(x)$), donde $p_0(x), \ldots, p_n(x)$, $q(x)$ son funciones analíticas.

Por lo tanto, no es de extrañar que todas las clases más importantes de funciones que aparecen en el análisis clásico y en sus aplicaciones a los problemas de mecánica y física, sean analíticas a excepción de algunos puntos singulares de estas funciones.

De aquí se deduce la extraordinaria importancia que tiene un estudio especial de las propiedades generales de las funciones analíticas.

1.2. A pesar de lo amplia que es la clase de funciones analíticas, ésta forma solamente una parte regular de la clase de funciones infinitamente derivables (o sea, de las funciones que poseen derivadas de cualquier orden). Aquí demostraremos la siguiente proposición: *una función $f(x)$, definida en un entorno de un punto x_0, es analítica en este punto cuando, y sólo cuando, se cumplen las condiciones:*

1) *ésta es indefinidamente derivable en cierto entorno de este punto,*
2) *existen unos números positivos δ y M tales, que para cualquier x del intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y para cualquier natural k, se verifican las desigualdades:*

$$|f^{(k)}(x)| < M \frac{k!}{\delta^k}. \tag{1.2:1}$$

Demostración. Las condiciones son necesarias. En efecto, si $f(x)$ es analítica en el punto x_0, en cierto intervalo $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ se expresa por una serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{1.2:2}$$

que, como es sabido por el análisis, admite derivación término a término la cantidad de veces que se desee, de modo que existen derivadas de cualquier orden k, expresables también por series de potencias:

$$f^{(k)}(x) = k!\, a_k + \frac{(k+1)!\, a_{k+1}}{1!}(x - x_0) + \frac{(k+2)!\, a_{k+2}}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \tag{1.2:3}$$

($|x - x_0| < \rho$). Fijemos δ de manera que sea: $0 < 2\delta < \rho$. Entonces, la serie (1.2:2) convergerá para $x = x_0 + 2\delta$; por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(2\delta)^n = 0$, de donde se deduce que la sucesión $\{a_n(2\delta)^n\}$ es

acotada, o sea,

$$|a_n(2\delta)^n| < M' \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (1.2:4)$$

Acotemos ahora $|f^{(k)}(x)|$ en el intervalo $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$; aplicando (1.2:3) y las desigualdades (1.2:4), obtenemos:

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant k!\,|a_k| + \frac{(k+1)!\,|a_{k+1}|}{1!}\delta + \frac{(k+2)!\,|a_{k+2}|}{2!}\delta^2 + \ldots$$

$$\ldots < k!\frac{M'}{(2\delta)^k} + \frac{(k+1)!}{1!}\cdot\frac{M'}{(2\delta)^{k+1}}\delta + \frac{(k+2)!}{2!}\cdot\frac{M'}{(2\delta)^{k+2}}\delta^2 + \ldots$$

$$\ldots = \frac{k!\,M'}{2^k\delta^k}\left[1 + \frac{k+1}{1!}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2!}\cdot\frac{1}{2^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{k!\,M'}{2^k\delta^k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-(k+1)} = 2M'\cdot\frac{k!}{\delta^k}.$$

Ahora no queda más que poner $2M' = M$ para obtener las desigualdades (1.2:1).

Demostremos que las condiciones del teorema son suficientes. Sea $f(x)$ una función indefinidamente derivable en el intervalo $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, y supongamos que se cumplen las desigualdades (1.2:1). Escribamos $f(x)$ según la fórmula de Taylor con el término complementario en forma de Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\times$$

$$\times(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (1.2:5)$$

Se tiene:

$$\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\right||x-x_0|^n < \frac{Mn!}{\delta^n\cdot n!}|x-x_0|^n = M\left(\frac{|x-x_0|}{\delta}\right)^n,$$

y, por consiguiente, el término complementario tiende a cero cuando $n\to\infty$, si $|x-x_0|<\delta$. De esto se deduce que en el intervalo $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ la función $f(x)$ se expresa en serie de potencias:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ldots,$$

es decir, es analítica en el punto x_0.

El criterio de analiticidad establecido en este teorema es satisfactorio en el sentido de su determinabilidad absoluta y su perfección. Sin embargo, resulta muy incómodo para las aplicaciones, así como para las cuestiones teóricas, puesto que está basado en el conocimiento del comportamiento de las derivadas de cualquier orden en cierto entorno del punto dado (desigualdades (1.2:1).

1.3. El mérito de Cauchy consiste en haber desarrollado los fundamentos de la teoría general de las funciones analíticas saliendo al campo de la variable compleja. Para las funciones analíticas esta salida se efectúa de un modo simple y natural. No hay más que generalizar los principios básicos de la teoría de límites al campo de los números complejos y observar que la serie

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

que es convergente para todos los valores de la variable real x que cumplen la condición $|x - x_0| < \rho$, sigue siendo convergente también para todos los valores de la variable compleja $z = x + iy$ que cumplen la condición $|z - x_0| < \rho$ y, por consiguiente, determina una función de la variable compleja z que se puede considerar como la p r o l o n g a c i ó n (o generalización) de la función analítica de variable real al campo de los números complejos. Ya hace mucho que se empleaban prolongaciones de este género. Estas son bien conocidas en el álgebra para el caso de polinomios donde, por cierto, no se necesitan estudiar las cuestiones de convergencia, sino que es suficiente establecer las reglas de las operaciones algebraicas sobre los números complejos, y también en el curso de análisis, por ejemplo, para el caso de la función exponencial e^x, donde de un modo semejante se deduce la fórmula clásica de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

El mérito histórico de Cauchy, mencionado anteriormente, no radica en que él comenzó a reemplazar en las series de potencias la variable real x por la variable compleja z. Esto ya lo hacían antes, en el siglo XVIII. Su mérito consiste en que Cauchy fundó una teoría sistemática de las funciones de variable compleja, semejante a la teoría de las funciones de variable real (aquí tenemos en cuenta el análisis clásico), que incluye la teoría de límites, el concepto de descontinuidad, la derivada, la integral y la teoría de series. Con esto, quedó claro el hecho fundamental de que el concepto de función de variable compleja, analítica en un recinto G, es decir, de función que admite una representación de la forma

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots \qquad (1.3:1)$$

en cierto entorno de cada punto z_0 del recinto (todos los números que figuran aquí son complejos y, en particular, reales), coincide totalmente con el concepto de función derivable en el mismo recinto. Uno de ellos implica el otro, y la existencia de la derivada primera de la función $f(z)$ da lugar a que la función sea desarrollable en serie de potencias. Ya se vio en el apartado 1.2 lo complicada que es la relación entre la derivabilidad de la función y su analiticidad cuando nos limitamos solamente a valores reales de la variable indepen-

diente. La salida al plano complejo tiene también muchas más ventajas ante el estudio de las funciones en el campo real solamente. En particular, aquí se observa que las propiedades de analiticidad se pueden caracterizar también muy sencillamente considerando la integral de la función compleja $f(z)$, o estudiando sus desarrollos en series de polinomios arbitrarios, etc.

Esta pluralidad de propiedades y relaciones simples entre ellas sirven de verdadero fundamento de la teoría de las funciones analíticas de variable compleja, llamada también frecuentemente teoría de las funciones de variable compleja. Desde luego, las conclusiones obtenidas acerca de las funciones analíticas de variable compleja aclaran también, particularmente, las cuestiones referentes a las funciones analíticas de variable real en las que se convierten las primeras funciones cuando los números $a_0, \ldots, a_n, \ldots, z_0$, en la expresión (1.3:1) son reales y a la variable z se le atribuyen valores reales.

El presente curso está dedicado a la teoría de las funciones de variable compleja.

§ 2. LOS NUMEROS COMPLEJOS

2.1. Se suponen conocidos por el curso de álgebra *) los números complejos, su representación geométrica y las operaciones con los mismos. Para facilitar la lectura, haremos aquí un resumen de las definiciones y conclusiones fundamentales relativas a los números complejos.

Todo número complejo es de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales. El primero de ellos se llama parte real, y el segundo, parte imaginaria del número complejo. Designando $a + bi$ mediante c, escribiremos:

$$a = \operatorname{Re} c \quad \text{y} \quad b = \operatorname{Im} c,$$

donde Re son las primeras letras de la palabra latina *realis* (real) e Im son las primeras letras de la palabra *imaginarius* (imaginario). Dos números complejos se suponen iguales cuando, y sólo cuando, son iguales las partes reales e imaginarias por separado. Un número complejo con la parte imaginaria igual a cero: $c = a + 0 \cdot i$, se escribe así: $c = a$, y se identifica con el número real a. En particular, el número $0 + 0 \cdot i$ se identifica con el cero. Por lo tanto, los números reales representan un caso particular de los complejos. Un número complejo con la parte real igual a cero: $c = 0 + b \cdot i$, se escribe así: $c = bi$. Si también $b = 0$, entonces, c es como antes igual a cero ($a = b = 0$). Si $b \neq 0$, el número c se llama imaginario

*) A. Kurosch, *Curso de álgebra superior*, Editorial MIR, Moscú, 1968.

p u r o. En particular, cuando $b = 1$ resulta l a u n i d a d i m a g i n a r i a: $1 \cdot i = i$. En general, un número complejo $a + bi$ se llama i m a g i n a r i o, si su parte imaginaria es distinta de cero. Por lo tanto, los números imaginarios puros representan un caso particular de los imaginarios (que corresponden al caso, en que la parte real es igual a cero).

Los números complejos forman un c a m p o *). Esto significa que para ellos están definidas las operaciones de sumar y multiplicar, cumpliéndose las leyes conmutativa, asociativa y distributiva

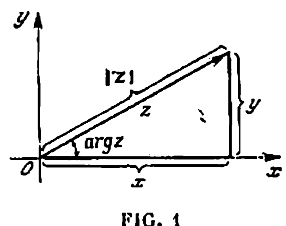


FIG. 1

(para la multiplicación con respecto a la suma), y además, para la suma existe la operación inversa: la resta, y para la multiplicación, la operación inversa: la división. En otras palabras, las ecuaciones $a + x = b$ y $a \cdot x = b$ siempre tienen solución con respecto a la incógnita x (esto último con la condición complementaria de que $a \neq 0$).

Los números 0 y 1 se llaman c e r o y u n i d a d, respectivamente, del campo de números complejos. Desde el punto de vista de las operaciones en el campo de los números complejos, todo número imaginario puro bi puede ser interpretado como el producto del número real b por la unidad imaginaria i, y todo número complejo $a + bi$, como la suma del número real a y el número imaginario puro bi.

2.2. Lo más sencillo para representar geométricamente los números complejos son los puntos o los vectores del plano, en el que se ha elegido un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares. Por imagen geométrica del número complejo $c = a + bi$ se puede tomar con igual ventaja, tanto el punto de abscisa a y ordenada b (en este caso, el número $a + bi$ se llama a f i j o de este punto, que proviene de la palabra latina *affixus*, que significa sujeto a algo) como el vector cuya proyección sobre el eje de abscisas es igual a a y su proyección sobre el eje de ordenadas, igual a b.

*) O sea, un cuerpo conmutativo. (*Nota del T.*)

Empleando el idioma geométrico se puede hablar entonces del punto o del vector, en lugar de hablar del número complejo correspondiente.

Conservando para la abscisa y ordenada las designaciones ordinarias x e y, escribiremos frecuentemente los números complejos en la forma $z = x + iy$. El plano, cuyos puntos (o vectores) se utilizan para representar geométricamente a los números complejos, lo llamaremos plano complejo, o bien z-plano; el eje de abscisas, eje real, y el eje de ordenadas, eje imaginario. Está claro que los números reales se representan por puntos del eje real (o por vectores paralelos al mismo); los números imaginarios puros, por puntos del eje imaginario (o por vectores paralelos al mismo), y, en general, los números imaginarios, por puntos no situados en el eje real (o por vectores no paralelos al mismo). Si un número complejo es diferente de cero, su punto determinativo es distinto del origen de coordenadas. En este caso, para su determinación, además de las coordenadas cartesianas x e y pueden utilizarse también las polares: el radio vector $r > 0$ y el ángulo polar Φ (que se determina salvo un entero arbitrario, múltiplo de 2π).

Con respecto al afijo del punto $z = x + iy$, estos números se llaman módulo y argumento, respectivamente, y se designan del siguiente modo:

$$r = |z|, \quad \Phi = \operatorname{Arg} z.$$

Para $z = 0$ el módulo es igual a 0, mientras que el argumento no está definido (carece de sentido).

Como, evidentemente,

$$x = r\cos\Phi \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\Phi,$$

se tiene

$$z = x + iy = r(\cos\Phi + i\operatorname{sen}\Phi).$$

Hemos obtenido la expresión de un número complejo en coordenadas polares (o, como suele decirse, la forma trigonométrica del número complejo). Es comprensible que el módulo de un número complejo es al mismo tiempo la longitud del vector que representa a este número, mientras que el argumento, es el ángulo que forma este vector con la dirección positiva del eje real (determinado, como siempre, salvo un entero arbitrario, múltiplo de 2π).

Entre los valores del argumento del número $z \neq 0$, existe uno, y sólo uno, comprendido entre $-\pi$ y $+\pi$ (posiblemente, incluyendo este último valor). Este se denomina valor principal del argumento y se designa mediante $\arg z$. Así, pues,

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi$$

y

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2n\pi,$$

donde n recorre todos los números enteros $(0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Señalemos las relaciones:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg}(\arg z) = \frac{y}{x}.$$

De esta última se puede sacar la conclusión que el arg z coincide con uno de los valores de $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$. Designando el valor principal de $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$, o sea, el valor comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ (incluyendo, posiblemente, este último), mediante $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}$, tendremos:

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \text{si} \quad x > 0,$$

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \text{si} \quad x < 0, \ y \geqslant 0,$$

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \text{si} \quad x < 0, \ y < 0,$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad x = 0, \ y > 0,$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad x = 0, \ y < 0.$$

Los números complejos $x + iy$ e $x - iy$ se llaman c o n j u g a d o s (entre sí). Estos se representan por puntos simétricos con respecto del eje real, y son iguales entre sí sólo cuando son números reales. Si $x + iy = z$, el número conjugado con éste se designa mediante $\bar{z}$: $x - iy = \bar{z}$.

Como el conjugado con $x - iy$ es $x + iy$, resulta $\overline{(\bar{z})} = z$.

De la definición misma de números conjugados se deduce que sus módulos son iguales y los valores de sus argumentos se obtienen uno del otro permutando sus signos, o sea, son opuestos. Obsérvese, por otra parte, que si $z = x < 0$, entonces, $\bar{z} = x < 0$, y los valores principales de los argumentos de los números z y $\bar{z}$ son iguales entre sí:

$$\arg z = \arg \bar{z} = \pi.$$

2.3. Las operaciones sobre los números complejos se efectúan según las siguientes reglas:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

de donde se obtienen las reglas para las operaciones inversas:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (x_2^2 + y_2^2 \neq 0).$$

Si los números complejos z_1 y z_2 vienen expresados en coordenadas polares

$$z_1 = r_1(\cos\Phi_1 + i\,\mathrm{sen}\,\Phi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\Phi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\Phi_2),$$

las reglas de la multiplicación y división proporcionarán los siguientes resultados:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2[\cos(\Phi_1 + \Phi_2) + i\,\mathrm{sen}(\Phi_1 + \Phi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\Phi_1 - \Phi_2) + i\,\mathrm{sen}(\Phi_1 - \Phi_2)] \qquad (r_2 \neq 0).$$

es decir, al multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos, mientras que al dividirlos se dividen sus módulos y se restan sus argumentos.

Todas estas operaciones tienen un significado geométrico sencillo. Representando z_1 y z_2 por vectores del plano complejo sacamos la conclusión de que la suma $z_1 + z_2$ se representa por la diagonal del paralelogramo construido sobre los vectores z_1 y z_2. Para representar geométricamente la diferencia es conveniente representar los puntos z_1 y z_2 por puntos (o, lo que al fin y al cabo se reduce a lo mismo, por vectores que parten del origen de coordenadas). Entonces, la diferencia $z_1 - z_2$ se representará por un vector cuyo origen coincide con el punto z_2 y su extremo, con el punto z_1. De aquí se deduce que el módulo de la diferencia $|z_1 - z_2|$ es igual a la distancia entre los puntos z_1 y z_2; esta observación resulta muy útil. En particular, la ecuación $|z - z_0| = \rho$ representa una circunferencia con centro en z_0 y de radio ρ; la desigualdad $|z - z_0| < \rho$ representa el interior de esta circunferencia.

La suma de unos cuantos números complejos se representa por un vector que cierra la poligonal construida con los vectores que representan a los sumandos.

Mediante el significado geométrico indicado de las operaciones de adición y sustracción (o bien, directamente, es decir, de un modo puramente algebraico) se establecen unas desigualdades muy importantes que permiten acotar el módulo de la suma o el módulo de la diferencia de números complejos. Estas son:

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|,$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||.$$

En cada una de estas desigualdades se alcanza el signo de igualdad cuando, y sólo cuando, los argumentos de los números complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son iguales entre sí, es decir, cuando los vectores correspondientes son paralelos a una misma recta y llevan una misma dirección.

Obsérvese que, para expresar el módulo de la suma de unos cuantos números complejos por estos números, frecuentemente proceden del siguiente modo. De la regla de multiplicación de los números complejos se deduce que $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$, es decir, $|z| = \sqrt{+x^2 + y^2}$*). Haciendo aquí $z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ y observando que entonces $\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n$, obtenemos:

$$|z| = |z_1 + z_2 + \ldots + z_n| = \sqrt{+(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_n)}.$$

Este es el resultado que se necesita.

El significado geométrico de la multiplicación se observa inmediatamente de la regla enunciada anteriormente. Precisando, el vector que representa al producto $z_1 \cdot z_2$ se obtiene del vector z_1 haciéndole girar un ángulo igual a $\operatorname{Arg} z_2$ (es decir, igual a uno de los valores de $\operatorname{Arg} z_2$), y alargándolo, o sea, cambiando su longitud $|z_2|$ veces. En particular, a la multiplicación por un número complejo z_2, cuyo módulo es igual a la unidad:

$$z_2 = \cos \Phi_2 + i \operatorname{sen} \Phi_2,$$

corresponde solamente una rotación del vector z_1 alrededor del origen de coordenadas en el ángulo Φ_2.

De un modo análogo se interpreta el significado geométrico de la división. De las reglas de sustracción y división se deduce inmediatamente que el ángulo bajo el que se ve desde el punto z_0 el par de puntos z_1 y z_2, es igual (salvo un entero múltiplo de 2π) al argumento del cociente de las diferencias $z_1 - z_0$ y $z_2 - z_0$

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}.$$

Aquí hemos tomado $z_1 - z_0$ por dividendo y $z_2 - z_0$ por divisor. Esto corresponde a suponer que el ángulo con el vértice en el punto z_0 se calcula desde el vector $z_2 - z_0$ hasta el vector $z_1 - z_0$ en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.

Detengámonos, finalmente, en las operaciones de elevación a potencia y extracción de raíz. Como ordinariamente, por potencia de un número complejo z, siendo natural el exponente n, se entiende el producto de n factores, cada uno de los cuales es igual a z.

---

*) Mediante $\sqrt[n]{+r}$ designamos el valor positivo de la raíz de grado n del número positivo r, es decir, el valor aritmético de la raíz.

Si

$$z = r(\cos\Phi + i\,\mathrm{sen}\,\Phi),$$

de aquí se deduce que

$$z^n = r^n(\cos n\Phi + i\,\mathrm{sen}\,n\Phi);$$

para $r = 1$, obtenemos:

$$(\cos\Phi + i\,\mathrm{sen}\,\Phi)^n = \cos n\Phi + i\,\mathrm{sen}\,n\Phi$$

que es la fórmula de Moivre.

El lector puede convencerse fácilmente de que la regla de elevación a una potencia (en particular, la fórmula de Moivre) conserva su valor también para cualquier exponente entero m, si se hace

$$z^0 = 1 \text{ y } z^{-m} = \frac{1}{z^m}.$$

Se llama raíz $\sqrt[n]{z}$ de grado n (n es natural) del número complejo z cualquier número complejo ζ que satisfaga a la ecuación

$$\zeta^n = z.$$

Si $z = 0$, se tiene $\zeta = 0$. Si $z \neq 0$, haciendo las notaciones $z = r(\cos\Phi + i\,\mathrm{sen}\,\Phi)$ y $\zeta = \rho(\cos A + i\,\mathrm{sen}\,A)$, obtenemos:

$$\rho^n(\cos nA + i\,\mathrm{sen}\,nA) = r(\cos\Phi + i\,\mathrm{sen}\,\Phi),$$

de donde

$$\rho^n = r, \quad \rho = \sqrt[n]{+r}$$

y

$$nA = \Phi + 2k\pi = \mathrm{Arg}\,z, \quad A = \frac{\mathrm{Arg}\,z}{n}.$$

Por consiguiente,

$$\zeta = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{+r}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}\,z}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\mathrm{Arg}\,z}{n}\right).$$

Para unos mismos valores de z y n se pueden obtener distintos valores de la raíz, tomando valores del Arg z que se diferencien entre sí en $2k\pi$, donde k no es divisible por n. Por ejemplo, considerando los siguientes valores del Arg z:

$$\arg z,\ \arg z + 2\pi,\ \ldots,\ \arg z + 2(n-1)\pi,$$

hallamos n valores distintos de la raíz, con los cuales se agotan todos sus valores posibles, puesto que cualquier valor del Arg z se diferencia de uno de los elegidos previamente en un número de la forma $2mn\pi$, donde m es un número entero. Así pues, la raíz de grado n del número z tiene n valores distintos (siendo $z \neq 0$),

que están contenidos en la fórmula:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{+|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right).$$

Al valor de $\sqrt[n]{z}$, igual a

$$\sqrt[n]{+|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\arg z}{n}\right),$$

llamaremos valor principal de la raíz y lo designaremos mediante $\sqrt[n]{+z}$ (cuando z es un número real positivo, su valor principal coincide con el valor aritmético).

Como $\operatorname{Arg} z=\arg z+2m\pi=\arg z+\operatorname{Arg} 1$, se tiene:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{+|z|}\left(\cos\frac{\arg z+\operatorname{Arg} 1}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\arg z+\operatorname{Arg} 1}{n}\right)=$$

$$=\left[\sqrt[n]{+|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\arg z}{n}\right)\right]\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} 1}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\operatorname{Arg} 1}{n}\right)=\sqrt[n]{+z}\cdot\sqrt[n]{1},$$

o sea, todos los valores de $\sqrt[n]{z}$ se pueden obtener del principal multiplicando este último por los valores distintos de la raíz del mismo grado de la unidad.

Finalmente, introduzcamos la potencia con un exponente racional arbitrario haciendo por definición:

$$z^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{z})^m$$

(m es un número entero, n es natural, m y n son primos entre sí). Entonces, tendremos:

$$z^{\frac{m}{n}}=\left\{\sqrt[n]{+|z|}\left[\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right]\right\}^m=$$

$$=(\sqrt[n]{+|z|})^m\cdot\left(\cos\frac{m}{n}\operatorname{Arg} z+i\operatorname{sen}\frac{m}{n}\operatorname{Arg} z\right).$$

Si convenimos en entender por $|z|_+^{\frac{m}{n}}$ el número positivo $\sqrt[n]{+|z|^m}$, la última relación se escribe así:

$$z^{\frac{m}{n}}=|z|_+^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\operatorname{Arg} z+i\operatorname{sen}\frac{m}{n}\operatorname{Arg} z\right).$$

Proponemos al lector comprobar que la definición de potencia con exponente racional mediante la igualdad

$$z^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{z^m}$$

es equivalente a la anterior.

§ 3. CONJUNTOS Y FUNCIONES. TEORIA DE LIMITES. LAS FUNCIONES CONTINUAS

3.1. A continuación, hablando de números complejos, empleamos el idioma geométrico. Por lo tanto, el estudio de diversos conjuntos de números complejos se reduce al estudio de distintos conjuntos de puntos en el plano.

Sea E un conjunto de puntos del plano z. Suponemos que éste no es vacío, es decir, que contiene al menos un punto y que, en general, es un conjunto infinito de puntos. Si a cada punto $z \in E$*) se ha puesto en correspondencia algún conjunto de puntos no vacío $\mathscr{E}_z$, se dice que en E está definida (o determinada) una f u n c i ó n para la cual los puntos $z \in E$ representan l o s v a l o r e s d e l a v a r i a b l e i n d e p e n d i e n t e (o del argumento) y los puntos de $\mathscr{E}_z$, l o s v a l o r e s d e l a f u n c i ó n. Por ejemplo, Arg z es una función definida en el conjunto de todos los puntos del plano, distintos de cero, y el conjunto $\mathscr{E}_z$ está formado aquí por los números $\arg z + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

En nuestra definición se supone que, en general, las funciones, son m u l t i f o r m e s. Si cada $\mathscr{E}_z$ contiene solamente un punto, obtenemos una función u n i f o r m e.

Designemos los valores de la función mediante $w = u + iv$. Entonces, las funciones definidas en E se pueden representar en la forma $w = f(z)$, $w = F(z)$, $w = \varphi(z)$, . . . $(z \in E)$; por cierto, la indicación del conjunto E se puede omitir siempre que esto no dé lugar a incomprensiones. Como z toma valores complejos que, generalmente, son imaginarios, se dice que se trata de funciones de variable compleja.

Particularmente, todos los valores de la función pueden ser reales: $w = u$ $(v = 0)$. En este caso, la función de variable compleja puede considerarse como una función de dos variables reales, x e y, que toma valores reales u. En efecto, si al complejo $z = x + iy$ se ha puesto en correspondencia el número (o los números) u, esto significa que al par de números reales x e y se ha puesto en correspondencia el número real u.

Veamos el caso general. Como todo número complejo w se determina por su parte real u y su parte imaginaria v, definir una función $w = f(z)$ en el conjunto E significa definir en este mismo conjunto dos funciones de dos variables reales x e y: $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Recíprocamente, si en el conjunto E están definidas dos funciones $u = \varphi(x, y)$ y $v = \psi(x, y)$, que toman valores reales una independientemente de la otra, entonces, queda definida también una

---

*) Escribimos $z \in E$ para decir que z es un punto del conjunto E (z pertenece a E).

función compleja:

$$w = u + iv = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = f(z).$$

Por ejemplo, teniendo la función de variable compleja

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xiy,$$

tenemos a la vez también dos funciones reales de x e y:

$$u = x^2 - y^2 \text{ y } v = 2xy.$$

A las dos funciones reales: $u = x^2 - y^2$, $v = e^{x^2+3y^2}$ corresponde la función de la variable compleja $z = x + iy$:

$$w = u + iv = (x^2 - y^2) + ie^{x^2+3y^2} = f(z).$$

Estas observaciones muestran que toda la teoría de la función de la variable compleja z se podría interpretar como la teoría de los pares de funciones de dos variables reales x e y. A veces, utilizaremos esta interpretación.

De lo anterior se deduce que el concepto de función real de dos variables reales es un caso particular del concepto de función de variable compleja. Del mismo modo, el concepto de función real de una variable está contenido en el concepto de función de variable compleja como un caso particular. Para obtenerlo, es suficiente suponer que el conjunto E está situado en el eje real (entonces, $z = x$) y que los valores de la función son números reales ($w = u$).

A continuación, hablando de funciones tendremos en cuenta las funciones de variable compleja.

3.2. Supongamos que E es el conjunto de todos los números naturales: 1, 2, 3, 4, . . ., n, . . . Toda función uniforme definida en E se llama *sucesión*, y sus valores, términos de la sucesión. Designándolos mediante w_1, w_2, . . ., w_n, . . ., de modo que w_n corresponde al valor $z = n$, denotaremos la sucesión mediante el símbolo $\{w_n\}$. Si k_1, k_2, k_3, . . . es algún conjunto infinito de números naturales (distintos entre sí), los términos correspondientes de la sucesión $\{w_n\}$: w_{k_1}, w_{k_2}, w_{k_3}, . . ., w_{k_n}, . . ., forman una nueva sucesión $\{w_{k_n}\}$ que, con respecto a la sucesión $\{w_n\}$ se denomina *sucesión parcial* (o contenida en $\{w_n\}$). Así, por ejemplo, w_1, w_3, . . ., w_{2k-1}, . . .; w_2, w_4, w_6, w_8, . . ., w_{2k}, . . .; w_1, w_4, w_9, . . ., w_{k^2}, . . ., son distintas sucesiones parciales de la sucesión $\{w_n\}$.

Sea z_0 algún punto del plano. Cualquier círculo que contenga en su interior a este punto, se llama *entorno* del mismo. En particular, todo círculo con centro en z_0, se denomina entorno del punto z_0: $|z - z_0| < \rho$ $(\rho > 0)$.

El punto z_0 se llama *punto de acumulación de la sucesión* $\{w_n\}$, si para cualquier entorno del punto z_0

existe una sucesión parcial $\{w_{k_n}\}$ cuyos términos todos pertenecen a este entorno. Por ejemplo, el punto 0 es un punto de acumulación para la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$; los puntos 0 y 1 son puntos de acumulación para la sucesión 0, 1, 0, 1, 0, 1, . . . (para el punto 0 la sucesión parcial que figura en la definición de punto de acumulación está formada por los términos de índice impar: 0, 0, 0, 0, . . .; para el punto 1, por los términos de índice par: 1, 1, 1, 1, . . .).

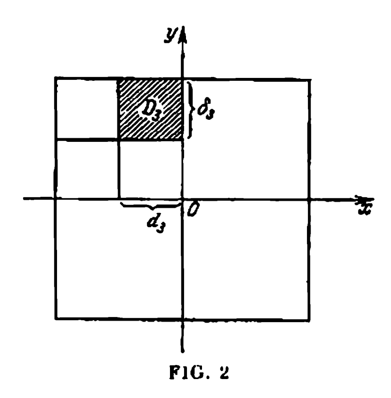


FIG. 2

Obsérvese que, si $\{w_{l_n}\}$ es una sucesión parcial de la sucesión $\{w_{k_n}\}$, y $\{w_{k_n}\}$ es una sucesión parcial de la sucesión $\{w_n\}$, entonces, $\{w_{l_n}\}$ es una sucesión parcial de la sucesión $\{w_n\}$. De aquí se deduce que todo punto de acumulación de una sucesión parcial es también punto de acumulación de la sucesión misma. Lo recíproco puede no ser cierto, como muestra el ejemplo 0, 1, 0, 1, . . ., donde la sucesión parcial 0, 0, 0, . . . tiene solamente un punto de acumulación, mientras que la sucesión misma tiene dos puntos de acumulación.

Se dice que una sucesión $\{w_n\}$ es **acotada**, si existe un entorno del origen de coordenadas que contiene todos los términos de la sucesión, es decr, si existe un $\rho > 0$ tal, que $|w_n| < \rho$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Demostremos ahora el siguiente teorema:

Teorema 1. (**Principio de Bolzano-Weierstrass para las sucesiones**). *Toda sucesión acotada $\{w_n\}$ tiene al menos un punto de acumulación.*

Demostración. Sea D_1 un cuadrado con los lados paralelos a los ejes coordenados y con el centro en el origen de coordenadas que contenga a todos los términos de la sucesión. Los ejes coordenados le dividen en cuatro cuadrados, al menos uno de los

cuales, sea éste D_2, contiene en su interior o en sus lados un conjunto infinito de términos de la sucesión. Dividiendo a éste en cuatro cuadrados iguales obtenemos un nuevo cuadrado D_3, que contiene un conjunto infinito de términos de la sucesión (fig. 2). Continuando estos razonamientos, hallaremos una sucesión de cuadrados encajados

$$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset D_4 \supset D_5 \supset D_6 \supset \ldots \supset D_n \supset \ldots \text{*)},$$

cada uno de los cuales contiene en su interior o en los lados un conjunto infinito de términos de la sucesión.

Sus proyecciones sobre los ejes x e y forman dos sucesiones de segmentos encajados

$$d_1 \supset d_2 \supset d_3 \supset \ldots \supset d_n \supset \ldots,$$
$$\delta_1 \supset \delta_2 \supset \delta_3 \supset \ldots \supset \delta_n \supset \ldots,$$

que se ciñen a los puntos ξ y η, respectivamente. El punto ξ pertenece a cada uno de los segmentos d_n, el punto η, a cada uno de los segmentos δ_n; por lo tanto, el punto $\zeta = \xi + i\eta$ pertenece a cada uno de los cuadrados D_n. Demostremos que ζ es un punto de acumulación de la sucesión $\{w_n\}$. En efecto, cualquiera que sea el entorno U: $|z - \zeta| < \rho$ del punto ζ, es posible elegir n tan grande que el cuadrado D_n esté completamente contenido en U. Para esto es suficiente exigir que la diagonal del cuadrado sea menor que ρ. Pero su longitud es, evidentemente, igual a $\frac{1}{2^n}$, donde l es la longitud del cuadrado D_1, y nuestra condición se cumplirá si $\frac{1}{2^n} < \rho$. Como D_n contiene un conjunto infinito de términos de la sucesión $\{w_n\}$, también U contendrá un conjunto infinito de éstos, de donde se deduce que ζ es un punto de acumulación de la sucesión $\{w_n\}$.

El teorema queda demostrado.

Una sucesión acotada $\{w_n\}$, que tiene solamente un punto de acumulación z_0, se llama c o n v e r g e n t e, y z_0 se llama l í m i t e de la sucesión.

También se dice que $\{w_n\}$ converge a z_0 (o hacia z_0) y se denota así: $w_n \to z_0$ para $n \to \infty$ (o, cuando $n \to \infty$), o bien, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z_0$.

Evidentemente, toda sucesión parcial $\{w_{k_n}\}$ de una sucesión convergente $\{w_n\}$ converge al mismo límite z_0. En efecto, $\{w_{k_n}\}$ es acotada, puesto que es acotada toda la sucesión $\{w_n\}$; por consiguiente, (según el teorema 1) $\{w_{k_n}\}$ tiene al menos un punto de acumulación. Pero los puntos de acumulación para $\{w_{k_n}\}$ son a la vez puntos de acumulación para $\{w_n\}$; por esto, $\{w_{k_n}\}$ tiene sola-

*) Escribimos: $D_{n-1} \supset D_n$ queriendo decir que D_{n-1} contiene a D_n.

mente un punto de acumulación z_0, de donde se deduce nuestra afirmación.

Demostremos que $\{w_n\}$ converge a z_0 cuando, y sólo cuando, cualquier entorno del punto z_0 contiene todos los términos de la sucesión $\{w_n\}$ comenzando desde uno de ellos; en otras palabras, si para cualquier $\rho > 0$ se cumplen las desigualdades: $|w_n - z_0| < \rho$ para $n > N(\rho)$.

En efecto, supongamos que $\{w_n\}$ converge a z_0. Si, para cierto $\rho > 0$, en el exterior de la circunferencia $|z - z_0| = \rho$, o en esta misma circunferencia, hay un conjunto infinito de términos de la sucesión $\{w_n\}$: $w_{n_1}, w_{n_2}, w_{n_3}, \ldots, w_{n_k}, \ldots$ $(n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots)$, éstos forman a su vez una sucesión que, al igual que la sucesión dada, será acotada. Por consiguiente, según el teorema 1, ésta tiene que tener al menos un punto de acumulación z_1. Pero $z_1 \neq z_0$, puesto que el entorno $|z - z_0| < \rho$ del punto z_0 no contiene ningún punto de $\{w_{n_k}\}$; por otra parte, z_1, siendo un punto de acumulación para $\{w_{n_k}\}$, tiene que ser también un punto de acumulación para toda la sucesión $\{w_n\}$.

Hemos obtenido un punto de acumulación de $\{w_n\}$, distinto de z_0, lo cual contradice a la hipótesis. De aquí se deduce que, en el exterior de la circunferencia $|z - z_0| = \rho$ y en la circunferencia misma, solamente puede haber un número finito de términos de la sucesión $\{w_n\}$, y que, por consiguiente, todos los términos de esta sucesión, comenzando desde cierto número, están situados en el interior de la circunferencia.

Así, pues, la condición mencionada es necesaria para la convergencia de la sucesión. Pero ésta es también suficiente. En efecto, la sucesión $\{w_n\}$, para la que se cumple esta condición, es acotada, puesto que todos los puntos de $\{w_n\}$, comenzando desde uno de ellos, están situados en el interior del círculo $|z - z_0| < 1$ (aquí $\rho = 1$), y siempre se puede tomar un entorno del punto $z = 0$ de un radio tan grande que incluya también al círculo $|z - z_0| < 1$, así como a los puntos $\{w_n\}$ (que hay una cantidad finita de ellos), que no están situados en el interior del último círculo. En virtud del teorema 1, la sucesión considerada tiene que tener al menos un punto de acumulación. Pero, ningún punto z_1, distinto de z_0, puede ser punto de acumulación de esta sucesión. En efecto, tomando $\rho < \frac{1}{2}|z_1 - z_0|$ y observando que sólo un número finito de términos de la sucesión $\{w_n\}$ puede estar situado fuera del círculo $|z - z_0| < \rho$, hacemos la conclusión de que solamente un número finito de ellos está situado en el círculo $|z - z_1| < \rho$. Pero esto significa que z_1 no es un punto de acumulación. Por lo tanto, z_0 es el único punto de acumulación de la sucesión $\{w_n\}$, es decir, $\{w_n\}$ converge hacia z_0.

Demostremos que cualquier sucesión acotada $\{w_n\}$ posee una sucesión parcial convergente. Sea, en efecto, z_0 un punto de acumulación de la sucesión $\{w_n\}$ (tal punto existe en virtud del teorema 1). Entonces, cualquier entorno del punto z_0 contiene un conjunto infinito de términos w_n. Consideremos el entorno $|z - z_0| < 1$ y sea w_{n_1} un punto cualquiera situado en este entorno. Tomemos luego el entorno $|z - z_0| < \frac{1}{2}$, y del conjunto infinito de términos w_n contenidos en él, tomemos un término w_{n_2} con un subíndice mayor que n_1. Supongamos que ya hemos tomado los términos $w_{n_1}, w_{n_2}, \ldots, w_{n_k}$, situados respectivamente en los entornos: $|z - z_0| < 1$, $|z - z_0| < \frac{1}{2}, \ldots, |z - z_0| < \frac{1}{k}$ y tales que $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k$. Entonces, entre el conjunto infinito de términos w_n situados en el entorno $|z - z_0| < \frac{1}{1+k}$, tomaremos por $w_{n_{k+1}}$ un término cualquiera con el subíndice mayor que n_k. Por lo tanto, existe una sucesión parcial $\{w_{n_k}\}$ de la sucesión $\{w_n\}$ tal, que $|w_{n_k} - z_0| < \frac{1}{k}$.

Evidentemente, todos los términos de esta sucesión, cuyos subíndices n_k cumplen la condición $k > \frac{1}{\rho}$, están situados en el entorno $|z - z_0| < \rho$. De aquí se deduce que $\{w_{n_k}\}$ converge hacia z_0, o sea, $\{w_n\}$ posee una sucesión parcial convergente.

Veamos un criterio de convergencia que no se basa en el conocimiento del límite de la sucesión (criterio de Cauchy).

Teorema 2. *Para que una sucesión $\{w_n\}$ sea convergente, es necesario y suficiente que, para cualquier $\varepsilon > 0$ exista cierto $N(\varepsilon)$ tal, que se cumpla la desigualdad $|w_n - w_{n+p}| < \varepsilon$ para todos los $n > N(\varepsilon)$ y cualquier número natural p.*

Demostración. La condición es necesaria. En efecto, si $\{w_n\}$ converge hacia un límite z_0, se tiene

$$|w_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n > N(\varepsilon)$ y, por consiguiente,

$$|w_{n+p} - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para los mismos valores de n y para cualesquiera números naturales p. De aquí que

$$|w_n - w_{n+p}| = |(w_n - z_0) - (w_{n+p} - z_0)| \leqslant |w_n - z_0| + |w_{n+p} - z_0| < \varepsilon$$

para $n > N(\varepsilon)$, es decir, se cumple la condición.

Demostremos ahora que esta condición también es suficiente para la convergencia. En efecto, tomando $\varepsilon = 1$, obtenemos

$$|w_n - w_{n+p}| < 1,$$

comenzando desde cierto valor de n. Fijando uno de tales n, por ejemplo $n = n_0$, obtenemos que $|w_{n_0} - w_{n_0+p}| < 1$, es decir, todos los puntos $w_{n_0+1}, w_{n_0+2}, \ldots$ están situados en el círculo de radio 1 con centro en el punto w_{n_0}.

Tomando ahora un entorno $|z| < \rho$ del origen de coordenadas que contenga el círculo indicado y también todos los puntos w_1,

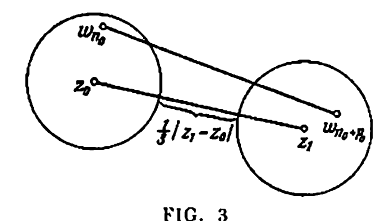


FIG. 3

$w_2, \ldots, w_{n_0}$, obtenemos un entorno que contiene todos los términos de la sucesión, de donde se deduce que $\{w_n\}$ es una sucesión acotada. Por consiguiente, según el teorema 1, ésta tiene al menos un punto de acumulación.

No queda más que demostrar que no pueden existir dos puntos de acumulación distintos. Supongamos, por el contrario, que z_0 y z_1, $z_0 \neq z_1$, son dos puntos de acumulación de la sucesión $\{w_n\}$. Haciendo $\varepsilon = \frac{1}{3}|z_1 - z_0|$, hallamos que las desigualdades

$$|w_n - w_{n+p}| < \frac{1}{3}|z_1 - z_0| \qquad (3.2:1)$$

se cumplen comenzando desde un valor de n suficientemente grande: $n > N$. Por otra parte, cada uno de los entornos

$$|z - z_0| < \frac{1}{3}|z_1 - z_0| \text{ y } |z - z_1| < \frac{1}{3}|z_1 - z_0|$$

de los puntos z_0 y z_1 tiene que contener un conjunto infinito de términos de la sucesión $\{w_n\}$. Sea w_{n_0} un término de subíndice mayor que N, perteneciente al primero de estos entornos, y sea $w_{n_0+p_0}$ un término perteneciente al segundo entorno. Entonces, evidentemente, (fig. 3),

$$|w_{n_0} - w_{n_0+p_0}| > \frac{1}{3}|z_1 - z_0|,$$

lo cual, sin embargo, contradice a la desigualdad (3.2:1). De esta contradicción se deduce que $\{w_n\}$ posee solamente un punto de acumulación, es decir, es convergente. El teorema queda demostrado.

3.3. Hagamos $w_n = u_n + iv_n$, donde u_n y v_n son las partes real e imaginaria de w_n. Entonces, junto con la sucesión de números complejos $\{w_n\}$, obtenemos dos sucesiones de números reales $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$.

Demostremos la siguiente proposición.

Teorema. *Una sucesión $\{w_n = u_n + iv_n\}$ converge hacia el límite $z_0 = x_0 + iy_0$ cuando, y sólo cuando, las sucesiones de números reales $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ convergen hacia los límites x_0 e y_0, respectivamente.*

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z_0$; entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, la desigualdad $|w_n - z_0| < \varepsilon$ se cumplirá para $n > N(\varepsilon)$ Pero

$$|u_n - x_0| = |\operatorname{Re}(w_n - z_0)| \leqslant |w_n - z_0|$$

y

$$|v_n - y_0| = |\operatorname{Im}(w_n - z_0)| \leqslant |w_n - z_0|;$$

por lo tanto, para $n > N(\varepsilon)$ se cumplen las desigualdades

$$|u_n - x_0| < \varepsilon \text{ y } |v_n - y_0| < \varepsilon,$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = x_0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} v_n = y_0.$$

Recíprocamente, si se sabe que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = x_0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} v_n = y_0,$$

entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ se cumplen las desigualdades

$$|u_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |v_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n > N(\varepsilon)$. Pero

$$|w_n - z_0| = |(u_n - x_0) + i(v_n - y_0)| \leqslant |u_n - x_0| + |v_n - y_0|;$$

por consiguiente,

$$|w_n - z_0| < \varepsilon$$

para $n > N(\varepsilon)$, de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} w_n = z_0.$$

El teorema queda demostrado.

En virtud de este teorema, cualquier cuestión acerca de la convergencia de una sucesión de números complejos es equivalente al

problema de la convergencia de dos sucesiones de números reales. Por ello, por ejemplo, las proposiciones conocidas sobre el límite de la suma, diferencia, producto o cociente de dos sucesiones convergentes se extienden sin cambio alguno al caso de sucesiones de términos complejos. Precisando, si las sucesiones $\{w'_n\}$ y $\{w''_n\}$ convergen hacia los límites z'_0 y z''_0, las sucesiones $\{w'_n + w''_n\}$, $\{w'_n - w''_n\}$, $\{w'_n \cdot w''_n\}$ también convergen hacia los límites $z'_0 + z''_0$, $z'_0 - z''_0$, $z'_0 \cdot z''_0$, respectivamente. Si $w''_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y $z''_0 \neq 0$, la sucesión $\left\{\frac{w'_n}{w''_n}\right\}$ también es convergente y su límite es igual a $\frac{z'_0}{z''_0}$.

Obsérvese que la proposición expresada por el último teorema se podría tomar por definición de convergencia de una sucesión de términos complejos. Entonces, todos los teoremas del precedente apartado se podrían deducir de los teoremas correspondientes sobre las sucesiones de números reales.

Para resolver el problema de la convergencia de la sucesión $\{w_n\}$, en lugar de considerar las sucesiones de las partes real e imaginaria $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$, se pueden considerar las sucesiones de los módulos y de los valores principales de los argumentos: $\{\,|w_n|\,\}$ y $\{\arg w_n\}$. Por ejemplo, esto resulta conveniente al estudiar las sucesiones que convergen hacia cero, puesto que, para que una sucesión de números complejos $\{w_n\}$ tienda a cero, es necesario y suficiente que tienda a cero la sucesión de los módulos $\{\,|w_n|\,\}$. (En este caso no hace falta examinar la sucesión $\{\arg w_n\}$; ésta puede ser incluso divergente.) Para convencerse que es cierto lo dicho, es suficiente observar que el cumplimiento de la desigualdad $|w_n - 0| = |w_n| < \varepsilon$ para $n > N(\varepsilon)$ significa, simultáneamente, la convergencia a cero, tanto de la sucesión de los números complejos $\{w_n\}$ como de la sucesión de los números reales $\{\,|w_n|\,\}$.

En el caso general, la convergencia simultánea de las sucesiones $\{\,|w_n|\,\}$ y $\{\arg w_n\}$ es suficiente para la convergencia de la sucesión $\{w_n\}$; además, si $\lim\limits_{n\to\infty} |w_n| = r$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \arg w_n = \varphi$, entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$. En efecto, tenemos: $u_n = \operatorname{Re}(w_n) = |w_n| \cos(\arg w_n)$, $v_n = \operatorname{Im}(w_n) = |w_n| \operatorname{sen}(\arg w_n)$; por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} [\,|w_n| \cos(\arg w_n)] = r\cos\varphi$ y $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} [\,|w_n| \operatorname{sen}(\arg w_n)] = r \operatorname{sen}\varphi$, de donde se deduce la afirmación pedida.

Recíprocamente, si la sucesión $\{w_n\}$ es convergente, también lo es la sucesión de los módulos: $\{\,|w_n|\,\}$. En efecto, $|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$, y como las sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son convergentes: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$, existe también el límite: $\lim\limits_{n\to\infty} |w_n|$,

igual a $\sqrt{u^2+v^2}$. Obsérvese que la sucesión de los argumentos $\{\arg w_n\}$ de una sucesión convergente $\{w_n\}$ puede ser divergente incluso cuando $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$. Supongamos, por ejemplo, que $w_n = -1+(-1)^n \frac{i}{n}$. En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} w_n = -1,$$

$$\arg w_{2k} = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2k} \text{ y } \arg w_{2k+1} = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2k+1};$$

está claro que la sucesión $\{\arg w_n\}$ es divergente. No obstante, se puede hallar una sucesión convergente de valores $\operatorname{Arg} w_n$. Designemos, para esto, mediante φ_n el valor $\operatorname{Arg} w_n$ comprendido entre 0

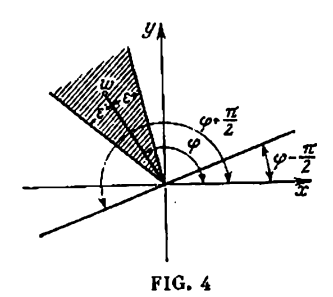


FIG. 4

y 2π: $0 \leqslant \varphi_n < 2\pi$. Entonces, evidentemente, tendremos que $\varphi_{2k} = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2k}$ y $\varphi_{2k+1} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2k+1}$. La sucesión $\{\varphi_n\}$ converge hacia el límite π.

Si, en general, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w \neq 0$ y φ es alguno de los valores del $\operatorname{Arg} w$, entonces, comenzando desde cierto valor de $n = N$, todos los puntos de la sucesión $\{w_n\}$ estarán situados dentro del ángulo formado por los rayos cuyos ángulos de inclinación con el eje x son $\varphi - \frac{\pi}{2}$ y $\varphi + \frac{\pi}{2}$, y que contiene al punto w (fig. 4). Por lo tanto, para los argumentos $\operatorname{Arg} w_{N+1}$, $\operatorname{Arg} w_{N+2}$, ..., se pueden tomar los valores φ_{N+1}, φ_{N+2}, ... que cumplen las desigualdades $|\varphi_{N+n} - \varphi| < \frac{\pi}{2}$. Tomando para $\operatorname{Arg} w_1$, ..., $\operatorname{Arg} w_N$, ... sus valores φ_1, ..., φ_N, ..., se puede afirmar que la sucesión $\{\varphi_n\}$ es convergente y su límite es igual a φ. En efecto, para cualquier ε, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, se puede indicar un $N_1(\varepsilon) \geqslant N$ tal, que los puntos de

la sucesión $\{w_n\}$ cuyos subíndices sean mayores que $N_1(\varepsilon)$ estarán situados dentro del ángulo formado por los rayos cuyos ángulos de inclinación con el eje real son iguales a $\varphi - \varepsilon$ y $\varphi + \varepsilon$, y que contiene al punto w. Para ellos, los valores φ_n están comprendidos entre los límites $\varphi - \varepsilon < \varphi_n < \varphi + \varepsilon$, es decir, para $n > N_1(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad $|\varphi_n - \varphi| < \varepsilon$, de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi.$$

Obsérvese que, cuando $w \neq 0$ no es un número real negativo, se pueden tomar por φ y φ_n los valores principales del argumento. Entonces, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty} \arg w_n = \arg w.$$

Así pues, si la sucesión $\{w_n\}$ es convergente y su límite $w \neq 0$, entonces, para cualquier valor $\varphi = \operatorname{Arg} w$ existe una sucesión de valores $\varphi_n = \operatorname{Arg} w_n$ que converge hacia $\operatorname{Arg} w$. Precisamente en este sentido entenderamos a continuación la expresión $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Arg} w_n = \operatorname{Arg} w$. Cuando $w \neq 0$ no es un número negativo, en particular, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty} \arg w_n = \arg w.$$

Proponemos al lector demostrar como ejercicio que, si $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$, entonces, cualquier sucesión de valores $\psi_n = \operatorname{Arg} w_n$ que cumpla la condición $|\psi_{n+1} - \psi_n| \leqslant \pi$ desde cierto valor de $n = N$, será convergente (claro, hacia uno de los valores $\psi = \operatorname{Arg} w$).

3.4. Apliquemos los resultados obtenidos al problema de las series de términos complejos.

Sea

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots \tag{3.4:1}$$

una serie de términos complejos y

$$\{s_n = w_1 + \ldots + w_n\} \tag{3.4:2}$$

la sucesión de sus sumas parciales. Según la definición, la serie se llama convergente si es convergente la sucesión de sus sumas parciales. El límite de esta sucesión se llama suma de la serie. Si $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, escribimos:

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots = s.$$

Una serie que no es convergente, se llama divergente.

Haciendo $w_n = u_n + iv_n$ y $s_n = \sigma_n + i\tau_n = (u_1 + \ldots + u_n) +$

$+ i(v_1 + \ldots + v_n)$, según lo anterior, obtendremos que la serie (3.4:1) es convergente cuando, y sólo cuando, son convergentes las dos sucesiones:

$$\{u_1 + u_2 + \ldots + u_n\}, \quad \{v_1 + v_2 + \ldots + v_n\}.$$

Pero estas últimas son las sucesiones de las sumas parciales de las dos series de términos reales:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{3.4:3}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{3.4:4}$$

De este modo, una serie de términos complejos es convergente cuando, y sólo cuando, son convergentes las series formadas por las partes reales e imaginarias de los términos de la serie dada.

Además, si las sumas de las series (3.4:3) y (3.4:4) son iguales a σ y τ, respectivamente, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} (u_1 + \ldots + u_n) = \sigma \text{ y } \lim_{n\to\infty} (v_1 + \ldots + v_n) = \tau,$$

se tiene,

$$s = \lim_{n\to\infty} (w_1 + \ldots + w_n) = \sigma + i\tau,$$

o sea, las sumas de las series (3.4:3) y (3.4:4) son, respectivamente, las partes real e imaginaria de la suma de la serie (3.4:1).

Aplicando el criterio de Cauchy a la sucesión de las sumas parciales (3.4:2) y observando que

$$s_{n+p} - s_n = w_{n+1} + \ldots + w_{n+p},$$

obtenemos la siguiente proposición:

La serie (3.4:1) *es convergente cuando, y sólo cuando, para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un* $N(\varepsilon)$ *tal, que para cualquier* $n > N(\varepsilon)$ *y para todos los números naturales* p, *se cumple la desigualdad*

$$|w_{n+1} + \ldots + w_{n+p}| < \varepsilon.$$

En particular, de aquí resulta que la condición $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ es necesaria para la convergencia de la serie.

La serie (3.4:1) se llama a b s o l u t a m e n t e c o n v e r g e n t e si es convergente la serie de los módulos de sus términos:

$$|w_1| + |w_2| + \ldots + |w_n| + \ldots \tag{3.4:5}$$

Como

$$|w_{n+1} + \ldots + w_{n+p}| \leqslant |w_{n+1}| + \ldots + |w_{n+p}|,$$

de la convergencia absoluta de la serie de términos complejos se deduce la convergencia de la misma serie. Naturalmente, lo recí-

proco no es cierto, como lo muestra el conocido ejemplo de la serie:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

De las desigualdades

$$|u_n|\leqslant|w_n|,\quad |v_n|\leqslant|w_n|\quad \text{y}\quad |w_n|\leqslant|u_n|+|v_n|$$

se deduce que la serie (3.4:1) es absolutamente convergente cuando, y sólo cuando, son absolutamente convergentes las series (3.4:3) y (3.4:4).

Hagamos una permutación arbitraria de los términos en la serie absolutamente convergente (3.4:1). Se obtiene una nueva serie:

$$w_{n_1}+w_{n_2}+\dots+w_{n_k}+\dots, \tag{3.4:6}$$

donde la sucesión $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ contiene todos los números naturales y cada uno de éstos aparece una sola vez. Las series de las partes reales e imaginarias de los términos de la serie (3.4:6) tienen la forma:

$$u_{n_1}+u_{n_2}+\dots+u_{n_k}+\dots,$$
$$v_{n_1}+v_{n_2}+\dots+v_{n_k}+\dots,$$

y como estas series se obtienen mediante una permutación de los términos en las series absolutamente convergentes (3.4:3) y (3.4:4), ellas también convergerán hacia las sumas anteriores σ y τ. De esto se deduce que la serie (3.4:6) también converge hacia la suma anterior $s=\sigma+i\tau$. Así, pues, en las series absolutamente convergentes de términos complejos es legítima cualquier alteración de los términos.

Como la convergencia absoluta de la serie (3.4:1) significa la convergencia de la serie (3.4:5) de términos reales no negativos, cualquier criterio conocido de convergencia de las series de términos no negativos se puede utilizar como criterio de convergencia absoluta. Señalemos, en particular, los criterios de D'Alembert y Cauchy.

Para la convergencia absoluta de la serie (3.4:1) es suficiente que, comenzando desde cierto valor de n, se cumplan las desigualdades

$$|w_{n+1}|\leqslant q|w_n|\qquad (0<q<1)$$

(criterio de D'Alembert) o bien

$$\sqrt[n]{|w_n|}\leqslant q\qquad (0<q<1)$$

(criterio de Cauchy).

Este último criterio es más general, en el sentido de que, cumpliéndose el primero se cumple también el segundo, mientras que puede cumplirse el segundo a pesar de que el primero no se cumpla.

La siguiente proposición, que a menudo se emplea, proporciona una condición suficiente de convergencia (por lo general, no absoluta):

Si

$$w_k = a_k b_k,$$

donde

$$\left|\sum_1^n a_k\right| \leqslant M \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

y la serie $\sum_1^\infty |b_k - b_{k+1}|$ *es convergente, la serie* $\sum_1^\infty w_k$ *también lo es.*

Demostración. Designemos la suma $\sum_1^m a_k$ mediante α_m; entonces, tendremos $a_m = \alpha_m - \alpha_{m-1}$, y la suma $\sum_{n+1}^{n+p} w_k$ se escribirá del siguiente modo:

$$\sum_{n+1}^{n+p} w_k = \sum_{n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{n+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_{k-1})\, b_k = \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k b_k - \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_{k-1} b_k =$$

$$= \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k b_k - \sum_{n}^{n+p-1} \alpha_k b_{k+1} = \alpha_{n+p} b_{n+p} - \alpha_n b_{n+1} - \sum_{n+1}^{n+p-1} \alpha_k (b_{k+1} - b_k)\ ^{*}). \tag{3.4:7}$$

De aquí se deduce que

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} w_k\right| \leqslant |\alpha_{n+p}|\,|b_{n+p}| + |\alpha_n|\,|b_{n+1}| + \sum_{n+1}^{n+p-1} |\alpha_k|\,|b_k - b_{k+1}| \leqslant$$

$$\leqslant M\left(|b_{n+p}| + |b_{n+1}| + \sum_{n+1}^{n+p-1} |b_k - b_{k+1}|\right),$$

y si se cumplen las desigualdades

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{y} \quad \sum_{n+1}^{n+p} |b_k - b_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

---

*) La transformación (3.4:7), a que hemos sometido la suma $\sum_{n+1}^{n+p} a_k b_k$, se llama transformación de Abel; ésta es completamente análoga a la integración por partes.

para $n > N(\varepsilon)$ y cualquier p natural, entonces, en las mismas condiciones

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} w_k\right| < \varepsilon,$$

de donde se deduce la convergencia de la serie $\sum_1^\infty w_k$.

Las proposiciones conocidas referentes a las operaciones con las series de términos reales se generalizan también a las series de términos complejos.

Señalemos las siguientes proposiciones, que fácilmente se demuestran:

1) Para cualquier número natural n, las series

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + w_{n+1} + \ldots \quad \text{y} \quad w_{n+1} + \ldots + w_{n+p} + \ldots$$

son simultáneamente convergentes o divergentes.

2) Si la serie $w_1 + \ldots + w_n + \ldots$ es convergente y su suma es igual a s, la serie $\lambda w_1 + \lambda w_2 + \ldots + \lambda w_n + \ldots$ también lo es y su suma es igual a λs.

3) Si la serie $w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$ es convergente y su suma es igual a s, la serie

$$(w_1 + \ldots + w_{n_1}) + (w_{n_1+1} + \ldots + w_{n_2-1}) + \ldots$$
$$\ldots + (w_{n_k} + \ldots + w_{n_{k+1}-1}) + \ldots$$

también lo es y su suma también es igual a s ($n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ es una sucesión creciente arbitraria de números naturales).

4) Si

$$w_1' + \ldots + w_n' + \ldots = s' \quad \text{y} \quad w_1'' + \ldots + w_n'' + \ldots = s'',$$

entonces,

$$(w_1' \pm w_1'') + \ldots + (w_n' \pm w_n'') + \ldots = s' \pm s''.$$

5) Si las series $\sum_1^\infty w_k'$ y $\sum_1^\infty w_k''$ son absolutamente convergentes y sus sumas son iguales a s' y s'', entonces, la serie $\sum_1^\infty (w_1' w_k'' + w_2' w_{k-1}'' + \ldots + w_k' w_1'')$ es absolutamente convergente y su suma es igual a $s' s''$.

Para demostrar esta última proposición, examinemos la serie:

$$|w_1'||w_1''| + |w_1'||w_2''| + |w_2'||w_1''| + \ldots$$
$$\ldots + |w_1'||w_k''| + \ldots + |w_k'||w_1''| + \ldots \qquad (3.4:8)$$

Evidentemente, ésta es convergente (como producto de dos series absolutamente convergentes $\sum_1^\infty |w'_k|$ y $\sum_1^\infty |w''_k|$ de términos reales). Por consiguiente, la serie de términos complejos

$$w'_1w''_1 + w'_1w''_2 + w'_2w''_1 + \ldots + w'_1w''_k + \ldots + w'_kw''_1 + \ldots \qquad (3.4:9)$$

es absolutamente convergente. Realicemos alguna permutación de los términos de la última serie, colocando sus términos del modo siguiente:

$$w'_1w''_1 + w'_1w''_2 + w'_2w''_2 + w'_2w''_1 + w'_1w''_3 + w'_2w''_3 + w'_3w''_3 + w'_3w''_2 + w'_3w''_1 + \ldots$$

Con esto no se altera la suma. Pero, las sumas parciales de uno, cuatro, nueve y, en general, de n^2 términos de la última serie son iguales, respectivamente, a

$$w'_1w''_1 = s'_1 \cdot s''_1,$$
$$w'_1w''_1 + w'_1w''_2 + w'_2w''_2 = w'_2w''_1 = s'_2 \cdot s''_2,$$
$$w'_1w''_1 + w'_1w''_2 + w'_2w''_2 + w'_2w''_1 + \ldots + w'_3w''_1 = s'_3 \cdot s''_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w'_1w''_1 + w'_1w''_2 + \ldots + w'_nw''_1 = s'_n \cdot s''_n$$

(s'_n y s''_n son las sumas parciales respectivas de las series $\sum_1^\infty w'_k$ y $\sum_1^\infty w''_k$). De aquí se deduce que la suma de la serie (3.4:9) es igual a $\lim_{n\to\infty} s'_ns''_n = s's''$. En virtud de la propiedad 3), la serie

$$w'_1w''_1 + (w'_1w''_2 + w'_2w''_1) + \ldots$$
$$\ldots + (w'_1w''_k + w'_2w''_{k-1} + \ldots + w'_kw''_1) + \ldots \qquad (3.4:10)$$

tiene la misma suma que la serie (3.4:9), es decir, $s' \cdot s''$. Además, ésta es absolutamente convergente, puesto que

$$|w'_1w''_k + w'_2w''_{k-1} + \ldots + w'_kw''_1| \leqslant |w'_1| \cdot |w''_k| + \ldots + |w'_k| \cdot |w''_1|,$$

y la serie

$$|w'_1||w''_1| + (|w'_1||w''_2| + |w'_2||w''_1|) + \ldots$$
$$\ldots + (|w'_1| \cdot |w''_k| + \ldots + |w'_k||w''_1|) + \ldots$$

es convergente (en virtud de la convergencia de la serie (3.4:8)).

Así, pues, hemos demostrado que la serie (3.4:10) es absolutamente convergente y que su suma es igual a $s's''$, lo cual se quería demostrar.

Demostremos que toda serie absolutamente convergente $\sum_1^\infty w_j$ posee las propiedades asociativa y conmutativa en el siguiente

sentido generalizado. Supongamos que la sucesión de todos los números naturales se ha descompuesto de algún modo en un conjunto infinito de sucesiones parciales crecientes:

$$\{n'_k\},\ \{n''_k\},\ \ldots,\ \{n_k^{(m)}\},\ \ldots,$$

tales que cada número natural n figura en una de ellas, y sólo en una, y, además, solamente una vez. Examinemos la serie

$$(w_{n'_1}+w_{n'_2}+\ldots)+(w_{n''_1}+w_{n''_2}+\ldots)+\ldots$$
$$\ldots+(w_{n_1^{(m)}}+w_{n_2^{(m)}}+\ldots)+ \qquad (3.4:11)$$

Esta serie se obtiene de la dada mediante una alteración del orden de los términos y una consiguiente división en grupos (cada uno contiene un conjunto infinito de términos). Además, cada uno de los términos de la serie inicial figura en uno de los grupos indicados, y sólo en uno. Cerciorémonos de que la serie (3.4:11) es convergente y que su suma coincide con la suma σ de la serie dada $\sum\limits_1^\infty w_j$. En esto consiste, precisamente, la propiedad de la serie absolutamente convergente de que se trataba.

Ante todo, demostremos que son convergentes cada una de las series $\sum\limits_{k=1}^\infty w_{n_k}(m)$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots)$, que representan términos de la serie (3.4:11). En efecto, para la suma de los módulos de cualquier suma parcial de tal serie, se tiene:

$$|w_{n_1^{(m)}}|+\ldots+|w_{n_k^{(m)}}|\leqslant|w_1|+|w_2|+\ldots+|w_j|+|w_{j+1}|+\ldots=s,$$

de donde se deduce la convergencia (y además, absoluta) de las series indicadas.

Para demostrar que la serie (3.4:11) también es absolutamente convergente, formemos primero la siguiente suma:

$$(|w_{n'_1}|+|w_{n'_2}|+\ldots+|w_{n'_k}|)+(|w_{n''_1}|+|w_{n''_2}|+\ldots$$
$$\ldots+|w_{n''_k}|)+\ldots+(|w_{n_1^{(m)}}|+\ldots+|w_{n_k^{(m)}}|).$$

Evidentemente, ésta no es superior al valor de la suma $\sum\limits_1^\infty|w_j|=s$. Con más razón,

$$|w_{n'_1}+w_{n'_2}+\ldots+w_{n'_k}|+|w_{n''_1}+w_{n''_2}+\ldots+w_{n''_k}|+\ldots$$
$$\ldots+|w_{n_1^{(m)}}+w_{n_2^{(m)}}+\ldots+w_{n_k^{(m)}}|\leqslant s.$$

Manteniendo aquí m constante y haciendo crecer a k indefinidamente, obtendremos:

$$|\sum_1^\infty w_{n'_k}|+|\sum_1^\infty w_{n''_k}|+\ldots+|\sum_1^\infty w_{n_k^{(m)}}|\leqslant s,$$

es decir, la suma de los módulos de cualquier cantidad m de términos de la serie (3.4:11) no es superior al número fijado s. De aquí se deduce que esta serie es convergente (y además, absolutamente). No queda más que demostrar que la suma de la serie (3.4:11) coincide con la suma de la serie inicial $\sigma=\sum_1^\infty w_j$. Formemos la diferencia entre la suma σ y la suma parcial σ_m de la serie (3.4:11). Como todos los términos de la suma parcial indicada son términos de la serie $\sum_1^\infty w_j$, al restar se efectuará una simplificación mutua, y en la resta quedarán solamente aquellos términos de la serie $\sum_1^\infty w_j$ que no figuran en el sustraendo.

De la forma en que está construida la serie (3.4:11) se deduce que para cualquier número natural N se puede señalar un $M=M(N)$ tal que siendo $m>M$, la suma parcial

$$\sigma_m=\sum_1^\infty w_{n'_k}+\sum_1^\infty w_{n''_k}+\ldots+\sum_1^\infty w_{n_k^{(m)}}$$

contendrá todos los términos $w_1, w_2, \ldots, w_N$ (y, además, también una infinidad de términos). Entonces, en la diferencia $\sigma-\sigma_m$, que representa una serie infinita absolutamente convergente, estarán contenidos solamente los términos w_j cuyos subíndices sean mayores que N. Por lo tanto, para $m>M(N)$

$$|\sigma-\sigma_m|\leqslant|w_{N+1}|+|w_{N+2}|+\ldots+|w_{N+p}|+\ldots$$

Pero la cantidad que figura en el segundo miembro puede hacerse arbitrariamente pequeña para valores de N suficientemente grandes. Por consiguiente, el primer miembro se puede hacer lo pequeño que se quiera para valores de m suficientemente grandes. Así, pues,

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\sigma,$$

o sea,

$$\sum_{m=1}^\infty [w_{n_1^{(m)}}+w_{n_2^{(m)}}+\ldots+w_{n_k^{(m)}}+\ldots]=\sigma=\sum_1^\infty w_j,$$

con lo que se termina la demostración.

La serie (3.4:11) puede ser escrita en forma de una serie doble

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k+1}^{\infty} w_{n_k^{(m)}}.$$

La notación del término general de esta serie se puede simplificar suprimiendo la letra n, ya que no figura en la sumación, y poniendo

$$w_{n_k^{(m)}} = w_{km}.$$

Entonces, se obtiene la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} w_{km}.$$

Desde el punto de vista de la proposición demostrada, esta serie doble representa solamente una de las infinitas formas posibles de expresión de la serie absolutamente convergente $\sum_{1}^{\infty} w_j$.

3.5. Sea E un conjunto arbitrario de puntos del plano complejo. Se dice que z_0 es un punto de acumulación para el conjunto E (o del conjunto E), si cualquier entorno del punto z_0 contiene un conjunto infinito de puntos pertenecientes a E.

Es evidente que un conjunto que consta de un número finito de puntos no posee puntos de acumulación. Comparemos entre sí los conceptos de punto de acumulación de una sucesión y de punto de acumulación de un conjunto. Supongamos que los puntos del conjunto E representan los términos de una sucesión $\{w_n\}$. Entonces, cada punto z_0 que sea un punto de acumulación para el conjunto E, será también un punto de acumulación para la sucesión, puesto que cualquier entorno del punto z_0 contiene un conjunto infinito de puntos de E y, por consiguiente, contiene también un conjunto infinito de términos de la sucesión $\{w_n\}$.

Sin embargo, puede ocurrir que un punto z_1, perteneciente a E, no sea un punto de acumulación para E, a pesar de que represente un conjunto infinito de términos distintos de la sucesión $\{w_n\}$: $w_{k_1}, w_{k_2}, \ldots, w_{k_n}, \ldots$ Tal punto será un punto de acumulación para la sucesión $\{w_n\}$ y no lo será para el conjunto E. Como ejemplo, es suficiente examinar la sucesión 0, 1, 0, 1, 0, 1, . . ., que posee dos puntos de acumulación 0 y 1, mientras que el conjunto E que representa los términos de esta sucesión consta solamente de dos puntos 0 y 1, por lo cual no tiene ningún punto de acumulación.

Refiriéndose a cualquier conjunto E, demostremos que *un punto z_0 es un punto de acumulación para este conjunto si, y sólo si, existe una sucesión $\{w_n\}$ de puntos de E, distintos entre sí, que converge*

hacia z_0:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = z_0.$$

En efecto, sea z_0 un punto de acumulación del conjunto E. Consideremos el entorno $|z - z_0| < 1$ del punto z_0. En éste está contenido un conjunto infinito de puntos de E. Sea w_1 uno de ellos. Como en el entorno $|z - z_0| < \frac{1}{2}$ también hay un conjunto infinito de puntos de E, tiene que haber entre éstos un punto $w_2 \neq w_1$. Supongamos que ya se han hallado los puntos $w_1, w_2, \ldots, w_n$, pertenecientes a E y distintos entre sí, tales que w_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ están contenidos en los entornos $|z - z_0| < \frac{1}{k}$, respectivamente. Como el entorno $|z - z_0| < \frac{1}{n+1}$ contiene un conjunto infinito de puntos de E, entre éstos existe un punto w_{n+1} perteneciente a E y distinto de los puntos $w_1, w_2, \ldots, w_n$. De aquí se deduce que existe una sucesión $\{w_n\}$ de puntos de E, distintos entre sí, tales que $|w_n - z_0| < \frac{1}{n}$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z_0$. Recíprocamente, si se sabe que existe una sucesión $\{w_n\}$ de puntos distintos de E, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z_0$, entonces, en cualquier entorno del punto z_0 está contenido un conjunto infinito de puntos w_n pertenecientes a E, de donde se deduce que z_0 es un punto de acumulación del conjunto E. Con esto, nuestra proposición queda demostrada. Evidentemente, a los puntos w_n se les podría someter a la condición complementaria: suponer que todos ellos son distintos de z_0.

Diremos que un conjunto E es a c o t a d o si existe un círculo $|z| < R$ que contiene a todos los puntos de este conjunto. Demostremos que todo *conjunto infinito acotado posee al menos un punto de acumulación*. En efecto, sea w_1 algún punto de E; como E es un conjunto infinito, existe un punto w_2 perteneciente a E y distinto de w_1. Supongamos que ya se han hallado n puntos distintos pertenecientes a E: $w_1, w_2, \ldots, w_n$; entonces, del conjunto infinito E se puede extraer otro punto más w_{n+1}, distinto de cada uno de estos puntos. Por lo tanto, existe una sucesión $\{w_n\}$ de puntos de E distintos entre sí. Esta sucesión es acotada, al igual que el mismo conjunto E. Por esto, ésta posee al menos un punto de acumulación z_0. Este último tiene que ser también punto de acumulación para el conjunto E, puesto que cualquier entorno del mismo contiene un conjunto infinito de puntos w_n pertenecientes a E. La afirmación queda demostrada.

De las proposiciones demostradas en este apartado se deduce en particular que, *todo conjunto infinito acotado contiene una sucesión convergente de puntos de este conjunto, distintos entre sí*.

3.6. Sea E un conjunto infinito arbitrario, sea $f(z)$ una función definida en este conjunto y z_0 un punto de acumulación de E.

Supongamos que para c a d a sucesión de puntos z_n, pertenecientes a E y distintos de z_0, convergente hacia z_0 (tales sucesiones existen en virtud de lo demostrado en el apartado precedente), la sucesión de los valores correspondientes de la función $\{f(z_n)\}$ es convergente. Entonces, para dos sucesiones distintas $\{z'_n\}$ y $\{z''_n\}$ que satisfacen a las condiciones indicadas, los límites $\lim_{n\to\infty} f(z'_n)$ y $\lim_{n\to\infty} f(z''_n)$ tienen que ser iguales entre sí. En efecto, es evidente que la sucesión

$$z'_1,\ z''_1,\ z'_2,\ z''_2,\ \ldots,\ z'_n,\ z''_n,\ \ldots,$$

converge hacia el punto z_0 y consta de puntos del conjunto E, distintos de z_0; según la hipótesis, también tiene que converger la sucesión de los valores correspondientes de la función

$$f(z'_1),\ f(z''_1),\ f(z'_2),\ f(z''_2)\ \ldots,\ f(z'_n),\ f(z''_n),\ \ldots$$

Por lo tanto, cualquiera sucesiones parciales de ésta tienen que tener un mismo límite; en particular:

$$\lim_{n\to\infty} f(z'_n) = \lim_{n\to\infty} f(z''_n),$$

que es lo que afirmábamos.

Designando con A el valor común del límite de las sucesiones $\{f(z_n)\}$, para todas las sucesiones posibles $\{z_n\}$ convergentes hacia z_0 (y compuestas de puntos z_n pertenecientes a E y distintos de z_0), escribiremos simplemente:

$$\lim_{z\to z_0,\ z\in E} f(z) = A \tag{3.6:1}$$

y diremos que A e s e l l í m i t e d e $f(z)$ en el punto z_0 (respecto al conjunto E).

Demostremos que la condición (3.6:1) es equivalente a lo siguiente:

Para $f(z)$, z_0 y cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$, tal, que de $z \in E$, $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ y $z \neq z_0$ se deduce que

$$|f(z) - A| < \varepsilon \tag{3.6:2}$$

Supongamos que se cumple la condición (3.6:2). Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ y para una sucesión de puntos z_n pertenecientes a E y distintos de z_0 que converge hacia z_0, se tiene:

$$|z_n - z_0| < \delta(\varepsilon)$$

para $n' > N[\delta(\varepsilon)] = N'(\varepsilon)$. Por lo tanto, también se cumplen las desigualdades

$$|f(z_n) - A| < \varepsilon$$

para $n > N'(\varepsilon)$, lo cual significa que la sucesión $\{f(z_n)\}$ es convergente y que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Como esta conclusión es válida para cualquier sucesión de puntos $\{z_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, $z_n \in E$ y $z_n \neq z_0$, se tiene $\lim\limits_{z\to z_0,\, z\in E} f(z) = A$. Así, pues, de la condición (3.6 : 2) se deduce (3.6 : 1).

Supongamos ahora cumplida la condición (3.6 : 1) y que no se cumple la condición (3.6 : 2). Entonces, para cierto $\varepsilon > 0$ no existirá un valor $\delta > 0$ tal, que de $z \in E$, $|z - z_0| < \delta$ y $z \neq z_0$ se deduzca la desigualdad $|f(z) - A| < \varepsilon$. Tomando $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, obtenemos que en cada entorno $|z - z_0| < \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ existe un punto $z_n \in E$, $z_n \neq z_0$, tal que $|f(z_n) - A| \geqslant \varepsilon$. Es evidente que la sucesión $\{z_n\}$ converge hacia z_0 y, por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$. Pero esto contradice a la desigualdad $|f(z_n) - A| \geqslant \varepsilon > 0$, con lo que se termina la demostración de la equivalencia de las condiciones (3.6 : 1) y (3.6 : 2).

La definición introducida de límite de una función en un punto abarca como casos particulares las definiciones conocidas en el análisis de límite de las funciones de una o dos variables reales, que toman valores reales. En efecto, si, por ejemplo, $f(z) = u(x, y)$ es una función real de dos variables reales x e y $(z = x + iy)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ y A es un número real que representa el límite de la función $f(z)$ en el punto z_0:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A,$$

entonces, según lo anterior, esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal, que

$$|f(z) - A| = |u(x, y) - A| < \varepsilon \text{ para } 0 < |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta(\varepsilon).$$

Evidentemente, las desigualdades obtenidas coinciden con aquellas, mediante las cuales se introduce el concepto de límite en el curso de análisis.

Volviendo a examinar el caso general de una función que toma valores complejos

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

demostremos que la relación

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A, \qquad (3.6:1)$$

donde $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $A = a + ib$, es equivalente a dos relaciones en las que figuran solamente las funciones reales

$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ y $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$:

$$\lim_{x \to x_0,\, y \to y_0} u(x, y) = a, \qquad \lim_{x \to x_0,\, y \to y_0} v(x, y) = b. \tag{3.6:3}$$

En efecto, supongamos que se cumple (3.6:1). Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal, que

$$|f(z) - A| < \varepsilon \text{ para } |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta(\varepsilon).$$

Pero

$$|u(x, y) - a| = |\operatorname{Re}[f(z) - A]| \leqslant |f(z) - A| < \varepsilon$$

y

$$|v(x, y) - b| = |\operatorname{Im}[f(z) - A]| \leqslant |f(z) - A| < \varepsilon,$$

de donde, debido a que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deducen las igualdades (3.6 : 3).

Recíprocamente: si se cumplen las últimas relaciones, entonces para cualquier $\varepsilon < 0$, se tiene:

$$|u(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ y } |v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

si es que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |z - z_0| < \delta'(\varepsilon).$$

Por lo tanto, en las mismas condiciones,

$$|f(z) - A| = \sqrt{(u - a)^2 + (v - b)^2} < \varepsilon,$$

de donde se deduce (3.6:1).

De la equivalencia demostrada de (3.6 : 1) y (3.6 : 3) se deduce que las proposiciones elementales referentes a los límites de las funciones, conocidas en el curso de análisis, son válidas sin alteración alguna para el caso de funciones de variable compleja. Precisando, si existen los límites

$$\lim_{z \to z_0,\, z \in E} f(z) = A \text{ y } \lim_{z \to z_0,\, z \in E} \varphi(z) = B,$$

entonces, también existen los límites

$$\lim_{z \to z_0,\, z \in E} (f(z) \pm \varphi(z)) = A \pm B, \quad \lim_{z \to z_0,\, z \in E} [f(z) \cdot \varphi(z)] = A \cdot B$$

y

$$\lim_{z \to z_0,\, z \in E} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{A}{B}$$

(lo último, suponiendo que $B \neq 0$).

3.7. Examinemos ahora el concepto de continuidad de una función de variable compleja. Si el punto de acumulación z_0 de un

conjunto infinito E pertenece al conjunto mismo y para una función $f(z)$, definida en E, se tiene:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), \tag{3.7:1}$$

la función $f(z)$ se llama continua en el punto z_0. Una función que es continua en cada punto del conjunto E, se llama continua en este conjunto. Como, en el caso particular de las funciones que toman valores reales, el concepto de límite en un punto coincide con el conocido en el análisis, la definición de continuidad que acabamos de introducir coincide, en el mismo caso particular, con la que se conoce por el análisis. Hagamos, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Entonces, según lo expuesto en el apartado anterior, se puede sustituir la relación (3.7:1) por dos equivalentes a ésta:

$$\lim_{x \to x_0,\, y \to y_0} u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

y

$$\lim_{x \to x_0,\, y \to y_0} v(x, y) = v(x_0, y_0). \tag{3.7:2}$$

De aquí se deduce que una función compleja $f(z)$ es continua en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ si, y sólo si, las partes real e imaginaria de $f(z)$, consideradas como funciones de dos variables reales x e y, son continuas en el punto (x_0, y_0).

Señalemos las propiedades elementales de las funciones continuas de variable compleja que se deducen de la definición.

Si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son continuas en el punto z_0, las funciones $f(z) \pm \pm \varphi(z)$, $f(z) \cdot \varphi(z)$ y $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ (ésta última, suponiendo que $\varphi(z) \neq 0$) también son continuas en el mismo punto.

Supongamos ahora que $f(z)$ es continua en el conjunto E en el punto z_0 y que sus valores $w = f(z)$ forman ellos mismos un conjunto infinito $\mathcal{E}$ para el cual $w_0 = f(z_0)$ es un punto de acumulación. Sea, finalmente, $\varphi(w)$ una función definida en $\mathcal{E}$ y continua en el punto w_0. Demostremos que entonces la función compuesta $\varphi[f(z)] = F(z)$ es también continua en el punto z_0. En efecto, si $\{z_n\}$ es una sucesión arbitraria de puntos de E, convergente hacia z_0, la sucesión de puntos $\{w_n = f(z_n)\}$, en virtud de la continuidad de $f(z)$, tiene que converger hacia el límite $w_0 = f(z_0)$. Debido a esto, la sucesión $\{\varphi(w_n) = \varphi[f(z_n)] = F(z_n)\}$, en virtud de la continuidad de $\varphi(w)$, tiene que converger hacia $\varphi(w_0) = F(z_0)$. Así, pues, $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in E} F(z) = F(z_0)$, con lo que queda demostrada nuestra afirmación.

Como consecuencia de la relación que hemos establecido entre la continuidad de una función compleja $f(z)$ y la continuidad de las funciones reales $u(x, y) = \text{Re}[f(z)]$ y $v(x, y) = \text{Im}[f(z)]$, para las funciones complejas continuas también son válidas las demás propiedades de las funciones reales continuas.

Antes de ocuparnos de éstas, introduzcamos el concepto de conjunto cerrado.

Un conjunto F se llama c e r r a d o, si contiene todos sus puntos de acumulación.

Los conjuntos que carecen de puntos de acumulación (por ejemplo, los conjuntos finitos, el conjunto vacío o el conjunto de los números naturales 1, 2, 3, . . ., n, . . ., etc.), también se consideran conjuntos cerrados. Para obtener una definición que abarque explícitamente a estos casos particulares, es conveniente enunciarla en forma negativa.

Un conjunto F se llama c e r r a d o, si un punto no perteneciente a F no puede ser punto de acumulación para F.

He aquí otros ejemplos de conjuntos cerrados: el conjunto de todos los puntos del plano, el conjunto de todos los puntos de una recta o de una circunferencia, el conjunto de puntos pertenecientes a un segmento arbitrario de la recta, etc. Para el primer ejemplo (el plano), esto es evidente; en los demás, la prueba es inmediata, puesto que para un punto z no perteneciente a uno cualquiera de estos conjuntos F, se puede trazar un entorno que no contenga ningún punto de F. Por consiguiente, tal punto z no puede ser para F un punto de acumulación, y F es cerrado.

Examinemos una función $f(z)$ que sea continua en un conjunto acotado y cerrado F. Esta posee las siguientes propiedades:

1) P r o p i e d a d d e c o n t i n u i d a d u n i f o r m e. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta(\varepsilon) > 0$, *tal, que la desigualdad* $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ *se cumple para cualquier par de puntos* z' y z'' *que cumplen la condición* $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$.

Lo nuevo que hay aquí, en comparación con la propiedad de continuidad de una función en un punto determinado z_0, es que $\delta(\varepsilon)$ no depende de cómo se hayan elegido los puntos en el conjunto F.

2) A c o t a c i ó n d e l m ó d u l o d e l a f u n c i ó n. *Existe un número real positivo M tal, que en todos los puntos del conjunto F se cumple la desigualdad*

$$|f(z)| \leqslant M.$$

3) A l c a n z a m i e n t o d e l e x t r e m o s u p e r i o r (e i n f e r i o r) d e l m ó d u l o. *En el conjunto F existe al menos un punto* Z_0 (z_0) *tal, que en todos los puntos de F se cumple la desigualdad* $|f(z)| \leqslant |f(Z_0)|$ $(|f(z)| \geqslant |f(z_0)|)$.

Las propiedades análogas para las funciones continuas que toman valores reales se demuestran ordinariamente en los cursos de análisis; demostremos que éstas se generalizan inmediatamente al caso de funciones complejas. En efecto, sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Si $f(z)$ es continua en todos los puntos del conjunto acotado y cerrado F, también lo serán las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en todos sus puntos (considerando a éstas como funciones reales de dos variables reales). Por lo tanto, éstas también serán uniformemente continuas en este conjunto, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal, que para cualquier par de puntos (x', y') y (x'', y'') que cumplan

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2} < \delta(\varepsilon)$$

se verifican las desigualdades

$$|u(x', y') - u(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ y } |v(x', y') - v(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Pero entonces, también

$$|f(z') - f(z'')| = \sqrt{|u(x', y') - u(x'', y'')|^2 + |v(x', y') - v(x'', y'')|^2} < \varepsilon$$

para $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$ $(z' = x' + iy',\ z'' = x'' + iy'')$, es decir, también es válida la propiedad de continuidad uniforme en el caso de una función compleja.

Para obtener las otras dos propiedades es suficiente observar que el módulo de una función continua también es una función continua. Esto se deduce inmediatamente de la desigualdad

$$||f(z)| - |f(z_0)|| \leqslant |f(z) - f(z_0)|.$$

3.8. Sea Φ algún conjunto no vacío de puntos del plano, acotado y cerrado, y sea z un punto arbitrario del plano. Llamemos d i s t a n c i a $\rho(z, \Phi)$ del punto z al conjunto Φ al extremo inferior de las distancias desde z hasta los distintos puntos pertenecientes a Φ. Como $z - \zeta$ $(\zeta \in \Phi)$ es una función continua de ζ, definida en Φ, también $|z - \zeta|$ será una función continua de ζ en Φ y, por consiguiente, alcanzará su extremo inferior $\rho(z, \Phi)$ en cierto punto $\zeta_0 \in \Phi$: $\rho(z, \Phi) = |z - \zeta_0|$.

Así, pues, la distancia del punto z hasta el conjunto Φ coincide con la distancia del punto z hasta cierto punto del conjunto Φ. Por consiguiente, $\rho(z, \Phi)$ se anula solamente para los puntos que pertenecen a Φ; si z no pertenece a Φ, se tiene: $\rho(z, \Phi) > 0$.

Demostremos que, considerando a $\rho(z, \Phi)$ como función de z, definida en todo el plano, resulta una función continua. En efecto, sea $\rho(z, \Phi) = |z - \zeta_0|$, $\zeta_0 \in \Phi$. Entonces,

$$|z' - \zeta_0| = |(z' - z) + (z - \zeta_0)| \leqslant |z' - z| + |z - \zeta_0| = \rho(z, \Phi) + |z' - z|,$$

y, por consiguiente,

$$\rho(z', \Phi) \leqslant |z' - \zeta_0| \leqslant \rho(z, \Phi) + |z' - z|,$$

de donde

$$\rho(z', \Phi) - \rho(z, \Phi) \leqslant |z' - z|.$$

Cambiando de lugar en estos razonamientos z' por z, hallaremos

$$\rho(z, \Phi) - \rho(z', \Phi) \leqslant |z - z'|.$$

Por lo tanto

$$|\rho(z, \Phi) - \rho(z', \Phi) \leqslant |z - z'|,$$

y es suficiente tomar $|z - z'| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ para tener también

$$|\rho(z, \Phi) - \rho(z', \Phi)| < \varepsilon.$$

De la continuidad demostrada de la función $\rho(z, \Phi)$ se deduce, en particular, que si z pertenece a algún conjunto de puntos F, acotado y cerrado, la función $\rho(z, \Phi)$ también será continua sobre el mismo y, por consiguiente, alcanzará en cierto punto $z_0 \in F$ su extremo inferior

$$\inf_{z \in F} \rho(z, \Phi) = \rho(z_0, \Phi).$$

Este último posee la propiedad de que para cualquier par de puntos $z \in F$ y $\zeta \in \Phi$ se tiene:

$$|z - \zeta| \geqslant \rho(z, \Phi) \geqslant \rho(z_0, \Phi).$$

Por otra parte, en virtud de las propiedades que ya conocemos de la distancia $\rho(z_0, \Phi)$, existe un punto $\zeta_0 \in \Phi$ tal, que

$$\rho(z_0, \Phi) = |z_0 - \zeta_0|.$$

El número hallado es, evidentemente, el extremo inferior de las distancias entre los pares de puntos pertenecientes a los conjuntos F y Φ, respectivamente. A la vez, nos hemos convencido de que este extremo inferior es alcanzado por cierto par de puntos $z_0 \in F$ y $\zeta_0 \in \Phi$. Este número se llama distancia entre los dos conjuntos F y Φ, y se designa mediante $\rho(F, \Phi)$:

$$\rho(F, \Phi) = \inf_{z \in F,\, \zeta \in \Phi} |z - \zeta| = \inf_{z \in F} \rho(z, \Phi).$$

En esta definición los conjuntos F y Φ desempeñan exactamente un mismo papel. Por esto, podríamos cambiarlos de sitio (en la expresión):

$$\rho(F, \Phi) = \rho(\Phi, F) = \inf_{\zeta \in \Phi} \rho(\zeta, F).$$

Está claro que el concepto de distancia de un punto hasta un conjunto es un caso particular del concepto de distancia entre dos conjuntos F y Φ (cuando F consta de un solo punto z).

Como la distancia entre dos conjuntos acotados y cerrados F y Φ es al mismo tiempo la distancia entre los puntos de cierto par $z_0 \in F$ y $\zeta_0 \in \Phi$:

$$\rho(F, \Phi) = |z_0 - \zeta_0|,$$

la magnitud $\rho(F, \Phi)$ se anula cuando, y sólo cuando, los conjuntos F y Φ tienen al menos un punto común. En particular, si F y Φ no tienen puntos comunes, se tiene: $\rho(F, \Phi) > 0$.

Fácilmente se observa que, cuando F o Φ no son cerrados, o bien, son cerrados pero no son acotados, el extremo inferior de las distancias entre los pares de puntos pertenecientes a F y Φ, respectivamente, puede ser igual a cero incluso cuando estos conjuntos carecen de puntos comunes. Como ejemplo es suficiente tomar por F el conjunto de los puntos de acumulación del conjunto Φ no pertenecientes a Φ (si Φ no es cerrado), o tomar por F el conjunto de todos los puntos situados en las asíntotas de una hipérbola, y por Φ, el conjunto de puntos de la hipérbola misma.

No obstante, el lector demostrará sin dificultad alguna que, si F y Φ son conjuntos cerrados no vacíos y solamente uno de ellos no es acotado, existe de nuevo un par de puntos $z_0 \in F$ y $\zeta_0 \in \Phi$ tal, que la distancia entre z_0 y ζ_0 coincide con el extremo inferior de las distancias entre todos los pares posibles de puntos $z \in F$ y $\zeta \in \Phi$. Por consiguiente, en este caso, el extremo inferior de las distancias entre $z \in F$ y $\zeta \in \Phi$ también será distinto de cero, siempre que F y Φ no tengan puntos comunes.

§ 4. CONEXIVIDAD DE LOS CONJUNTOS. CURVAS Y RECINTOS

4.1. Un conjunto E se llama c o n e x o si en cualquier división del mismo en dos subconjuntos no vacíos disjuntos (sin puntos comunes) E_1 y E_2, al menos uno de estos conjuntos contiene un punto de acumulación del otro conjunto.

El conjunto vacío y el conjunto que consta de un solo punto también se consideran conexos. Esto tiene su justificación, si se expresa la definición de conexividad en la siguiente forma negativa: un conjunto E se llama c o n e x o, si no existe una división del mismo en dos conjuntos no vacíos disjuntos E_1 y E_2, ninguno de los cuales contiene puntos de acumulación del otro.

Puede servir de ejemplo de conjunto desconexo cualquier conjunto finito que conste de más de un punto, o más generalmente, el

conjunto formado por los puntos de un número finito de conjuntos cerrados F_1, F_2, . . ., F_n, sin puntos comunes dos a dos.

Forman una clase de conjuntos cerrados y conexos de suma importancia los conjuntos de puntos pertenecientes a las curvas continuas.

Con respecto a cada función compleja $z = f(t)$ de la variable real t, definida y continua en cierto segmento $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ (es decir, los pares de funciones reales continuas $x = x(t)$, $y = y(t)$), se dice que ésta define o determina una curva (una línea) continua en el plano z. En este caso, los valores de la función se llaman puntos de la curva; el conjunto de todos los valores de la función se llama conjunto de puntos de la curva (frecuentemente, para abreviar, se dice simplemente curva).

En particular, los puntos $z_0 = f(\alpha)$ y $Z = f(\beta)$ se denominan punto inicial y punto final de la curva. Estos pueden coincidir, en cuyo caso se dice que la curva es cerrada.

Ordinariamente, la variable real t se llama parámetro y la igualdad $z = f(t)$, que liga los valores del parámetro con los puntos de la curva, se llama ecuación paramétrica de la curva o, simplemente, ecuación de la curva.

Dos curvas L y Λ, determinadas por las funciones $z = f(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ y $z = \varphi(\tau)$ $(\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta)$, se consideran idénticas, si la ecuación de una de ellas se puede transformar en la ecuación de la otra mediante una sustitución continua y estrictamente monótona del parámetro, es decir, si existe una función continua y estrictamente monótona $\tau = \lambda(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ tal, que la función $z = \varphi[\lambda(t)]$ coincide con la función $z = f(t)$ en el segmento $[a, b]$ *).

Además, cuando la función $\tau = \lambda(t)$ que realiza la sustitución de una representación paramétrica por la otra es creciente, se dice que en ambas curvas está determinada una dirección (o un sentido) igual; si es decreciente, se dice que las direcciones son contrarias. En el último caso, el punto inicial de L sirve de punto final para Λ y viceversa. La curva Λ, que solamente se diferencia de L en el sentido del recorrido, la designaremos a veces mediante L_-. Como las notaciones L y Λ son equitativas, se puede también designar L mediante Λ_-.

Un mismo punto z que corresponde a distintos valores del parámetro, entre los cuales al menos uno es distinto de sus valores extremos, se llama punto múltiple de la curva. La curva que carece de puntos múltiples se llama curva de Jordan.

Ilustremos con ejemplos todas estas definiciones.

---

*) Entonces, naturalmente, también $f[\lambda^{-1}(\tau)]$ coincide con $\varphi(\tau)$ en el segmento $[\alpha, \beta]$. Aquí $\lambda^{-1}(\tau)$ es la función inversa con respecto a $\lambda(t)$.

1) Las funciones $z = t$, $z = t^2$, $z = 1 - t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ determinan una misma curva continua, representada por el segmento del eje real comprendido entre los puntos $z = 0$ y $z = 1$. A la primera y segunda expresiones corresponde una misma dirección (o un mismo sentido) en la curva (el punto inicial está situado en el cero y el punto final en la unidad); a la tercera expresión, la dirección contraria (el punto inicial está situado en la unidad y el punto final en el cero). Es obvio que esta curva no tiene puntos múltiples y, por consiguiente, es de Jordan. Como sus puntos inicial y final no coinciden, ésta es una curva de Jordan no cerrada.

2) Las funciones $z = t$ y $z = \operatorname{sen} \pi t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ determinan curvas continuas distintas L y Λ, puesto que no existe una transformación monótona del parámetro que transforme una de ellas en la otra. En efecto, una transformación tal tendría que transformar la función monótona $f(t) = t$ de nuevo en una función monótona, mientras que la función $\varphi(t) = \operatorname{sen} \pi t$ no es monótona en el segmento $[0, 1]$.

Obsérvese que los conjuntos de puntos de las curvas $z = t$ y $z = \operatorname{sen} \pi t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ coinciden con el conjunto de puntos del segmento $[0, 1]$, a pesar de que ambas curvas son distintas. Por consiguiente, la coincidencia de los conjuntos de puntos de dos curvas continuas, siendo condición necesaria para la identidad de estas curvas, no es, sin embargo, condición suficiente.

Obsérvese también que, en este ejemplo, la curva $z = t$ es de Jordan y no es cerrada. No obstante, la curva $z = \operatorname{sen} \pi t$ tiene puntos múltiples $\left(\operatorname{sen} \pi t = \operatorname{sen} \pi (1 - t),\ 0 < t < \frac{1}{2}\right)$ y, por consiguiente, no es de Jordan. Además, esta última es cerrada, puesto que su punto final coincide con el inicial $(\operatorname{sen} (\pi \cdot 0) = \operatorname{sen} (\pi \cdot 1) = 0)$.

3) Sea $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ un sistema de segmentos rectilíneos, orientados de un modo determinado y situados en el plano de tal manera que el extremo del segmento precedente Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, n - 1)$ coincide con el origen del siguiente Δ_{j+1}. Designando mediante a_j el número complejo representado por el vector Δ_j y mediante z_0 el punto inicial del segmento Δ_1, podemos obtener en el segmento $0 \leqslant t \leqslant n$ una función continua elemental que determina la curva representada por el sistema de los segmentos dados:

$$z = z_0 + a_1 + \ldots + a_{j-1} + a_j (t - j + 1)$$
$$(j - 1 \leqslant t \leqslant j,\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Esta curva se llama p o l i g o n a l, o q u e b r a d a, y los segmentos Δ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, l a d o s de la poligonal. La poligonal puede ser cerrada o no, según que el extremo del segmento Δ_n coincida con el origen del segmento Δ_1 o no. Esta será una curva de Jordan solamente cuando no haya intersecciones consigo mismo,

de modo que dos lados distintos no pueden tener más de un punto común; además, este punto común sólo puede ser el extremo del lado anterior y el origen del siguiente, y cuando la curva poligonal es cerrada, también puede ser el extremo del último lado y el origen del primero.

4) Fácilmente se observa que la circunferencia con centro en el punto z_0 de radio r:

$$z = z_0 + r(\cos t + i \operatorname{sen} t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

es una curva cerrada de Jordan.

Un conjunto no vacío, acotado, cerrado y conexo se llama c o n t i n u o*); demostremos que el conjunto de puntos de cualquier curva continua es un continuo.

En efecto, sea L una curva continua, definida por la ecuación $z = f(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, y sea ζ un punto de acumulación del conjunto de puntos de la curva. Entonces, según el apartado 3.5, existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos distintos de la curva L que converge hacia ζ. Hagamos $z_n = f(t_n)$; entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = \zeta$. Extraigamos luego de la sucesión infinita de puntos $\{t_n\}$, pertenecientes al conjunto acotado $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, una sucesión parcial convergente $\{t_{n_k}\}$ (ap. 3.2). Entonces, tendremos: $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0$, donde t_0, evidentemente, pertenece al segmento $[\alpha, \beta]$. Por consiguiente, como $f(t)$ es continua, se tiene: $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = f(t_0)$. Por otra parte, $\{f(t_{n_k})\}$, siendo una sucesión parcial contenida en la sucesión $\{f(t_n)\}$, tiene que tener el mismo límite ζ: $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = \zeta$. Por lo tanto, $\zeta = f(t)$, o sea, ζ pertenece a la curva L. Queda demostrado que el conjunto de puntos de una curva continua es cerrado. Demostremos ahora que este conjunto es conexo. Suponiendo lo contrario, tendremos una división de L en dos conjuntos no vacíos L_1 y L_2, sin puntos comunes, tales que ninguno de éstos contiene puntos de acumulación del otro. Respectivamente, el segmento $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ se dividirá en dos conjuntos no vacíos E_1 y E_2, sin puntos comunes: uno de ellos estará formado por aquellos valores del parámetro t a los cuales corresponden los puntos de L_1, y el otro, por aquellos valores de t a los cuales corresponden los puntos de L_2. Cerciorémonos de que ninguno de los conjuntos E_1, E_2 puede contener puntos de acumulación del otro. En efecto, si, por ejemplo, el punto $t' \in E_1$ fuese para E_2 un punto de acumulación, entonces en E_2 se podría hallar una sucesión de puntos $\{t_n''\}$ que convergería hacia t' (ap. 3.5). Como $f(t)$ es una función continua, de aquí resultaría que $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n'') =$

*) Según esta definición, cada punto es un continuo.

$= f(t')$, es decir, el punto $f(t') \in L_1$ sería un punto de acumulación para L_2*), lo cual contradice a la hipótesis relativa a L_1 y L_2.

Así, pues, la suposición de que la curva L es desconexa implica la suposición análoga relativa al segmento de la recta $[\alpha, \beta]$; no queda más que refutar este último. Obsérvese con este fin que E_1 y E_2 son conjuntos cerrados. En efecto, cada punto de acumulación de E_1 pertenece al segmento $[\alpha, \beta]$, y como dicho punto no puede pertenecer a E_2 tiene que pertenecer por lo tanto a E_1. Por consiguiente, E_1 es cerrado. Del mismo modo, E_2 también es cerrado. Como E_1 y E_2 son conjuntos cerrados no vacíos sin puntos comunes, la distancia entre ellos $\rho(E_1, E_2)$ es distinta de cero.

Dividamos el segmento $[\alpha, \beta]$ en segmentos iguales de longitud $\delta < \rho(E_1, E_2)$: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, de modo que el punto final de cada uno de ellos sea el punto inicial del siguiente. Evidentemente, cualquiera de estos segmentos δ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ pertenece enteramente a uno de los conjuntos E_1 o E_2; en caso contrario llegaríamos a la conclusión absurda de que la distancia entre E_1 y E_2 no superaría a δ, o sea, sería menor que $\rho(E_1, E_2)$. Supongamos, por ejemplo, que δ_1 pertenece a E_1. Entonces, también el punto inicial del segmento δ_2 (que coincide con el punto final del segmento δ_1) y, por consiguiente, todo el segmento δ_2 pertenece a E_1. Si se ha establecido que δ_k pertenece a E_1 $(k < n)$, entonces el punto inicial del segmento δ_{k+1}, que coincide con el punto final del segmento δ_k, también pertenece a E_1 y, por consiguiente, todo el segmento δ_{k+1} pertenecerá a E_1. Por lo tanto, todos los segmentos δ_j $(j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ tienen que pertenecer solamente a uno de los conjuntos E_1 o E_2, de modo que el otro resultará vacío, lo cual contradice a la hipótesis. Con esto, queda terminada la demostración.

Ahora podemos demostrar que, en general, *es conexo todo conjunto E para el cual dos puntos cualesquiera del mismo z' y z'' pueden unirse mediante una curva continua L* (es decir, que se puede construir una curva para la cual uno de los puntos z', z'' es el punto inicial, y el otro, el punto final), *cuyos puntos pertenecen a E*. (Obsérvese que, sin embargo, la condición suficiente de conexión comprendida aquí no es necesaria).

En efecto, supongamos que el conjunto E se ha dividido de algún modo en dos subconjuntos no vacíos E_1 y E_2 que carecen de puntos comunes. Sea z' un punto fijo de E_1 y z'', de E_2. Unamos z' y z'' mediante una curva continua L cuyos puntos todos pertenezcan a E, y sean L_1 y L_2 los subconjuntos del conjunto de los puntos de

---

*) En el caso considerado, $f(t')$, siendo un punto de acumulación de la sucesión $\{f(t_n'')\}$, será también un punto de acumulación para el conjunto que representa los términos de esta sucesión, puesto que ninguno de los puntos $f(t_n'')$ coincide con $f(t')$ (L_1 y L_2 no tienen puntos comunes).

la curva L formados por todos los puntos de L que pertenecen a E_1 o a E_2, respectivamente. Evidentemente, éstos son conjuntos no vacíos ($z' \in L_1$, $z'' \in L_2$) que no tienen puntos comunes. Como L es conexo, al menos uno de ellos, por ejemplo L_1, tiene que contener un punto de acumulación del otro. Sea z_1 este punto. Este pertenece a L_1 y, por consiguiente, a E_1. Además, es un punto de acumulación para L_2 y, por lo tanto, también es un punto de acumulación para $E_2 \supset L_2$.

Así, pues, resulta que cualquiera que sea la división del conjunto E en conjuntos no vacíos sin puntos comunes, al menos uno de ellos tiene que poseer un punto de acumulación del otro. Con esto queda demostrado que el conjunto E es conexo. Como dos puntos cualesquiera del plano pueden unirse, por ejemplo, mediante un segmento recto, de aquí se deduce, en particular, que el plano es un conjunto conexo.

Para un conjunto cerrado y acotado, la condición de conexividad puede expresarse del modo siguiente: *Un conjunto cerrado y acotado F es conexo, es decir, es un continuo, si para cualesquiera dos de sus puntos z_0 y z' y para cualquier $\varepsilon > 0$ es posible señalar un número finito de puntos de este conjunto*: $z_0, z_1, \ldots, z_n = z'$, tales que $|z_k - z_{k-1}| < \varepsilon$ $(k = 1, \ldots, n)$.

En efecto, supongamos que se cumple esta condición y que F no es conexo. Entonces F puede dividirse en dos subconjuntos no vacíos F_1 y F_2, sin puntos comunes, tales que ninguno de ellos contiene puntos de acumulación del otro. Como todos los puntos de acumulación del subconjunto F_j $(j = 1, 2)$ tienen que pertenecer a F, deducimos que éstos pertenecen a F_j, es decir, F_j es un conjunto cerrado. Así, pues, F_1 y F_2 son acotados, cerrados y carecen de puntos comunes. Por lo tanto, la distancia $\rho(F_1, F_2) > 0$; tomando un punto $z_0 \in F_1$ y un punto $z' \in F_2$ no podremos indicar, evidentemente, un número finito de puntos de F: $z_0, z_1, \ldots, z_n = z'$, tales que $|z_k - z_{k-1}| < \rho(F_1, F_2)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. En efecto, entre éstos tiene que haber dos puntos con subíndices consecutivos: z_{k-1} y z_k, el primero de los cuales pertenece a F_1 y el segundo a F_2, por lo cual $|z_k - z_{k-1}| \geqslant \rho(F_1, F_2)$. De esta contradicción se deduce la proposición enunciada.

Apliquemos este criterio de conexión para la demostración del siguiente teorema; *si $\{F_n\}$ es una sucesión de continuos tales que $F_{n+1} \subset F_n$, entonces su intersección F* (es decir, el conjunto de puntos comunes a todos los F_n) *es también un continuo.*

Consideremos una sucesión de puntos $\{z_n\}$, donde $z_n \in F_n$. En virtud de la condición $F_{n+1} \subset F_n$, los puntos $z_n, z_{n+1}, \ldots$ pertenecen a F_n; de aquí se deduce que todos los puntos de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ pertenecen a F_n $(n = 1, 2, \ldots)$, y por consiguiente, también a F. Pero el conjunto de los puntos de acumulación

de la sucesión $\{z_n\}$ no es vacío (puesto que la sucesión $\{z_n\}$ es acotada); por esto, F es un conjunto no vacío. Si éste carece de puntos de acumulación, entonces F es cerrado. Supongamos que existen puntos de acumulación de F y que z_0 es uno de ellos. Como $F \subset F_n$, el punto z_0 es para F_n un punto de acumulación y, por consiguiente, pertenece a F_n $(n = 1, 2, \ldots)$; por lo tanto, $z_0 \in F$. Así pues, F es un conjunto no vacío, cerrado (y, evidentemente, acotado).

Demostremos, finalmente, que F es un conjunto conexo. Suponiendo lo contrario, hallaremos que F puede dividirse en dos conjuntos no vacíos, acotados y cerrados F_0 y F', sin puntos comunes. Supongamos que $z_0 \in F_0$ y $z' \in F'$; como $z_0 \in F_n$ y $z' \in F_n$ para cualquier n, existen unos puntos $z_0, z_1, \ldots, z_\nu = z'$ del conjunto F_n tales que $|z_k - z_{k-1}| < \frac{1}{3}\rho(F_0, F') = \varepsilon$ $(k = 1, \ldots, \nu)$. Entre éstos tiene que haber al menos un punto z_k cuya distancia hasta F_0 y hasta F' y, por consiguiente, también hasta F, es superior a ε.

En efecto, si para cada punto $z_0, z_1, \ldots, z_\nu$, la distancia hasta uno de los conjuntos F_0 o F' no fuese superior a ε, entonces todos estos puntos podrían dividirse en dos clases no vacías de modo que, para los puntos de una de ellas, las distancias hasta F_0 no superarían a ε, y para la otra, las distancias hasta F' no superarían a ε. Evidentemente, la distancia entre dos puntos cualesquiera de clases distintas tiene que ser mayor que ε, puesto que $\varepsilon = \frac{1}{3}\rho(F_0, F')$. Pero, por otra parte, si $\mu < \nu$ es el subíndice superior de los puntos de la primera clase, entonces el punto de subíndice $\mu + 1$ tiene que pertenecer a la segunda clase, obteniendo para los puntos z_μ y $z_{\mu+1}$ de distintas clases la desigualdad:

$$|z_{\mu+1} - z_\mu| < \varepsilon.$$

De esta contradicción se deduce la existencia del punto pedido z_k. Este punto lo designaremos mediante ζ_n, para señalar su pertenencia al conjunto F_n.

Así, pues, $\zeta_n \in F_n$ y $\rho(\zeta_n, F) > \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Para cualquier punto de acumulación ζ_0 de la sucesión $\{\zeta_n\}$ tendremos que $\rho(\zeta_0, F) \geqslant \varepsilon$. Pero esto es imposible, puesto que todos los puntos de la sucesión $\{\zeta_n\}$ pertenecen a F. Así, pues, F tienen que ser un conjunto conexo. La demostración del teorema queda terminada.

4.2. Un conjunto O se llama a b i e r t o, si para cada uno de sus puntos existe un entorno cuyos puntos todos pertenecen a O. Son ejemplos de conjuntos abiertos: el conjunto de todos los puntos del plano, el conjunto de todos los puntos no pertenecientes a un con-

junto finito dado de rectas o circunferencias, el conjunto de todos los puntos situados en el interior de un círculo dado, etc. El conjunto vacío también se considera abierto.

Un conjunto abierto y conexo se llama r e c i n t o. En virtud de lo demostrado anteriormente, un conjunto abierto será conexo y, por consiguiente, será un recinto, si dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse mediante una curva continua perteneciente a O. Pero se verifica también lo recíproco: *dos puntos cualesquiera de un recinto arbitrario pueden unirse mediante una curva continua perteneciente al recinto.*

Demostraremos esta proposición por reducción a lo absurdo. Si fuese injusta, en cierto recinto G existirían dos puntos z' y z'' que no podrían unirse mediante una curva continua perteneciente al recinto. Designemos entonces mediante G_1 el conjunto de aquellos puntos de G que pueden unirse con z' mediante una curva continua perteneciente a G, y mediante G_2, el conjunto de todos los demás puntos. Como z' pertenece a G junto con cierto entorno suyo $|z - z'| < \rho$ (según la definición de conjunto abierto), todos los puntos de este entorno quedarán incluidos en G_1: éstos pueden unirse con z' mediante segmentos rectos. Por lo tanto, G_1 y G_2 son conjuntos no vacíos ($z'' \in G_2$) que no tienen puntos comunes. Supongamos que $z_1 \in G_1$; entonces existe una curva continua L_1 que une z' con z_1 y pertenece a G. Si $|z - z_1| < \rho_1$ es un entorno del punto z_1, perteneciente a G, entonces cualquier punto z de este entorno puede unirse con z_1 mediante un segmento recto Δ_1, también perteneciente a G. Por consiguiente, tal punto se une con z' mediante una curva continua $L_1 + \Delta_1$ perteneciente a G; así, pues, $z \in G_1$, es decir, el entorno $|z - z_1| < \rho_1$ del punto z_1 pertenece totalmente a G_1. Vemos que el punto z_1 no puede ser de acumulación para el conjunto G_2.

Supongamos, finalmente, que $z_2 \in G_2$; entonces tomamos de nuevo un entorno $|z - z_2| < \rho_2$ del punto z_2, perteneciente a G. Si algún punto z de este entorno perteneciese a G_1, entonces este punto podría unirse con el punto z' mediante una curva continua L_2, perteneciente a G; pero z puede unirse con z_2 mediante un segmento recto Δ_2, también perteneciente al recinto G. Por consiguiente, el punto z_2 se uniría con el punto z' mediante una curva continua $L_2 + \Delta_2$, perteneciente a G, por lo cual pertenecería a G_1 en contra de la hipótesis ($z_2 \in G_2$). Así, pues, ningún punto del entorno $|z - z_2| < \rho_2$ puede pertenecer al conjunto G_1. Por lo tanto, ningún punto del conjunto G_2 puede ser de acumulación para G_1. Vemos que el conjunto G se divide en dos conjuntos no vacíos G_1 y G_2 sin puntos comunes, ninguno de los cuales contiene puntos de acumulación del otro. Pero esto contradice a la condición de conexividad del conjunto G. La demostración queda terminada.

De lo expuesto se deduce que la definición de recinto puede enunciarse del modo siguiente:

Un conjunto abierto O se denomina recinto, si dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse mediante una curva continua L cuyos puntos todos pertenecen a O.

Sea O un conjunto abierto arbitrario y z_0, alguno de sus puntos. Consideremos el conjunto de t o d o s los puntos de O que pueden unirse con z_0 mediante curvas continuas, pertenecientes a O. Evidentemente, este conjunto no es vacío (pertenece al mismo el punto z_0 junto con su entorno, perteneciente a O), es abierto (si z_1 puede unirse con z_0 mediante una curva continua γ, entonces cualquier punto z del entorno del punto z_1, perteneciente a O, puede unirse con z_0 mediante una curva continua, constituida por γ y por el segmento rectilíneo con los extremos z_1 y z_2) y, según la definición misma, es conexo. Por lo tanto, el conjunto indicado es un recinto. Este recinto se llama c o m p o n e n t e c o n e x a de O (que contiene al punto z_0).

Se puede caracterizar también la componente conexa de O como el recinto mayor, perteneciente a O y que contiene al punto dado z_0. Es evidente que dos componentes de O que tengan un punto común tienen que coincidir totalmente. Si O no es un recinto, es decir, si O es desconexo, entonces existen al menos dos componentes de O distintas. El conjunto de componentes de O puede ser infinito (figurémonos, por ejemplo, el conjunto O formado por los círculos de radio $\leqslant \frac{1}{2}$, con centros en los puntos $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; en este caso, los círculos por separado son componentes de O). En todo caso, este conjunto tiene que ser a lo sumo numerable. En efecto, tomemos un punto en cada componente de O, de coordenadas racionales x e y. Entonces, obtenemos una aplicación biyectiva del conjunto de todas las componentes sobre cierto subconjunto de un conjunto numerable, de donde se deduce lo que se afirmaba.

Respecto de cualquier conjunto abierto y, en particular, de un recinto O, todos los puntos del plano se dividen en las siguientes tres categorías:

1) puntos pertenecientes a O; éstos se llaman p u n t o s i n t e r i o r e s a O;

2) puntos no pertenecientes a O que son para O puntos de acumulación; éstos se llaman p u n t o s f r o n t e r a de O;

3) puntos no pertenecientes a O que no son para O puntos de acumulación; éstos se llaman p u n t o s e x t e r i o r e s a O.

El conjunto de los puntos interiores coincide con O y, por consiguiente, no es vacío, siempre que O no sea vacío. El conjunto de los puntos frontera — denominado frontera del conjunto abierto (del recinto) — será vacío cuando O sea todo el plano. Si el conjunto O

es distinto de todo el plano, entonces tiene que existir un conjunto de puntos no vacío E, no pertenecientes a O. Este conjunto puede constar solamente de puntos frontera y de puntos exteriores. Si no hay puntos exteriores, entonces E consta de puntos frontera, los cuales tiene que haber, por lo tanto, no menos de uno. Si para E hay puntos exteriores, tiene que haber, evidentemente, un conjunto infinito de éstos (puesto que para un punto exterior existe un entorno cuyos puntos son también todos exteriores). Cerciorémonos que, entonces, el conjunto de puntos frontera también tiene que ser infinito. Precisando, demostremos que en cualquier segmento rectilíneo, uno de cuyos extremos es un punto interior y el otro, exterior a O, tiene que haber al menos un punto frontera. En caso contrario, todo el segmento quedaría dividido en dos conjuntos no vacíos E_1 y E_2 de puntos interiores y exteriores a O. Pero ningún punto del conjunto E_1 (punto interior a O) puede ser punto de acumulación del conjunto E_2 (conjunto de puntos exteriores a O), del mismo modo que ningún punto del conjunto E_2 puede ser punto de acumulación de E_1. Esto contradice a la propiedad de conexión del segmento, de donde se deduce que el segmento, además de puntos interiores y exteriores, tiene que contener también puntos frontera de O (al menos uno). De lo expuesto se deduce que, si el conjunto abierto O no es todo el plano, el conjunto de sus puntos frontera no puede ser vacío. No obstante, en este caso también puede no haber puntos de tercera categoría: puntos exteriores. En efecto, cada punto exterior se caracteriza, evidentemente, en que existe un entorno del mismo, ninguno de cuyos puntos pertenecen al conjunto dado O. Por consiguiente, si el conjunto de puntos no pertenecientes a O no contiene ningún círculo, entonces no puede contener tampoco ningún punto exterior a O, es decir, todo el conjunto consta de puntos frontera. Esto ocurre, por ejemplo, cuando O está formado por todos los puntos no pertenecientes a una recta (o a una circunferencia). Esta última es la frontera de O; en este caso no hay puntos exteriores.

4.3. Demostremos que la frontera Γ de cualquier conjunto abierto O es un conjunto cerrado. Para esto es suficiente demostrar que un punto z_0 no perteneciente a Γ, no puede ser para Γ un punto de acumulación. En efecto, tal punto tendría que ser interior o exterior a O. En ambos casos, existe un entorno de z_0 que no contiene ningún punto de Γ. Por consiguiente, z_0 no puede ser para Γ un punto de acumulación, lo que muestra que el conjunto Γ es cerrado.

Agregando a un conjunto abierto O todos sus puntos frontera, obtenemos un conjunto $\overline{O}$, denominado *clausura* del conjunto O. Demostremos que $\overline{O}$ es un conjunto cerrado. Para esto es suficiente demostrar que ningún punto z_0 no perteneciente a $\overline{O}$, puede

ser un punto de acumulación para $\overline{O}$. En efecto, tal punto solamente puede ser exterior a O. Por lo tanto, existe un entorno del punto z_0 que no contiene ningún punto de O, y que, por consiguiente, tampoco contiene puntos frontera de O. En el entorno indicado no habrá ningún punto de $\overline{O}$, de donde se deduce que z_0 no es para $\overline{O}$ un punto de acumulación. De aquí que $\overline{O}$ es un conjunto cerrado.

Cuando O es un recinto, la clausura del conjunto O se llama recinto cerrado (o dominio). Por ejemplo, el conjunto de todos los puntos situados en el interior de una circunferencia y en ella misma forma un círculo cerrado; el círculo cerrado se distingue del círculo abierto, pues este último es el reciento formado por todos los puntos que están situados en el interior de la circunferencia.

Sea G un recinto acotado, es decir, un recinto cuyos puntos están contenidos todos en cierto círculo con centro en el origen de coordenadas $|z| < R$. Entonces todos los puntos que están situados fuera de este círculo también serán exteriores con respecto a G De aquí se deduce que los puntos frontera del recinto G tienen que satisfacer a la condición $|z| \leqslant R$, de modo que la frontera Γ de un recinto acotado G es un conjunto cerrado y acotado.

Llamaremos a un recinto acotado G simplemente conexo o múltiplemente conexo, según que su frontera sea un conjunto conexo o desconexo. Un ejemplo simple de recinto simplemente conexo es el interior de un círculo, y un ejemplo de recinto múltiplemente conexo es el conjunto de puntos situados entre dos circunferencias concéntricas.

La clase de los recintos múltiplemente conexos admite una subdivisión consiguiente. Los recintos simplemente conexos se caracterizan en que su frontera es un continuo. Si la frontera de un recinto múltiplemente conexo consta de un número finito n $(n > 1)$ de continuos, sin puntos comunes dos a dos *), el recinto G se llama de

---

*) Es fácil comprobar que si un conjunto dado admite alguna división en un número finito de continuos, que carecen de puntos comunes dos a dos, entonces esta división es única. En efecto, sean $f_1, \ldots, f_n$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, dos divisiones distintas de un mismo conjunto en continuos. Entonces, al menos uno de los continuos de una división (sea éste φ_j) tiene que contener tanto puntos que pertenecen como puntos que no pertenecen a cierto continuo de otra división (sea éste f_k). Designemos mediante φ_{jk} el conjunto de los puntos del continuo φ_j que pertenecen a f_k y mediante φ'_{jk}, el conjunto de todos los demás puntos del continuo φ_j (éstos tienen que pertenecer a alguno de los continuos $f_1, \ldots, f_{k-1}, f_{k+1}, \ldots, f_n$).

Evidentemente, todo punto de acumulación del conjunto φ_{jk} es también para f_k un punto de acumulación, por lo cual está contenido en f_k y no puede pertenecer a φ'_{jk}. Del mismo modo, un punto de acumulación del conjunto φ'_{jk} tiene que ser de acumulación para alguno de los continuos f_l $(l \neq k)$; por lo tanto, este punto está contenido en f_l y no puede pertenecer a φ_{jk}. Hemos obte-

conexión finita o más precisamente, se dice que el orden de conexión es n. Finalmente, si la frontera de un recinto múltiplemente conexo no puede dividirse en un número finito de continuos, sin puntos comunes dos a dos, entonces el recinto se llama de conexión infinita.

Si dentro de algún círculo abierto K se toman $n - 1$ $(n > 1)$ círculos cerrados $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$, sin puntos comunes dos a dos, entonces el conjunto de todos los puntos del círculo K no pertenecientes a ninguno de los círculos K_j $(j = 1, 2, \ldots, n - 1)$, representa un recinto G de orden de conexión n. Su frontera consta de n circunferencias: C y c_j, que limitan los círculos K y k_j $(j = 1, 2, \ldots, n - 1)$, respectivamente.

Si, para fijar ideas, tomamos el círculo unidad $|z| < 1$ y excluimos de éste los círculos cerrados $\left|z - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, y también su centro $z = 0$, obtenemos un recinto de conexión infinita cuya frontera consta de las circunferencias $|z| = 1$, $\left|z - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{2n(n+1)}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ y del punto $z = 0$.

4.4. Consideremos un conjunto cerrado de puntos arbitrario F. El conjunto O de todos los puntos del plano no pertenecientes a F es un conjunto abierto. En efecto, si O no es vacío (en este caso la proposición resulta evidente), sus puntos, al no pertenecer a F, no pueden ser tampoco puntos de acumulación de F. Por lo tanto, para cada uno de ellos existe un entorno que carece de puntos del conjunto F y que, por consiguiente, pertenece totalmente a O.

Supongamos que $z_0 \in O$; designemos con G_0 el conjunto de todos los puntos de O que pueden unirse con z_0 mediante curvas continuas pertenecientes a O. Es obvio que G_0 es un recinto. Este se denomina contiguo con respecto al conjunto cerrado F. Fácilmente se observa que puede haber una infinidad de recintos distintos, contiguos a F.

Como ejemplo, es suficiente figurarse que todo el plano se ha cuadriculado mediante rectas equidistantes, paralelas a los ejes de coordenadas. Aquí, el conjunto F está formado por todos los puntos de estas rectas, mientras que los puntos que están situados dentro de cada cuadro forman los recintos contiguos a F.

Cuando F es una curva de Jordan cerrada γ, existen dos y sólo dos recintos distintos contiguos a γ. En este caso, γ es su frontera común. Esta afirmación, que fácilmente se comprueba en cada

---

nido que el continuo φ_j admite una división en dos conjuntos no vacíos φ_{j_k} y ψ_{j_k} sin puntos comunes, ninguno de los cuales contiene puntos de acumulación del otro. Pero esto contradice a la definición de continuo; de este modo, nuestra afirmación queda demostrada.

caso concreto (por ejemplo, cuando γ es una circunferencia), forma el contenido del teorema de Jordan. A continuación emplearemos este teorema, recomendando al lector que vea la demostración en algún curso de topología. Obsérvese que uno de los dos recintos siempre es acotado: el i n t e r i o r de la curva de Jordan; el otro es no acotado: el e x t e r i o r a la curva de Jordan (por ejemplo, las partes interior y exterior de una circunferencia). Mediante estos conceptos es fácil establecer la siguiente propiedad de los recintos simplemente conexos, que es fundamental para la teoría de las funciones: *si γ es una curva de Jordan cerrada, perteneciente a un recinto simplemente conexo G, entonces el interior de γ también pertenece al recinto G.*

En efecto, sea ζ algún punto de γ. Como ζ es un punto del recinto G, existe un entorno de este punto perteneciente a G. En este entorno tiene que haber una infinidad de puntos exteriores a γ, así como una infinidad de puntos interiores a γ (esto es debido a que ζ es un punto frontera para uno y otro recintos). De aquí se deduce que tanto en el exterior como en el interior de γ hay puntos del recinto G. Pero el exterior de γ no puede pertenecer totalmente a G, puesto que en caso contrario G sería no acotado (y esto contradice a la definición admitida anteriormente de recinto simplemente conexo). Por consiguiente, en el exterior de γ tiene que haber tanto puntos pertenecientes al recinto G como puntos que no pertenecen a G. De aquí se deduce que en el exterior de γ tiene que haber puntos frontera de G. En efecto, suponiendo lo contrario haríamos la conclusión de que el exterior de γ se dividiría en dos conjuntos no vacíos sin puntos comunes: uno de puntos exteriores y otro de puntos interiores a G, sin contener ninguno de ellos puntos de acumulación del otro, lo cual contradice a la conexividad del exterior de γ. Ahora es fácil demostrar que el interior de γ pertenece totalmente a G. En efecto, en caso contrario en el interior de γ habría puntos pertenecientes a G y puntos no pertenecientes a G, y aplicando los mismos razonamientos que antes hallaríamos que entre éstos habría puntos frontera del recinto G. Luego obtendríamos de aquí que toda la frontera de G quedaría dividida en dos conjuntos no vacíos sin puntos comunes: uno en el interior y otro en el exterior de γ. Como ninguno de éstos puede contener puntos de acumulación del otro (un punto del interior de γ no puede ser de acumulación para el exterior y viceversa), llegaríamos a la conclusión de que la frontera del recinto G es un conjunto desconexo, lo cual contradice a la hipótesis hecha de que el recinto G es simplemente conexo. Así, pues, el interior de γ pertenece totalmente a G, y nuestra afirmación queda demostrada.

Se puede demostrar, sin dificultad alguna, que es simplemente conexo cualquier recinto acotado que posea la propiedad de que

para cualquier curva de Jordan cerrada γ perteneciente a G el interior de γ también pertenece a G.

Entre los recintos no acotados, para los cuales no hemos definido por ahora los conceptos de simple o múltiplemente conexos, hay algunos que poseen la propiedad indicada de los recintos simplemente conexos: si una curva de Jordan cerrada pertenece al recinto, entonces su interior también pertenece al mismo. A tal género de recintos también denominaremos simplemente conexos, extendiendo para éstos la definición primaria de recinto simplemente conexo.

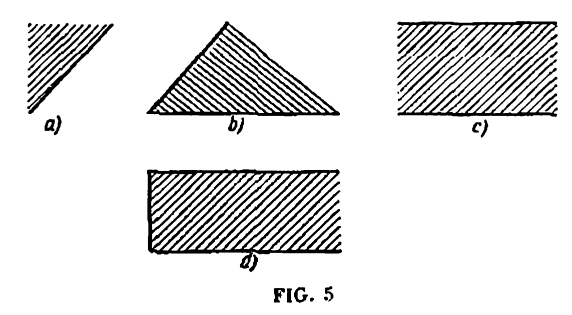


FIG. 5

Por lo tanto, serán simplemente conexos: el plano, un semiplano (fig. 5, *a*), un ángulo (fig. 5, *b*), una franja (fig. 5, *c*), una semifranja (fig. 5, *d*), etc. Por el contrario, el exterior de un círculo, por ejemplo, no será un recinto simplemente conexo según esta última definición.

4.5. Demostraremos ahora unas cuantas proposiciones auxiliares a las que habrá que hacer referencia a continuación. *)

Hagamos primero la siguiente observación general: si z_0 es un punto del recinto G y Δ es su distancia hasta la frontera de este recinto (cuando la frontera sea un conjunto vacío, supondremos que $\Delta = \infty$, entonces el círculo $|z - z_0| < \Delta$ está contenido en el recinto G. Esta afirmación es evidente cuando la frontera del recinto es un conjunto vacío, puesto que entonces G coincide con todo el plano y el círculo indicado también coincide con todo el plano. Supongamos que la frontera del recinto G no es un conjunto vacío y, por consiguiente, $\Delta < \infty$. El círculo $|z - z_0| < \Delta$ no puede contener puntos frontera de G, puesto que todos ellos están situados fuera de este círculo o en la circunferencia $|z - z_0| = \Delta$ (al menos un punto frontera está situado en esta circunferencia). Pero éste

*) El lector puede omitirlas durante la primera lectura, aludiendo a las proposiciones de este apartado solamente cuando encuentre referencias en la exposición ulterior.

no puede contener tampoco puntos exteriores a G, puesto que en el segmento rectilíneo z_0z_1, que une el punto interior z_0 con el punto exterior z_1, tiene que haber al menos un punto frontera. Así, pues, el círculo $|z - z_0| < \Delta$ está contenido en el recinto G.

a) *Dos puntos cualesquiera del recinto pueden unirse mediante una curva de Jordan y, en particular, mediante una línea quebrada.*

Sean z' y z'' dos puntos del recinto G. Según la propiedad conocida del recinto, demostrada en el ap. 4.2, existe una curva continua L: $z = f(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, que pertenece a G y une los puntos z' y z''. Designemos mediante Δ $(\Delta > 0)$ la distancia entre la curva L y la frontera del recinto G. Como la función $f(t)$ es continua, el segmento $[\alpha, \beta]$ puede dividirse por los puntos $t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_n = \beta$ en partes tan pequeñas, de modo que se cumplan las desigualdades

$$|f(t_{j+1}) - f(t_j)| < \Delta \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Como todo círculo $|z - f(t_j)| < \Delta$ pertenece al recinto G (pues la distancia desde $f(t_j)$ hasta la frontera del recinto G no es menor que Δ) y contiene el punto $f(t_{j+1})$, los segmentos de las rectas Λ_j, que unen $f(t_j)$ con $f(t_{j+1})$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$, también pertenecen a G. Por lo tanto, la quebrada Λ con los lados $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$ $\ldots, \Delta_{n-1}$, que une z' con z'', está situada en el recinto G. Si ésta no se corta consigo mismo, es decir, si carece de puntos múltiples, nuestra afirmación queda demostrada. En caso contrario, existen dos lados Δ_j y Δ_k $(0 \leqslant j \leqslant k)$ que tienen un punto común z_0; además, cuando los lados son contiguos $(k = j + 1)$, se puede suponer que este punto es distinto del punto final del lado Δ_j (que es el punto inicial del lado Δ_{j+1}). Si $k > j + 1$, suprimiendo de Λ la quebrada cerrada que consta: de la parte del lado Δ_j desde el punto z_0 hasta su punto final, de todos los lados de la quebrada Λ cuyos subíndices estén comprendidos entre j y k, y finalmente, de la parte del lado Δ_k desde el punto inicial de este lado hasta el punto z_0, obtenemos una nueva quebrada Λ' que une como anteriormente z' con z'', pero que contiene por lo menos un lado menos que Λ. Si $k = j + 1$, entonces uno de los lados Δ_j y Δ_{j+1}, que tienen el punto común z_0, además de otro punto común, como lo es el punto final de Δ_j y el punto inicial de Δ_{j+1}, tiene que ser parte del otro lado. Por ejemplo, supongamos que Δ_j es una parte de Δ_{j+1}. Entonces, de la quebrada Λ suprimimos la querbrada cerrada que consta de Δ_j y de la parte del lado Δ_{j+1} desde el punto inicial de este lado hasta el punto inicial del lado Λ_j. Resulta una nueva quebrada Λ'' que une z' con z'' y que contiene uno o dos lados menos que Λ. Así, pues, en todos los casos, cuando la quebrada Λ se corte consigo misma, es posible sustituir dicha quebrada por otra Λ' o Λ'', situada de nuevo en el recinto G y que une los mismos puntos z' y z'', pero

que contiene por lo menos un lado menos que λ. Repitiendo una cantidad finita de veces esta operación de supresión de quebradas cerradas obtendremos, finalmente, una quebrada λ que carecerá de intersecciones consigo misma (posiblemente, compuesta de un solo lado) y que unirá z' con z'' dentro del recinto G. Con esto, se termina la demostración de nuestra afirmación.

b) Para cada conjunto de puntos cerrado y acotado F, perteneciente a un recinto G, se puede señalar otro conjunto cerrado y acotado E, perteneciente también a G, que contiene a cada punto de F junto con su entorno cerrado de un radio fijado $\rho > 0$.

Esta proposición confirma la posibilidad de inmersión de todo conjunto cerrado F de puntos del recinto G en el interior de otro conjunto cerrado E, perteneciente también a este recinto.

Supongamos primero que G es todo el plano. Si $|z| \leqslant \rho$ es un círculo que contiene a todos los puntos del conjunto F, se puede tomar por E el círculo cerrado de doble radio: $|z| \leqslant 2\rho$. Evidentemente, se cumple todo lo que se pide en el teorema.

Supongamos ahora que G no es todo el plano. Entonces, la frontera del recinto G no es un conjunto vacío y se puede hablar de la distancia de F hasta la frontera del recinto G. Designemos esta distancia con d $(d > 0)$ y consideremos el conjunto E de aquellos puntos del plano cuyas distancias hasta el conjunto F no son superiores a $\frac{d}{2}$.

Está claro que todo punto del conjunto F es interior con respecto de E, y además, junto con cada punto $z_0 \in F$ pertenece también al conjunto E el círculo $|z - z_0| \leqslant \frac{d}{2}$. En virtud de la observación hecha al comienzo del presente apartado, el conjunto E mismo pertenece al recinto G.

No queda más que demostrar que E es un conjunto cerrado. Sea z' un punto de acumulación del conjunto E y supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión de puntos de E, convergente hacia z'. Como la distancia del punto al conjunto es continua, la sucesión de números $\rho(z_n, F)$ converge hacia el número $\rho(z', F)$, y como $\rho(z_n, F) \leqslant \frac{d}{2}$ (debido a la definición del conjunto E), se tiene también: $\rho(z', F) \leqslant \frac{d}{2}$. De aquí se deduce que z' pertenece a E. Así, pues, el teorema queda demostrado por completo. El número indicado ρ se puede tomar igual a $\frac{d}{2}$.

c) Sea E un subconjunto abierto no vacío del recinto G, que posea la propiedad de que cada uno de sus puntos de acumulación pertenecientes al recinto G, pertenece también a E; entonces, E necesariamente coincide con todo el recinto G.

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que el teorema no es justo. Entonces en el recinto G existen puntos no pertenecientes a E. Designemos el conjunto de tales puntos mediante E_1. Como el recinto es conexo, al menos uno de los conjuntos E o E_1 tiene que contener puntos de acumulación del otro. Tal conjunto no puede ser E, puesto que éste es abierto (todos los puntos que figuran en un entorno suficientemente pequeño de un punto de E, también pertenecen a E). Por lo tanto tiene que existir un punto de E_1 que es de acumulación para E. Según la hipótesis del teorema, tal punto tiene que pertenecer a E. Hemos llegado a una contradicción con el hecho de que este punto pertenece a E_1. De esta contradicción se deduce que el teorema es justo.

Obsérvese que las condiciones del teorema se cumplen particularmente también cuando para cada punto $z_0 \in E$ el entorno del mismo, de radio $d(z_0)$, igual a la distancia desde z_0 hasta la frontera del recinto G, también pertenece a E. En efecto, sea z_1 un punto de acumulación de E y sea $d(z_1)$ su distancia hasta la frontera del recinto G. Entonces, para el punto $z_0 \in E$, situado en el círculo $|z - z_1| < \frac{d(z_1)}{2}$, la distancia $d(z_0)$ hasta la frontera del recinto G será mayor que $\frac{d(z_1)}{2}$, y por consiguiente, el círculo $|z - z_0| < d(z_0)$, que por la hipótesis pertenece a E, contendrá al punto z_1. Así, pues, todo punto $z_1 \in G$, que es de acumulación para E, pertenece a E. Por lo tanto, se cumplen las condiciones del teorema, y $E = G$.

d) L e m a d e H e i n e — B o r e l. *Sea F un conjunto cerrado y acotado, y sea $\{K\}$ un sistema de círculos que cubren a F, en el sentido de que cada punto de F es interior al menos para uno de los círculos de K. En estas condiciones, existe un número finito de círculos: $K_1, K_2, \ldots, K_n$ $(n \geqslant 1)$, pertenecientes al sistema dado de círculos, que cubren a F.*

Demostremos esta proposición por reducción a lo absurdo. Sea D_1 un cuadrado con los lados paralelos a los ejes coordenados y con el centro en el origen de coordenadas, que contenga al conjunto F. Los ejes coordenados dividen a éste en cuatro cuadrados iguales, que contienen en el interior y en los lados algunos subconjuntos del conjunto F (algunos de estos cuatro subconjuntos pueden ser vacíos). Si el teorema fuese justo para cada uno de estos subconjuntos y cada uno de ellos se cubriese con un número finito de círculos del sistema $\{K\}$, lo mismo sería cierto también para todo el conjunto F. Por esto, negando la justeza del teorema para todo el conjunto F, tenemos que negarla también al menos para uno de los subconjuntos indicados del conjunto F. Sea D_2 el cuadrado que contiene a este subconjunto. Dividiéndolo en cuatro cuadrados iguales obtenemos

un nuevo cuadrado D_3 que contiene algún subconjunto del conjunto F y para el cual no se cumple el teorema. Reiterando indefinidamente estos razonamientos obtendremos una sucesión de cuadrados encajados:

$$D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_n \supset \ldots,$$

las longitudes de cuyos lados, evidentemente, tienden a cero, y cada cuadrado contiene algún subconjunto del conjunto F, al cual no es aplicable el teorema que demostramos.

Designemos con ζ el punto del plano al cual se ciñe la sucesión $\{D_n\}$. En virtud de que cada uno de estos cuadrados D_n contiene un conjunto infinito de puntos de F (si hubiera un número finito de éstos hallaríamos inmediatamente un número finito de círculos del sistema $\{K\}$ que cubriría a este conjunto), ζ es un punto de acumulación de F. En efecto, cualquier entorno del mismo contiene todos los cuadrados, comenzando desde uno de ellos, y por consiguiente, contiene un conjunto infinito de puntos de F. Como F es un conjunto cerrado, resulta que ζ pertenece a F y, por lo tanto, según la hipótesis del teorema, existe un círculo del sistema $\{K\}$ que contiene al punto ζ. Este mismo círculo contiene a todo cuadrado D_n cuyo subíndice n sea suficientemente grande, de donde resulta que contiene al subconjunto del conjunto F que pertenece a D_n. Esto está en contradicción con la hipótesis, según la cual ninguno de los subconjuntos indicados puede cubrirse con un número finito de círculos del sistema $\{K\}$. Con esta contradicción se termina la demostración del teorema.

Obsérvese que en las aplicaciones de este teorema el sistema $\{K\}$ consta generalmente de círculos con centros en puntos del conjunto F, es decir, de una colección de entornos de puntos de este conjunto. Naturalmente, para un sistema finito de entornos que cubren a F, solamente un número finito de puntos del conjunto F estarán situados en los centros de los entornos; los demás puntos de F estarán situados en los círculos $K_1, \ldots, K_n$, sin coincidir con sus centros.

§ 5. EL INFINITO. PROYECCION ESTEREOGRAFICA Y PLANO AMPLIADO

5.1. En la teoría de las funciones de variable compleja desempeña un papel muy importante el i n f i n i t o (∞), que lo consideraremos como un número complejo impropio. Para definir adecuadamente este concepto introduciremos previamente una interpretación de los números complejos que es muy natural en las cuestiones de carácter analítico. Examinemos, con este fin, todas las sucesiones convergentes posibles de números complejos y distribuyámoslas

en clases, colocando dos sucesiones en una misma clase cuando, y sólo cuando, sus límites son iguales.

Esta clase la designaremos con el símbolo α, donde α es el número complejo hacia el cual convergen todas las sucesiones de la clase, y la llamaremos número complejo p r o p i o. En lo que se refiere a cada una de las sucesiones que convergen hacia α, diremos que ella p e r t e n e c e a α (sobreentendiéndose que α es una clase de sucesiones).

Si α y β son dos clases (distintas o iguales) y $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son dos sucesiones pertenecientes a α y β, respectivamente, de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$ y $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \beta$, entonces las sucesiones $\{u_n + v_n\}$, $\{u_n - v_n\}$, $\{u_n \cdot v_n\}$ y $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ (en esta última se supone que $\beta \neq 0$ y que todos los números $v_n \neq 0$) convergen hacia los números $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y $\frac{\alpha}{\beta}$, respectivamente, es decir, pertenecen a las clases designadas por los mismos símbolos. Tomando en lugar de $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ otras sucesiones $\{u'_n\} \in \alpha$ y $\{v'_n\} \in \beta$, obtenemos de nuevo que

$$\{u'_n \pm v'_n\} \in \alpha \pm \beta, \quad \{u'_n \cdot v'_n\} \in \alpha \cdot \beta \text{ y } \left\{\frac{u'_n}{v'_n}\right\} \in \frac{\alpha}{\beta}.$$

O sea, las sucesiones que se obtienen al efectuar una operación algebraica sobre los términos de unas sucesiones arbitrarias de dos clases dadas α y β, pertenecen a una clase determinada, respectivamente: $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y $\frac{\alpha}{\beta}$. Por esto, resulta natural denominar a estas últimas clases suma, resta, producto y cociente de las clases α y β. Evidentemente, con tal definición, el conjunto de todas las clases representa un campo (o cuerpo conmutativo), que es isomorfo al campo de los números complejos: se obtiene el isomorfismo poniendo en correspondencia a la clase de todas las sucesiones convergentes hacia α, el número mismo α. Hemos obtenido la representación que necesitábamos del campo de los números complejos: *el número complejo α puede interpretarse como la clase de todas las sucesiones que convergen hacia α.*

Para representar geométricamente a las clases usaremos como antes los puntos del plano. Una sucesión de números complejos $\{u_n\}$ pertenece a la clase α cuando, y sólo cuando, el (único) punto de acumulación de la sucesión de puntos que representan los números u_n, coincide con α. Ahora construiremos el conjunto ampliado de números complejos adjuntando a los n ú m e r o s c o m p l e j o s p r o p i o s (a las clases de sucesiones convergentes) un n ú m e r o i m p r o p i o: una nueva clase de sucesiones. Precisando, reuniremos en una clase todas aquellas sucesiones $\{u_n\}$ de números complejos, para cada una de las cuales y para cualquier

positivo $M > 0$ se puede señalar un N tal (dependiente de la sucesión y del número M), que $|u_n| > M$ para $n > N$. A este clase la llamaremos **número complejo impropio o infinito** y la designaremos con el símbolo ∞. En lo que se refiere a cada una de las sucesiones $\{u_n\}$ que pertenecen al mismo, se dirá que converge hacia el infinito y escribiremos: $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$.

Análogamente al modo con que se introdujeron las operaciones sobre los números complejos propios, se pueden establecer también las operaciones para el conjunto ampliado de números complejos. Supongamos de nuevo que α, β son dos clases (propias o impropias) y que $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ son unas sucesiones cualesquiera pertenecientes a ellas. Si la sucesión $\{u_n + v_n\}$ pertenece a cierta clase γ de nuestro conjunto ampliado, y el cambio de $\{u_n\} \in \alpha$ y $\{v_n\} \in \beta$ por cualesquiera otras sucesiones $\{u'_n\} \in \alpha$ y $\{v'_n\} \in \beta$ no influye en el resultado, es decir, $\{u'_n + v'_n\}$ pertenece, igual que anteriormente, a la clase γ, entonces γ se llama suma de α y $\beta : \gamma = \alpha + \beta$. Pero si no existe en general una clase a la que podría pertenecer la sucesión $\{u_n + v_n\}$, o si esta clase puede variar al sustituir $\{u_n\}$ por $\{u'_n\}$ y $\{v_n\}$ por $\{v'_n\}$, entonces se dirá que α y β no tienen suma, es decir, que la expresión $\alpha + \beta$ carece de sentido. Evidentemente, el concepto de suma introducido de este modo para el conjunto ampliado de números complejos concuerda con el anterior, cuando α y β eran números propios (en este caso, siempre existe la suma). Si al menos una de las clases α y β es impropia, llegamos a los siguientes resultados:

1) $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty$ (α es un número propio), la expresión $\infty + \infty$ carece de sentido.

Para convencerse de lo último es suficiente tomar, por ejemplo, dos sucesiones de la clase ∞: 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, . . . y $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9$, . . . Sumándolas término a término, obtenemos la sucesión 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, . . ., que, evidentemente, no pertenece a ninguna clase propia y tampoco a la clase impropia.

Del mismo modo se consideran las otras operaciones también: la resta, multiplicación y división de las clases α y β. Lo único que en el caso de la división hay que exigir es que sean distintos de cero los términos de la sucesión que figura como divisor.

Se obtienen los siguientes resultados:

2) $\alpha - \infty = \infty - \alpha = \infty$ (α es un número propio), la expresión $\infty - \infty$ carece de sentido;

3) $\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty$ (α es un número propio, distinto de cero), $\infty \cdot \infty = \infty$;

4) $\frac{\alpha}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{\alpha} = \infty$ (α es un número propio), la expresión $\frac{\infty}{\infty}$ carece de sentido;

5) $\frac{\alpha}{0} = \infty$ (α es un número propio, distinto de cero), la expresión $\frac{0}{0}$ carece de sentido.

5.2. Como observó por primera vez Riemann, para la representación geométrica del conjunto ampliado de los números complejos es conveniente emplear la esfera. Consideremos alguna esfera S de radio 1 y un plano Π que pase por su centro O (fig. 6). Tomando en Π un sistema de coordenadas rectangulares xy con el origen en O, se pueden representar todos los números complejos propios en el plano Π. A cada uno de ellos ponemos en correspondencia un punto

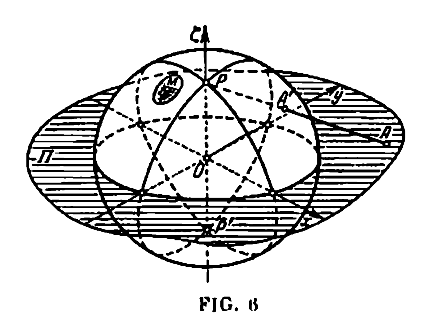


FIG. 6

determinado de la esfera. Con este fin, trazamos por O un diámetro PP' perpendicular al plano Π y unimos uno de sus extremos P con un punto arbitrario $A \in \Pi$ mediante un segmento recto. Este segmento (o su continuación) se cortará con la esfera en cierto punto A', distinto de P. Al punto A ponemos en correspondencia este punto de la esfera. Evidentemente, de este modo se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y todos los puntos de la esfera (a excepción del punto P). Este método de hacer corresponder a los puntos del plano los de la esfera, se denomina proyección e s t e r e o g r á f i c a (de la esfera sobre el plano o del plano sobre la esfera). Si el punto A representaba en el plano un número complejo determinado α, aquí consideraremos a su punto correspondiente A' de la esfera como la imagen del mismo número complejo.

Para mayor facilidad en la expresión emplearemos la terminología geográfica, denominando ecuador de la esfera a la circunferencia obtenida en la intersección de la esfera S con el plano Π; los puntos P y P' se llamarán polo norte y polo sur, respectivamente; los círculos máximos que pasan por los puntos P y P' se llamarán

meridianos y, en particular, el meridiano situado en el plano POx se llamará meridiano inicial, etc. Entonces, fácilmente se observa que los puntos del plano Π situados dentro de la circunferencia unidad (la cual coincide con el ecuador), se representan en la esfera por puntos del hemisferio sur (el cual contiene a P'), mientras que los puntos situados fuera de la circunferencia unidad se representan por puntos del hemisferio norte (el cual contiene a P). Del mismo modo, los puntos del semiplano superior ($y > 0$) se representan por

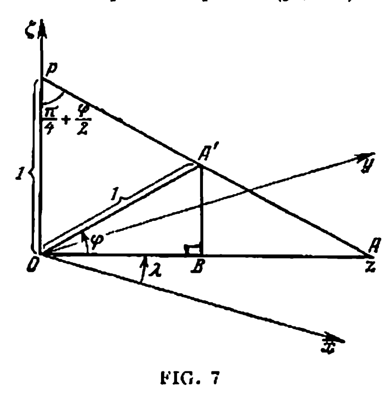


FIG. 7

puntos del hemisferio oriental (con el cual se corta el semieje positivo Oy), mientras que los puntos del semiplano inferior ($y < 0$) se representan por puntos del hemisferio occidental, etc.

Introduzcamos en S las coordenadas esféricas (geográficas): la latitud φ, que se mide desde el ecuador, desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ en el hemisferio norte y desde 0 hasta $-\frac{\pi}{2}$ en el hemisferio sur, y la longitud λ, que se mide desde el meridiano inicial (o con más precisión, desde su punto de intersección con el semieje positivo x) en dirección positiva desde 0 hasta π (inclusive) y en dirección negativa desde 0 hasta $-\pi$ (exclusive).

De la fig. 7 se deduce que en la proyección estereográfica

$$\arg z = \lambda \text{ y } |z| = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Por consiguiente, el punto de la esfera de coordenadas λ y φ representa al número complejo

$$z = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)(\cos\lambda + i \operatorname{sen}\lambda). \qquad (5.2:1)$$

Recíprocamente: el número complejo $z \neq 0$ se representa por el punto de la esfera de coordenadas $\lambda = \arg z$ y $\varphi = 2 \operatorname{arctg} |z| - \frac{\pi}{2}$.

Señalemos también las fórmulas que relacionan las coordenadas cartesianas de los puntos de la esfera A' (ξ, η, ζ) y los puntos del plano A $(x, y, 0)$ en la proyección estereográfica.

Como

$$\xi = \cos\varphi \cdot \cos\lambda, \qquad \eta = \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\lambda, \qquad \zeta = \operatorname{sen}\varphi$$

y

$$\cos\varphi = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2|z|}{1 + |z|^2},$$

$$\operatorname{sen}\varphi = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2},$$

se tiene

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \cos\varphi\cos\lambda = \frac{2|z|\cos\lambda}{1 + |z|^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \\ \eta &= \cos\varphi\operatorname{sen}\lambda = \frac{2|z|\operatorname{sen}\lambda}{1 + |z|^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \\ \zeta &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}. \end{aligned}\right\} \tag{5.2:2}$$

Por otra parte,

$$z = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)(\cos\lambda + i \operatorname{sen}\lambda) = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}(\cos\lambda + i \operatorname{sen}\lambda) =$$

$$= \frac{\cos\frac{\varphi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}(\cos\lambda + i \operatorname{sen}\lambda) = \frac{\cos\varphi}{1 - \operatorname{sen}\varphi}(\cos\lambda + i \operatorname{sen}\lambda) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta},$$

de donde

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \tag{5.2:3}$$

Las fórmulas obtenidas resuelven por completo el problema de la proyección estereográfica.

De ellas, en particular, se deduce la p r o p i e d a d h o m o c í c l i c a de la proyección estereográfica: en esta proyección,

a las circunferencias de la superficie de la esfera corresponden en el plano también circunferencias o rectas (estas últimas corresponden a las circunferencias de la esfera que pasan por su polo norte). En efecto, cualquier circunferencia de la esfera S se obtiene en la intersección de S con cierto plano

$$A\xi + B\eta + C\zeta - D = 0. \qquad (5.2:4)$$

De aquí, en virtud de las fórmulas (5.2:2) se deduce que los puntos correspondientes del plano satisfacen a la ecuación

$$Ax + By + \frac{1}{2}(C + D)(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(D - C) = 0. \qquad (5.2:5)$$

Esta última es la ecuación de una circunferencia si $C + D \neq 0$ y la ecuación de una recta si $C + D = 0$. Pero $C + D$ es el resultado de sustituir en el segundo miembro de la ecuación (5.2:4) las coordenadas del polo norte (0, 0, 1). Así, pues, en el plano Π se obtiene una recta o una circunferencia, según que pase por el polo norte o no la circunferencia de la esfera.

Señalemos, en particular, que cuando el plano (5.2:4) sea paralelo al plano del ecuador, es decir, cuando la circunferencia de la esfera sea uno de los paralelos, entonces $A = B = 0$ y en el plano resulta una circunferencia con el centro en el origen de coordenadas:

$$(C + D)(x^2 + y^2) = C - D.$$

Si el plano (5.2:4) pasa por el eje PP', es decir, si la circunferencia de la esfera es uno de los meridianos, entonces $C = D = 0$ y en el plano resulta una recta que pasa por el origen de coordenadas:

$$Ax + By = 0.$$

Claro, estos resultados podrían observarse también partiendo directamente de la definición de proyección estereográfica.

Toda circunferencia γ de la superficie de la esfera, que no pase por un punto dado M' de la esfera, divide la esfera en dos partes, una de las cuales contiene a M' y la otra no lo contiene; a la primera de ellas la llamaremos e n t o r n o del punto M'.

Una vez definido el concepto de entorno de un punto de la esfera, se puede generalizar inmediatamente el concepto de punto de acumulación, de conjunto cerrado y abierto, de curva continua, de recinto, etc, para los conjuntos de puntos considerados en S.

Por ejemplo: un punto de la esfera se llamará punto de acumulación de un conjunto dado E cuando, y sólo cuando, cualquier entorno del mismo contiene un conjunto infinito de puntos pertenecientes a E. Respecto de cada terna de funciones reales $\xi = \varphi(t)$, $\eta = \psi(t)$, $\zeta = \chi(t)$ del parámetro real t, definidas y continuas en un segmento $a \leqslant t \leqslant b$, que cumplen además la condición $[\varphi(t)]^2 +$

$+ |\psi(t)|^2 + [\chi(t)]^2 = 1$, se dirá que ésta determina una curva continua (esférica), etc.

Consideremos una sucesión de números complejos $\{u_n\}$, convergente hacia el número α (propio), el cual es el afijo del punto A. Si los números u_n son los afijos de los puntos U_n, entonces A es un punto de acumulación de la sucesión $\{U_n\}$ (y además el único). Fácilmente se observa que el punto A', que representa en la esfera el punto α, es también un punto de acumulación (y además, el único) de la sucesión de puntos de la esfera U'_n, que representan los números u_n.

Supongamos ahora que la sucesión de números complejos $\{v_n\}$ pertenece a la clase impropia ∞. Entonces, para cualquier $M > 0$ los puntos V_n, que representan a los números v_n en el plano, comenzando desde cierto subíndice $n > N$, estarán situados fuera del círculo de radio M. Los puntos correspondientes V'_n de la esfera se situarán en el entorno del polo norte, limitado por el paralelo cuya proyección sobre el plano es la circunferencia $|z| = M$. De aquí se deduce que el polo norte será el único punto de acumulación para cualquier sucesión de imágenes de puntos, que pertenezca a la clase impropia.

Recíprocamente: toda sucesión de puntos de la esfera, para la cual el polo norte sea el único punto de acumulación, representa cierta sucesión de la clase impropia. Por cierto, todo esto se deduce de la relación (5.2:1) hallada anteriormente: $|z| = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$. En efecto, para la sucesión $\{z_n\}$ la relación

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$$

es equivalente a la relación

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \frac{\pi}{2}.$$

De acuerdo a esto, aquí consideraremos el *polo norte de la esfera como la imagen geométrica del número impropio* ∞.

5.3. Ya vimos que mediante la proyección estereográfica se obtiene una representación biunívoca (o aplicación biyectiva) y continua de la esfera, a excepción del polo norte, sobre todo el plano *), de modo que la esfera puede servir para representar los números complejos propios igual que el plano. La existencia en la esfera

*) Es decir, que a cada sucesión de puntos de la esfera, convergente hacia el punto A', distinto éste del polo norte, corresponde en el plano una sucesión de puntos, convergente hacia el punto A, que es la proyección de A', y viceversa.

de un punto más, precisamente del polo, que representa naturalmente al número complejo impropio, permite considerar a la esfera como un modelo de plano ampliado, obtenido del plano finito u ordinario mediante la adjunción de un punto más: del punto impropio o punto del infinito. A continuación, efectuando la proyección estereográfica, representaremos el plano ampliado (la esfera) en forma de un plano finito, completándolo mentalmente con un punto impropio: con el punto del infinito del plano. En este caso, el entorno del punto del infinito se representará por el exterior de un círculo arbitrario, por ejemplo, de un círculo con centro en el origen de coordenadas.

Obsérvese que no se debe confundir el plano ampliado con el plano proyectivo que se obtiene del plano finito por adjunción de un conjunto infinito de puntos impropios que forman una recta impropia. Para construir un modelo de plano proyectivo, es suficiente tomar una esfera que sea tangente al plano en el polo sur. Proyectando sobre el plano, desde el centro de la esfera, los puntos del hemisferio sur, se establece una correspondencia biunívoca y continua entre todos los puntos del plano y los puntos del hemisferio sur (excluyendo de este último los puntos del ecuador). A cada recta del plano le corresponderá en el hemisferio la mitad de un círculo máximo; al conjunto de rectas paralelas entre sí, le corresponderá el conjunto de mitades de los círculos máximos que pasan por un mismo par de puntos diametralmente opuestos del ecuador. Este par de puntos se considera como la imagen de un punto del infinito del plano proyectivo, que es común para todas las rectas que llevan la misma dirección.

A todos los puntos del infinito posibles del plano proyectivo les corresponderá el conjunto de todos los pares de puntos diametralmente opuestos del ecuador. Este conjunto se considera como la imagen de la recta del infinito.

Por lo tanto, el modelo del plano proyectivo se obtiene del hemisferio identificando cada par de puntos diametralmente opuestos del ecuador.

Señalemos que *en el plano ampliado cualquier sucesión de puntos posee al menos un punto de acumulación*. En efecto, si la sucesión está acotada, la existencia de un punto de acumulación se deduce del teorema de Bolzano-Weierstrass. Si no es acotada, el exterior de cualquier círculo, es decir, cualquier entorno del punto del infinito, contiene un conjunto infinito de términos de la sucesión. De aquí se deduce que el punto del infinito es un punto de acumulación para cada sucesión no acotada.

En resumen, en el plano ordinario existen sucesiones que carecen de puntos de acumulación, mientras que en el plano ampliado (en la esfera) cualquier sucesión posee un punto de acumulación. Esta

circunstancia se expresa diciendo que el plano n o e s c o m p a c t o y que el plano ampliado e s c o m p a c t o.

Generalizando el concepto de límite, llamaremos convergente a cualquier sucesión de puntos del plano ampliado que contenga solamente un punto de acumulación. Este último se llamará límite de la sucesión.

Si G es un conjunto infinito no acotado del plano ampliado, el punto del infinito será un punto de acumulación para el mismo. Debido a esto, el conjunto G no puede ser cerrado si a él no pertenece el punto ∞.

Por ejemplo, el conjunto $1, 2, \ldots, n, \ldots$ no es cerrado en el plano ampliado, mientras que en el plano finito es cerrado.

Si G es un recinto no acotado, el punto ∞ puede ser o punto frontera, o punto interior al mismo. Como ejemplos del primer caso se pueden señalar: un semiplano, un ángulo, cualquiera de los dos recintos limitados por una parábola o por una de las ramas de una hipérbola, una franja o una semifranja, etc.

En el segundo caso tiene que existir un entorno del punto ∞ que pertenezca al recinto y, por consiguiente, que no contenga puntos frontera del recinto G. Por lo tanto, en este caso, la frontera del recinto G es un conjunto acotado. Puede servir de ejemplo el exterior G de cualquier curva de Jordan Γ, por ejemplo de una circunferencia, añadiendo también a G el punto ∞. Si esto último no se hiciese, resultaría otro recinto G', cuya frontera constaría de la curva Γ y del punto aislado del infinito.

La definición de orden de conexión de un recinto en el plano ampliado se introduce independientemente de que el recinto sea acotado o no. Así, pues, un recinto G se llama simplemente conexo en el plano ampliado, si su frontera es un continuo. Esta definición concuerda con la anterior (pág. 61) en el caso de un recinto acotado. También concuerda con la definición generalizada dada en la pág. 64 puesto que la frontera de un semiplano, de un ángulo, de una franja, etc, representa un continuo del plano ampliado. No obstante, en el caso del exterior G de una curva de Jordan Γ, la nueva definición da lugar a otro resultado. Precisamente, el exterior mencionado (si se le añade el punto del infinito) es un recinto simplemente conexo del plano ampliado.

Los recintos que no son simplemente conexos los llamaremos múltiplemente conexos. Por ejemplo, excluyendo del exterior G de una curva de Jordan Γ el punto ∞, obtenemos un recinto múltiplemente conexo G'. Si la frontera del recinto G puede representarse en forma de un número finito p de continuos, que carecen de puntos comunes dos a dos, entonces se dice que G es de conexión finita, precisamente, de conexión de orden p. Por ejemplo, el exterior de un círculo del cual se ha excluido el punto del infinito, es un recinto conexo de

segundo orden. Si la frontera de G no puede agotarse con un número finito de continuos que carezcan de puntos comunes dos a dos, entonces se dice que el recinto G es de conexión infinita.

Se puede demostrar que la definición admitida de recinto simplemente conexo del plano ampliado es equivalente a la siguiente:

Un recinto G se llama simplemente conexo, si para cualquier curva cerrada de Jordan γ, perteneciente a G, el interior o el exterior de γ pertenece a G.

La demostración de la equivalencia de una y otra definición dejamos a cuenta del lector.

El concepto introducido de punto del infinito permite generalizar un poco el concepto de función de variable compleja. Precisamente ahora el punto del infinito puede estar incluido en el conjunto de valores del argumento o en el conjunto de valores de la función, o bien, finalmente, en uno y en otro.

Debido a esto se puede hablar del valor de la función en el punto del infinito (este valor mismo puede ser finito o infinito) o del valor infinito de la función en un punto finito. El motivo de tal generalización del concepto de función se basa en la continuidad. Además, admitimos la siguiente generalización del concepto de límite para los casos en los cuales el punto z_0 o el límite A, o bien, finalmente, z_0 y A, son impropios:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A,$$

si para cualquier sucesión $\{z_n\}$, convergente hacia z_0, se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = A.$$

La función se llama *continua en el punto* z_0 (en sentido generalizado) si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Hay dos casos fundamentales en los que es conveniente introducir los valores impropios del argumento o de la función.

1) Si la función $f(z)$ está definida en un conjunto E para el cual el punto del infinito es un punto de acumulación, y $f(z)$ en el conjunto E tiende a un límite determinado A (finito o infinito) cuando z tiende al infinito, entonces es conveniente generalizar también la definición de $f(z)$ para el punto del infinito haciendo $f(\infty) = A$.

Así, por ejemplo, si $f(z)$ es una función racional

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m} \quad (a_n \neq 0, \; b_m \neq 0),$$

entonces existe el límite: $\lim_{z\to\infty} f(z)$, igual a 0, si $m>n$, igual a $\frac{a_m}{b_m}$, si $m=n$, y finalmente, igual a ∞, si $m<n$. De acuerdo a esto, hacemos:

$$f(\infty)=\begin{cases} 0 \\ \frac{a_m}{b_m} \\ \infty \end{cases}.$$

2) Si la función $f(z)$ está definida en un conjunto E, para el cual z_0 es un punto de acumulación, y $f(z)$ tiende hacia ∞ cuando el punto z del conjunto E tiende hacia z_0, entonces es conveniente generalizar también la definición de $f(z)$ para el punto z_0, haciendo $f(z_0)=\infty$.

Así, si z_0 es un cero del polinomio $b_0+b_1z+\ldots b_mz^m$ y no es un cero del polinomio $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$, entonces $f(z)=$ $=\frac{a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\ldots+b_mz^m}$ tiende hacia ∞ cuando $z\to z_0$, lo cual sirve de base para hacer $f(z_0)=\infty$.

En virtud de la definición admitida, la función $f(z)$ es c o n t i n u a e n e l s e n t i d o g e n e r a l en cada uno de estos casos en el punto correspondiente: en el primer caso, en el punto $z=\infty$ y en el segundo, en el punto z_0.

5.4. Demostremos que *en la proyección estereográfica los ángulos entre las curvas de la esfera son iguales a los ángulos entre sus imágenes en el plano*. Sea $M_0'(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ un punto cualquiera de la esfera (distinto del polo norte) y γ', una curva continua que pase por el punto M_0' y que tenga tangente en el mismo. Esto significa que entre las distintas representaciones paramétricas de la curva γ' existe una

$$\xi=\varphi(t),\quad \eta=\psi(t),\quad \zeta=\chi(t)\quad (|\varphi(t)|^2+|\psi(t)|^2+|\chi(t)|^2=1),$$

tal que las funciones φ, ψ y χ son diferenciables para $t=t_0$, y

$$[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2\neq 0.$$

La imagen del punto M_0' en la proyección estereográfica será el punto del plano $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y la imagen de la curva γ', la curva γ:

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}=\frac{\varphi(t)}{1-\chi(t)},\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta}=\frac{\psi(t)}{1-\chi(t)}.$$

Para los números $x'(t_0)$ y $y'(t_0)$ que caracterizan la dirección de la tangente en el punto M_0, se tiene:

$$x'=\frac{\xi'(1-\zeta_0)+\zeta'\xi_0}{(1-\zeta_0)^2},\quad y'=\frac{\eta'(1-\zeta_0)+\zeta'\eta_0}{(1-\zeta_0)^2}$$

y

$$x'^2+y'^2=\frac{(\xi'^2+\eta'^2)(1-\zeta_0)^2+2(\xi_0\xi'+\eta_0\eta')\cdot\zeta'(1-\zeta_0)+\zeta'^2(\xi_0^2+\eta_0^2)}{(1-\zeta_0)^4}.$$

Pero

$$\xi_0^2+\eta_0^2=1-\zeta_0^2 \quad \text{y} \quad \xi_0\xi'+\eta_0\eta'=-\zeta_0\zeta';$$

por consiguiente,

$$x'^2+y'^2=\frac{(\xi'^2+\eta'^2)(1-\zeta_0)^2-\zeta'^2(2\zeta_0-2\zeta_0^2)+\zeta'^2(1-\zeta_0^2)}{(1-\zeta_0)^4}=$$

$$=\frac{(\xi'^2+\eta'^2)(1-\zeta_0)^2+\zeta'^2(1-\zeta_0)^2}{(1-\zeta_0)^4}=\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}{(1-\zeta_0)^2}.$$

Considerando ahora dos curvas γ' y γ_1' que pasen por el punto M_0' de la esfera y sus imágenes γ y γ_1 en el plano, que pasan por el punto M_0, para el coseno del ángulo α entre las curvas γ y γ_1 en el punto M_0 hallamos:

$$\cos\alpha=\frac{x'x_1'+y'y_1'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x_1'^2+y_1'^2}}=$$

$$=\frac{[\xi'(1-\zeta_0)+\zeta'\xi_0][\xi_1'(1-\zeta_0)+\zeta_1'\xi_0]+[\eta'(1-\zeta_0)+\zeta'\eta_0][\eta_1'(1-\zeta_0)+\zeta_1'\eta_0]}{(1-\zeta_0)^2\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}\sqrt{\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2}}=$$

$$=\frac{(\xi'\xi_1'+\eta'\eta_1')(1-\zeta_0)^2+(\xi_0\xi'+\eta_0\eta')\zeta_1'(1-\zeta_0)}{(1-\zeta_0)^2\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}\sqrt{\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2}}+$$

$$+\frac{(\xi_0\xi_1'+\eta_0\eta_1')\zeta'(1-\zeta_0)+\zeta'\zeta_1'(\xi_0^2+\eta_0^2)}{(1-\zeta_0)^2\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}\sqrt{\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2}}.$$

Pero $\xi_0^2+\eta_0^2=1-\zeta_0^2$, $\xi_0\xi'+\eta_0\eta'=-\zeta_0\zeta'$ y del mismo modo,

$$\xi_0\xi_1'+\eta_0\eta_1'=-\zeta_0\zeta_1';$$

por lo tanto

$$\cos\alpha=\frac{(\xi'\xi_1'+\eta'\eta_1')(1-\zeta_0)^2-\zeta'\zeta_1'(\zeta_0-\zeta_0^2)-\zeta'\zeta_1'(\zeta_0-\zeta_0^2)+\zeta'\zeta_1'(1-\zeta_0^2)}{(1-\zeta_0)^2\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}\sqrt{\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2}}=$$

$$=\frac{\xi'\xi_1'+\eta'\eta_1'+\zeta'\zeta_1'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}\sqrt{\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2}}=\cos\alpha'.$$

Aquí, evidentemente, α' es el ángulo entre las curvas esféricas γ_1 y γ_1' en el punto M_0'. Con esto queda demostrado lo que se afirmaba.

La representación (o aplicación) de una superficie (o de un recinto sobre una superficie) sobre otra se llama c o n f o r m e si en ella no varían (se conservan) los ángulos entre las curvas. Se puede decir ahora que *la proyección estereográfica de la esfera sobre el plano es una representación (o aplicación) conforme.*

La proposición demostrada permite sustituir la medición de los ángulos entre las curvas de la esfera por la medición de los ángulos entre sus imágenes en el plano, y viceversa. Consideremos, en parti-

cular, los ángulos formados por las curvas que pasan por el punto del infinito. En el plano, tales curvas (c u r v a s   c o n t i n u a s   d e l   p l a n o   a m p l i a d o) se representan en forma de proyecciones de las curvas esféricas que pasan por el polo norte.

Si $\xi = \varphi(t)$, $\eta = \psi(t)$, $\zeta = \chi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, son las ecuaciones paramétricas de una curva continua γ de la esfera, la ecuación de su proyección Γ tendrá la forma

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta} = \frac{\varphi(t) + i\psi(t)}{1-\chi(t)} = f(t).$$

La función $f(t)$ está definida y es continua para todos los valores de t del segmento $[a, b]$, a excepción de aquellos valores $t = \tau$ para los cuales $\chi(t) = 1$ (y, por consiguiente, $[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2 = 1 - [\chi(t)]^2 = 0$, o sea, $\varphi(t) = \psi(t) = 0$). Pero, cuando $t \to \tau$, el punto de la curva γ tiende hacia el polo norte y, por lo tanto, $f(t) \to \infty$. Debido a esto, se puede definir $f(t)$ en todo el segmento $[a, b]$, conservando la continuidad (en el sentido generalizado), haciendo $f(\tau) = \infty$.

Supongamos que, en general, se tiene alguna función $z = F(t)$, definida y continua en el sentido generalizado en el segmento $[a, b]$ (que ahora puede ser infinito hacia uno o hacia ambos lados). Entonces, las coordenadas (ξ, η, ζ) de los puntos de la esfera que se proyectan sobre $z = F(t)$ serán, evidentemente, funciones de t, definidas y continuas en $[a, b]$ en sentido ordinario (si el segmento es infinito, por ejemplo, $b = \infty$, estas funciones tendrán unos límites determinados cuando $t \to \infty$; pasando a otro parámetro: $t' = \operatorname{arctg} t$, podemos reducir el problema al caso de un segmento finito). De aquí se deduce que toda función $z = F(t)$, definida y continua en sentido generalizado en un segmento $[a, b]$, determina una curva continua en el plano ampliado.

Pueden servir de ejemplos: la recta $z = (\alpha t + \beta) + i(\gamma t + \delta)$, donde $\alpha^2 + \gamma^2 \neq 0$ y la función z se hace igual a ∞ para $t = \infty$; la parábola, por ejemplo, $z = \alpha t^2 + \beta t + \gamma) + i(\delta t + \varepsilon)$, donde $\alpha^2 + \delta^2 \neq 0$ y la función z se hace igual a ∞ para $t = \infty$; la hipérbola (por ejemplo, $z = \frac{a(1+t^2) + 2bit}{1-t^2}$, donde $a \neq 0$, $b \neq 0$, y la función se hace igual a ∞ para $t = \pm 1$), etc.

Dos curvas planas Γ_1 y Γ_2 forman un ángulo con el vértice en el punto del infinito, si las curvas Γ_1' y Γ_2' que les corresponden en la esfera (Γ_1 y Γ_2 son las proyecciones estereográficas de Γ_1' y Γ_2') *forman un ángulo en el polo norte* (es decir, poseen tangentes en este punto). *Por definición, el valor de este último ángulo se toma por valor del ángulo entre las curvas Γ_1 y Γ_2 en el punto del infinito.*

Consideremos, en particular, dos rayos rectilíneos Γ_1 y Γ_2 que partan de un punto M_0 del plano bajo un ángulo α. A ellos, en la

esfera, les corresponderán, dos arcos de circunferencias Γ_1' y Γ_2', que unen el punto M_0' de la esfera con el polo norte P. Según lo demostrado en el presente apartado, Γ_1' y Γ_2' forman en el punto M_0' un ángulo igual a α; pero, en virtud de las conocidas propiedades de la esfera, Γ_1' y Γ_2' tienen que formar el mismo ángulo en el punto P, es decir, el ángulo α. De aquí se deduce que los rayos Γ_1 y Γ_2 también forman en el punto del infinito un ángulo igual a α.

Tomemos ahora por Γ_1 y Γ_2 dos rectas paralelas; en la esfera a ellas les corresponderán dos circunferencias Γ_1' y Γ_2' que pasan por P y que poseen aquí tangente común. De acuerdo a esto, el ángulo entre Γ_1' y Γ_2', y por consiguiente, también entre Γ_1 y Γ_2 será igual a cero.

El lector tiene que acostumbrarse a considerar la parte del plano comprendida entre dos rayos rectilíneos (un ángulo) o entre rectas paralelas (una franja) como un biángulo con dos ángulos iguales. Uno de los vértices de este biángulo (en el caso del ángulo) o ambos (en el caso de la franja) están situados en el punto del infinito.

5.5. A las transformaciones elementales de la esfera en sí misma, mediante la proyección estereográfica, les corresponden ciertas transformaciones del plano en sí mismo. Hagamos girar la esfera en el ángulo π alrededor del diámetro que lleva la dirección del eje x. Entonces, el hemisferio norte pasará al sur y el sur al norte; en particular, se cambiarán de sitio los polos norte y sur, es decir, los puntos que representan al ∞ y al 0. Además, se cambiarán de sitio los hemisferios occidental y oriental. El ecuador y el meridiano cero se quedarán en sus sitios. De todo esto se deduce que la transformación considerada de la esfera es equivalente a la siguiente transformación de las coordenadas esféricas:

$$\varphi \text{ se sustituye por } -\varphi,$$

$$\lambda \text{ se sustituye por } -\lambda.$$

Veamos cuál es la transformación del plano que corresponde a esta transformación de la esfera. Sustituyendo en la fórmula (5.2 : 1) φ y λ por $-\varphi$ y $-\lambda$, en lugar de z obtenemos el nuevo punto:

$$\zeta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)(\cos\lambda - i \operatorname{sen}\lambda) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)(\cos\lambda + i \operatorname{sen}\lambda)} = \frac{1}{z}.$$

Por lo tanto, *a la rotación de la esfera en el ángulo π alrededor del eje real le corresponde la transformación del plano expresada por la ecuación*

$$\zeta = \frac{1}{z}.$$

En este caso, el exterior de la circunferencia unidad (correspondiente al hemisferio norte) se transformará en el interior de la misma (correspondiente al hemisferio sur). Los semiplanos superior o inferior (correspondientes a los hemisferios occidental y oriental) también se cambian de sitio. La circunferencia unidad (imagen del ecuador) y la parte positiva del eje real (imagen del meridiano cero) se transforman en sí mismos.

Es de particular importancia el hecho de que en la transformación indicada se cambian de lugar el origen de coordenadas y el punto del infinito, que representan las imágenes de los polos sur y norte. También se cambian de lugar los entornos de estos puntos. Lo expuesto concuerda con las conocidas igualdades, referentes al número complejo impropio ∞:

$$\infty = \frac{1}{0}, \quad 0 = \frac{1}{\infty}.$$

Estas expresan la correspondencia existente entre los puntos 0 y ∞ del plano ampliado, establecida mediante la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$. Esta última transformación se emplea constantemente en todas las cuestiones en las que figura el punto del infinito. Ella reduce el estudio de este último punto y de cualquier entorno del mismo al estudio del punto cero y de su entorno correspondiente.

Obsérvese que como la proyección estereográfica es conforme y posee la propiedad homocíclica, la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$ también es conforme y posee también la propiedad homocíclica. Comprobemos la primera afirmación.

Si γ es una circunferencia cualquiera o una recta del plano z, la circunferencia de la esfera que le corresponde en la proyección estereográfica, después de haber realizado la rotación considerada de la esfera, se transformará también en una circunferencia. Pero a esta última en la proyección estereográfica le corresponde en el plano una circunferencia o una recta γ'. Esta es precisamente la imagen de la línea γ en la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$. Por cierto, la propiedad homocíclica de la última transformación se expresa en que las imágenes de las rectas y circunferencias en esta transformación son también rectas o circunferencias. De un modo semejante se comprueba también que la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$ es conforme. Señalemos que ambas propiedades indicadas se establecerán para unas transformaciones más generales en los apartados 2.3—2.4 y 4.3 del segundo capítulo, sin aplicar la proyección estereográfica.

5.6. Consideremos de nuevo la definición de ángulo con el vértice en el punto del infinito. En lugar de la definición formulada al final del apartado 5.4, se puede dar otra equivalente.

Sean Γ_1 y Γ_2 dos curvas continuas del plano ampliado que pasen por el punto del infinito y que formen en el mismo un ángulo α. Según el apartado 5.4, esto significa que Γ_1 y Γ_2 son las proyecciones estereográficas de unas curvas continuas γ_1 y γ_2 de la esfera, que pasan por el polo norte y forman en el mismo el ángulo α.

Haciendo girar la esfera en el ángulo π alrededor del eje x, las curvas γ_1 y γ_2 se transforman en unas curvas nuevas γ_1' y γ_2' que pasan por el polo sur de la esfera y que forman en él también el ángulo α. Sus proyecciones estereográficas sobre el plano serán unas curvas continuas Γ_1' y Γ_2' que forman en el origen de coordenadas (la proyección del polo sur) el ángulo α. Pero, por otra parte, según lo expuesto anteriormente, las curvas Γ_1' y Γ_2' pueden obtenerse de las curvas Γ_1 y Γ_2 mediante la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$. De aquí se deduce que, si dos curvas Γ_1 y Γ_2 del plano ampliado forman un ángulo α en el punto del infinito, entonces, sus imágenes Γ_1' y Γ_2', obtenidas mediante la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$, forman entre sí en el origen de coordenadas el mismo ángulo α.

Siguiendo nuestros razonamientos en orden inverso nos convencemos de que si se sabe que Γ_1' y Γ_2' forman en el origen de coordenadas un ángulo α, de aquí se deduce que sus imágenes Γ_1 y Γ_2 en la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$ forman también en el punto del infinito el ángulo α. Por lo tanto, se puede sustituir la definición inicial de ángulo con el vértice en el punto del infinito por la siguiente definición equivalente: se dice que las curvas continuas Γ_1 y Γ_2 del plano ampliado, que pasan por el punto del infinito, forman en este punto un ángulo α cuando, y sólo cuando, las imágenes de estas curvas, obtenidas como resultado de la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$, forman en el origen de coordenadas el ángulo α.

CAPITULO
SEGUNDO

LA DERIVABILIDAD Y SU SIGNIFICADO GEOMETRICO. LAS FUNCIONES ELEMENTALES

§ 1. LA DERIVADA. CONDICIONES DE D'ALEMBERT — EULER

1.1. Sea $f(z)$ una función de variable compleja, definida y uniforme en cierto conjunto E, y sea z_0 algún punto de acumulación de este conjunto, perteneciente al mismo. Formemos la razón de diferencias

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Evidentemente, ésta representa una función de z, definida para todos los puntos del conjunto E, distintos de z_0. Si existe el límite

$$\lim_{z\to z_0,\ z\in E} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

éste se llama *derivada de la función* $f(z)$ *sobre el conjunto* E *en el punto* z_0 y se designa mediante $f'_E(z_0)$ o, más abreviadamente, $f'(z_0)$. La función $f(z)$ que posee derivada se llama *derivable* (o *diferenciable*) o *monógena sobre el conjunto* E *en el punto* z_0.

En el caso particular, cuando E es un intervalo del eje real (finito o infinito), $f(z)$ es una función de la variable real $z=x$, que, en el caso general, toma valores complejos: $f(z)=f(x)=\varphi(x)+ i\psi(x)$. Si $\psi(x)\equiv 0$, es decir, si los valores de $f(z)$ también son reales, las definiciones dadas de derivada y derivabilidad coinciden, evidentemente, con las definiciones ordinarias del cálculo diferencial. Si $\psi(x)\not\equiv 0$, escribiendo $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en la forma $\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}+ i\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0}$, en virtud del ap. 3.6 del primer capítulo, sacamos la conclusión de que la derivada $f'(x)$ existe cuando, y sólo cuando, existen las derivadas $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$; en este caso, $f'(x)=\varphi'(x)+$

$+ i\psi'(x)$. Así, por ejemplo, si $f(x) = a\cos x + ib \operatorname{sen} x$, se tiene, $f'(x) = -a \operatorname{sen} x + ib \cos x$.

Designando $f(z) - f(z_0)$ mediante $\Delta f(z)$ (el incremento de la función) y $z - z_0$ mediante Δz (el incremento de la variable independiente), escribimos la condición de derivabilidad así:

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta(z)} = f'(z_0) + \varepsilon(z_0, \Delta z),$$

donde $\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0$ para $\Delta z \to 0\ (z \in E)$. De aquí se deduce que el incremento de una función derivable puede representarse en la forma:

$$\Delta f(z) = A \cdot \Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z)\,\Delta z \qquad (A = f'(z_0)) \qquad (1.1{:}1)$$

donde A no depende de Δz y ε tiende a cero junto con Δz.

Recíprocamente: toda función, para la cual el incremento puede representarse en la forma (1.1:1) con las mismas condiciones respecto de A y $\varepsilon(z, \Delta z)$, es una función derivable y su derivada es igual a A. En efecto, de (1.1:1) se deduce que el límite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \qquad (\Delta z = z - z_0; \qquad z \in E)$$

existe y es igual a A. Por lo tanto, la representación del incremento de la función en la forma (1.1:1), donde A no depende de Δz y ε tiende a 0 junto con Δz, es la condición necesaria y suficiente para la derivabilidad de la función. Obsérvese que de (1.1:1) se deduce inmediatamente que una función derivable en un punto $z_0 \in E$ es continua en este punto (sobre este conjunto).

Designando Δz mediante dz (diferencial de la variable independiente) y $A \cdot \Delta z = f'_E(z_0)\,dz$ mediante $df(z) = d_E f(z)$ (diferencial de la función), obtenemos para la derivada la siguiente expresión mediante diferenciales:

$$f'_E(z_0) = \frac{d_E f(z)}{dz}.$$

Aclaremos con un ejemplo el papel que desempeña en la definición del concepto de derivabilidad el conjunto E sobre el cual se toma la derivada. Supongamos primero que E es el eje real y $f(z) = f(x) = x$. Entonces, la derivada $f'_E(x)$ existe para cualquier $x \in E$ y es igual a uno, es decir, la función es derivable en todo el conjunto E. Prolonguemos ahora la función $f(x)$ a todo el plano complejo E_1, poniendo como antes $f(z) = x$. Evidentemente, esta función es continua para cualquier z y coincide con la función inicial cuando $z \in E$ (es decir, cuando $y = 0$). La razón de diferencias es aquí igual a:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x - x_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}.$$

Esta no tiene límite para $z \to z_0$ (z_0 es un punto arbitrario del plano), puesto que es igual a 0 cuando $x = x_0$ y $y \neq y_0$, y es igual a 1 cuando $x \neq x_0$ y $y = y_0$. Resumiendo, la función $f(z) = x$ no es derivable sobre el plano en ningún punto.

1.2. De la definición de derivada y de las propiedades de los límites de las funciones de variable compleja se deduce que las reglas fundamentales, conocidas en el cálculo diferencial, son válidas también para las derivadas de las funciones de variables complejas sobre un conjunto.

He aquí estas reglas:

1. Si $f(z) \equiv c$, entonces $\frac{df(z)}{dz} = 0$.

2. $\frac{d[cf(z)]}{dz} = c\frac{df(z)}{dz}$.

3. $\frac{dz}{dz} = 1$.

4. $\frac{d}{dz}[f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)] = \frac{df_1(z)}{dz} + \frac{df_2(z)}{dz} + \ldots + \frac{df_n(z)}{dz}$.

5. $\frac{d}{dz}[f_1(z)f_2(z)\ldots f_n(z)] = f_2(z)f_3(z)\ldots f_n(z)\frac{df_1(z)}{dz} +$
$+ f_1(z)f_3(z)\ldots f_n(z)\frac{df_2(z)}{dz} + \ldots + f_1(z)f_2(z)\ldots f_{n-1}(z)\frac{df_n(z)}{dz}$.

6. $\frac{d}{dz}[f(z)]^n = n[f(z)]^{n-1}f'(z)$. 6'. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$.

7. $\frac{d}{dz}(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + na_n z^{n-1}$.

8. $\frac{d}{dz}\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right] = \frac{f_2(z)\frac{df_1(z)}{dz} - f_1(z)\frac{df_2(z)}{dz}}{[f_2(z)]^2}$.

Aquí se supone que todas las funciones $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... son derivables en el punto dado z del conjunto E. En la regla 8, se exige, además, que $f_2(z)$ sea distinta de cero.

9. Regla de derivación de las funciones compuestas. Supongamos que la función $w = f(z)$ es derivable en un punto $z_0 \in E$ y que $w_0 = f(z_0)$ es un punto de acumulación para el conjunto F de los valores que toma esta función en E. Consideremos una función $Z = \varphi(w)$, definida en F y derivable en el punto w_0 sobre este conjunto. Entonces, la función compuesta $Z = \varphi[f(z)]$ es derivable en el punto z_0 sobre el conjunto E, y además,

$$\frac{d_E\varphi[f(z)]}{dz} = \frac{d_F\varphi(w)}{dw}\frac{d_E f(z)}{dz}. \quad (1.2:1)$$

En efecto, supongamos primero que en cualquier entorno del punto z_0 existen puntos $z \in E$, $z \neq z_0$, tales que $f(z) = f(z_0) = w_0$. Entonces existe una sucesión de puntos $\{z_n\}$ del conjunto E, convergente hacia z_0 y tal que $f(z_n) = f(z_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Para esta sucesión $\lim\limits_{z_n \to z_0} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = 0$ y como, por la hipótesis, existe la derivada $\frac{d_E f(z_0)}{dz} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, ésta tiene que ser igual a cero. Por lo tanto, el segundo miembro de la relación (1.2:1) es igual a cero, y es suficiente demostrar que también es igual a cero el primer miembro.

Examinemos la relación de diferencias

$$\frac{\varphi[f(z)] - \varphi[f(z_0)]}{z - z_0};$$

ésta se anula para cada $z \neq z_0$ tal que $f(z) = f(z_0)$. Por consiguiente, es suficiente establecer que esta relación posee un límite igual a cero para cualquier sucesión $\{z'_n\} \to z_0$ tal que $f(z'_n) = w'_n \neq w_0$. Pero entonces,

$$\frac{\varphi[f(z'_n)] - \varphi[f(z_0)]}{z'_n - z_0} = \frac{\varphi(w'_n) - \varphi(w_0)}{w'_n - w_0} \frac{w'_n - w_0}{z'_n - z_0} =$$

$$= \frac{\varphi(w'_n) - \varphi(w_0)}{w'_n - w_0} \frac{f(z'_n) - f(z_0)}{z'_n - z_0} \to \frac{d_F \varphi(w)}{dw} \frac{d_E f(z)}{dz} = 0 \text{ para } z \to z_0.$$

Así, pues, bajo la hipótesis hecha, se cumple la relación (1.2:1).

Supongamos ahora que existe un entorno del punto z_0, en el cual $f(z) = w \neq w_0$ para todos los puntos z pertenecientes a E. Entonces, tendremos:

$$\frac{\varphi[f(z)] - \varphi[f(z_0)]}{z - z_0} = \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} =$$

$$= \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \to \frac{d_F \varphi(w)}{dw} \frac{d_E f(z)}{dz} \text{ para } z \to z_0,$$

es decir, de nuevo obtenemos la relación (1.2:1).

10. R e g l a d e d e r i v a c i ó n de las funciones inversas. Supongamos que la función $w = f(z)$ establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de dos conjuntos E y F, y que la función inversa $z = \varphi(w)$ es continua en F. Entonces, si $f(z)$ es derivable en el punto $z_0 \in E$ y $f'_E(z_0) \neq 0$, la función inversa $z = \varphi(w)$ también será derivable en el punto $w_0 = f(z_0) \in F$ y

$$\varphi'_F(w_0) = \frac{1}{f'_E(z_0)}.$$

En efecto, como la aplicación $w = f(z)$ es biyectiva, se tiene, $z \neq z_0$ para $w \neq w_0$, por lo cual la relación de diferencias para la

función $\varphi(w)$ se puede representar en la forma

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0}=\frac{z-z}{w-w_0}=\frac{1}{\dfrac{w-w_0}{z-z_0}},$$

y como para $w \to w_0$ también $z=\varphi(w) \to z_0=\varphi(w_0)$, se tiene:

$$\lim_{w\to w_0}\frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0}=\frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{w-w_0}{z-z_0}}=\frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}=\frac{1}{f'_E(z_0)},$$

que es lo que se quería demostrar.

1.3. Aquí, fundamentalmente, estudiaremos las funciones definidas en un recinto $E = G$ y, en este caso, en lugar de $f'_E(z)$ o de $\frac{d_E f(z)}{dz}$ escribiremos abreviadamente: $f'(z)$ o $\frac{df(z)}{dz}$.

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; recordemos que una función de dos variables reales $u(x, y)$ se llama diferenciable en el punto (x_0, y_0) del recinto de su definición, si se cumple la relación:

$$u(x, y)-u(x_0, y_0)=A(x_0, y_0)(x-x_0)+B(x_0, y_0)(y-y_0)+$$
$$+\varepsilon_1(x, y; x_0, y_0)(x-x_0)+\varepsilon_2(x, y; x_0, y_0)(y-y_0),$$

donde

$$\lim_{x\to x_0,\ y\to y_0}\varepsilon_1(x, y; x_0, y_0)=\lim_{x\to x_0,\ y\to y_0}\varepsilon_2(x, y; x_0, y_0)=0.$$

Los coeficientes $A(x_0, y_0)$ y $B(x_0, y_0)$ del segundo miembro de la igualdad, son las derivadas parciales de la función $u(x, y)$:

$$A(x_0, y_0)=\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad B(x_0, y_0)\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Demostremos la siguiente proposición importante:

T e o r e m a. *Para que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, definida en un recinto G, sea derivable en un punto z de este recinto como función de variable compleja, es necesario y suficiente que las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ sean diferenciables en este mismo punto (como funciones de dos variables reales) y que, además, se cumplan en este punto las condiciones:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1.3:1)$$

Si se cumplen todas las condiciones del teorema, la derivada $f'(z)$ puede expresarse en una de las siguientes formas:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1.3:2)$$

Las condiciones (1.3:1) son de fundamental importancia en la teoría de las funciones analíticas y en las aplicaciones de esta teoría a los problemas de la mecánica y física. Estas se llaman c o n d i c i o n e s (o e c u a c i o n e s) d e C a u c h y — R i e m a n n. Es necesario señalar que esta denominación, universalmente admitida en los libros de enseñanza y científicos, está injustificada desde el punto de vista histórico, puesto que las condiciones (1.3:1) se estudiaron ya en el siglo XVIII por D'Alembert y, fundamentalmente, por Euler, en los trabajos dedicados a la aplicación de las funciones de variable compleja a la hidromecánica (D'Alembert y Euler), cartografía y cálculo integral (Euler). Por lo tanto, sería justo cambiar la terminología corriente y llamar a las ecuaciones (1.3:1) e c u a c i o n e s d e D'A l e m b e r t — E u l e r.

Veamos la demostración del teorema y demostremos primero que las condiciones del mismo son necesarias para la derivabilidad de la función $f(z)$.

En efecto, si $f(z)$ es derivable en el punto z del recinto G, se tiene:

$$\Delta f(z) = f'(z)\,\Delta z + \varepsilon\Delta z, \tag{1.3:3}$$

donde

$$\Delta z = z_1 - z = (x_1 - x) + i(y_1 - y) = \Delta x + i\Delta y,$$
$$\Delta f(z) = f(z_1) - f(z) =$$
$$= [u(x_1, y_1) - u(x, y)] + i[v(x_1, y_1) - v(x, y)] = \Delta u + i\Delta v,$$
$$f'(z) = a + ib, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2,$$

y ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando Δx y Δy tienden simultáneamente a cero.

Separando en la relación (1.3:3) las partes real e imaginaria, tendremos:

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y,$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_2\Delta x - \varepsilon_1\Delta y.$$

Como $\lim\limits_{\Delta x,\, \Delta y \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\Delta x,\, \Delta y \to 0} \varepsilon_2 = 0$, de aquí resulta que:

1) las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de dos variables reales x e y, son diferenciables en el punto (x, y);

2) sus derivadas parciales en este punto son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

y, por consiguiente, satisfacen a las condiciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Finalmente, para $f'(z)$ obtenemos:

$$f'(z) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Así, pues, queda demostrado que las condiciones del teorema son necesarias.

Demostremos que las condiciones del teorema son suficientes. Supongamos éstas cumplidas. Entonces

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y, \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y, \end{aligned}\right\} \qquad (1.3:4)$$

donde α_1, α_2, β_1 y β_2 tienden a cero cuando Δx y Δy tienden a cero. Además,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b. \qquad (1.3:5)$$

Por consiguiente,

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y,$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y$$

y

$$\Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v =$$
$$= a(\Delta x + i\Delta y) + ib(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y =$$
$$= (a + ib)\Delta z + \left[(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right]\Delta z = A\Delta z + \varepsilon\Delta z. \qquad (1.3:6)$$

Como

$$|\varepsilon| = \left|(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_1 + i\beta_1|\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| + |\alpha_2 + i\beta_2|\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_1 + i\beta_1| + |\alpha_2 + i\beta_2| \leqslant |\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2|,$$

tenemos que ε, junto con α_1, β_1, α_2, β_2, tiende a cero cuando $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tiende a cero. De aquí y de las relaciones (1.3:6), se deduce que la función $f(z)$ es derivable y su derivada $f'(z)$ es igual a A:

$$f'(z) = A = a + bi = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \ldots$$

Con esto se termina la demostración.

Por el curso general del análisis se sabe que para que las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ sean diferenciables, es suficiente que existan y sean continuas sus derivadas parciales: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Por esto, para que la función $f(z) = u + iv$ sea derivable, es suficiente que existan las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, que éstas sean continuas y que satisfagan a las ecuaciones (1.3:1).

Una función $f(z)$, derivable en cada punto del recinto G, se llama derivable (diferenciable) en este recinto, o también **holomorfa**, o **analítica** (a veces, **regular**). La denominación holomorfa (semejante a entera, de las palabras griegas δ'λοζ total, entero, y μορφή — forma) fue introducida por los alumnos de Cauchy: Briot y Bouquet. «Con esta denominación señalamos —decían ellos— que ella (es decir, la función holomorfa — autor) es semejante a las funciones enteras (es decir, a los polinomios.— autor), que poseen las mismas propiedades en todo el plano». El significado del vocablo «analítica», empleado anteriormente por Lagrange y más tarde por Weierstrass, y universalmente admitido en la actualidad, se explicó en el § 1 del primer capítulo; su aplicación a las funciones de variable compleja, que son derivables en cierto recinto, será justificada en la exposición ulterior, cuando demostremos que una función tal puede expresarse en un entorno de cualquier punto del recinto en forma de suma de una serie de potencias convergente. Por ahora emplearemos la denominación de «función analítica» como sinónimo de la denominación «función de variable compleja, derivable (o diferenciable) en un recinto dado».

Como ejemplo, examinemos la función $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, definida en todo el plano. En este caso,

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \operatorname{sen} y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por lo tanto, se cumplen las condiciones (1.3:1) y la función $f(z)$ es analítica en todo el plano. Para su derivada, se tiene:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = f(z).$$

En el ejemplo examinado al final del ap. 1.1, $f(z) = x$, $u = x$, $v = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ y no se cumplen las condiciones de D'Alembert — Euler: $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$. Ya se vio que esta función no es derivable en ningún punto (sobre el plano).

Las condiciones (1.3:1) pueden expresarse en una forma más compacta aplicando el concepto de las llamadas derivadas formales, que resulta útil en diversas cuestiones de la teoría de las funciones de variable compleja. Examinemos en un recinto una función compleja $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, diferenciable en el mismo respecto de x e y. Efectuando un cambio de variables:

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta,$$
$$\text{donde} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

se obtiene una función diferenciable de ξ y η, para la cual

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \delta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Desde luego en estas fórmulas, α, β, γ y δ son números reales. Sin embargo podemos asignar a éstos valores imaginarios, conviniendo en que los segundos miembros de las fórmulas servirán entonces de definición de los primeros. Precisamente haremos:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{i}{2}, \quad \delta = \frac{i}{2};$$

en este caso,

$$\xi = x + iy = z, \quad \eta = x - iy = \bar{z}$$

y nuestras fórmulas proporcionan la definición de las derivadas formales:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Del teorema demostrado en el presente apartado se deduce que, una función $f = u + iv$, diferenciable en el recinto G con respecto de x e y, será analítica en este recinto cuando, y sólo cuando, en todos los puntos del recinto se cumple la condición

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0;$$

en este caso,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z).$$

En muchos casos es importante que las condiciones para que una función de variable compleja $f(z) = u + iv$ sea diferenciable en un punto $z \neq 0$ vengan expresadas en coordenadas polares:

$|z| = r$ y $\operatorname{Arg} z = \Phi$. Estas condiciones (necesaria y suficientes) son:

1') u y v son funciones diferenciables de r y Φ;

2') sus derivadas parciales están ligadas por las relaciones

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \Phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Phi}. \tag{1.3:7}$$

Para convencerse de esto, es suficiente demostrar que u y v son diferenciables como funciones de r y Φ ($r \neq 0$) si, y sólo si, son diferenciables como funciones de x e y, y que en estas condiciones las ecuaciones (1.3:7) son equivalentes a las ecuaciones (1.3:1). Pero el cumplimiento de lo primero que se pide es consecuencia del hecho, conocido en el curso general de análisis, de que una función diferenciable (por ejemplo, $u = u(x, y)$) de funciones diferenciables (por ejemplo, de $x = r\cos\Phi$ e $y = r\operatorname{sen}\Phi$) también es diferenciable (respecto de las variables r y Φ). La segunda afirmación se comprueba inmediatamente. Por ejemplo, si se cumple la condición 1') y, además, se cumplen las condiciones (1.3:1), se tiene:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\Phi + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\Phi = \frac{\partial v}{\partial y}\cos\Phi - \frac{\partial v}{\partial x}\operatorname{sen}\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \Phi},\\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x}\cos\Phi + \frac{\partial v}{\partial y}\operatorname{sen}\Phi = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\Phi + \frac{\partial u}{\partial x}\operatorname{sen}\Phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Phi}.\end{aligned}\right\} \tag{1.3:8}$$

El lector fácilmente realizará también el paso inverso de las condiciones (1.3:7) a las condiciones (1.3:1).

Escribiendo las ecuaciones (1.3:8) de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\Phi - \frac{\partial v}{\partial x}\operatorname{sen}\Phi, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\Phi + \frac{\partial u}{\partial x}\operatorname{sen}\Phi,$$

de ellas obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\Phi + \frac{\partial v}{\partial r}\operatorname{sen}\Phi, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\Phi + \frac{\partial v}{\partial r}\cos\Phi,$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}(\cos\Phi - i\operatorname{sen}\Phi) + i\frac{\partial v}{\partial r}(\cos\Phi - i\operatorname{sen}\Phi) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)(\cos\Phi - i\operatorname{sen}\Phi) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right).\end{aligned} \tag{1.3:9}$$

Esta fórmula es útil para calcular $f'(z)$ mediante las coordenadas polares. Las ecuaciones (1.3:7) permiten también expresar $f'(z)$ en la forma:

$$f'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \Phi} - i\frac{\partial u}{\partial \Phi}\right). \tag{1.3:10}$$

Como ejemplo, examinemos la función potencial:

$$z^{\frac{m}{n}} = |z|_{+}^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m \operatorname{Arg} z}{n} + i \operatorname{sen} \frac{m \operatorname{Arg} z}{n}\right) = r^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\Phi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{m\Phi}{n}\right),$$

donde m es un número entero y n es natural. Esta función está definida en el recinto $G: z \neq 0$, y es multiforme si el número racional $\frac{m}{n}$ no es entero (véase el cap. 1, ap. 2.3). Esto último es debido a que el argumento Φ también es multiforme. Para tener la posibilidad

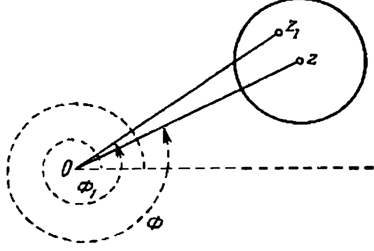


FIG. 8

de hablar de la derivada de esta función multiforme en cierto punto z del recinto G, tomemos en este recinto algún entorno del punto z que no contenga al origen de coordenadas y, fijando uno de los valores que toma Φ en el punto z, tomemos en todos los demás puntos z_1 del mismo entorno los valores Φ_1 que cumplen la condición $|\Phi_1 - \Phi| < \frac{\pi}{2}$ (fig. 8). Entonces, obtendremos en el entorno considerado una rama uniforme y continua*) de la función $z^{\frac{m}{n}}$. Esta función uniforme se designará con la misma notación: $f(z) = z^{\frac{m}{n}}$.

Evidentemente, en este caso

$$u = r_{+}^{\frac{m}{n}} \cos \frac{m\Phi}{n}, \quad v = r_{+}^{\frac{m}{n}} \operatorname{sen} \frac{m\Phi}{n},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{m}{n} r_{+}^{\frac{m}{n}-1} \cos \frac{m\Phi}{n} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Phi},$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{m}{n} r_{+}^{\frac{m}{n}-1} \operatorname{sen} \frac{m\Phi}{n} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Phi},$$

*) Sobre las ramas uniformes de las funciones multiformes hablaremos más detalladamente en adelante, en el § 5 del presente capítulo.

y, por consiguiente, $f(z)$ es una función diferenciable. En virtud de la fórmula (1.3:9), para su derivada, obtenemos:

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{m}{n}r_+^{\frac{m}{n}-1}\cos\frac{m\Phi}{n}+\frac{m}{n}r_+^{\frac{m}{n}-1}\operatorname{sen}\frac{m\Phi}{n}\right)=$$

$$=\frac{m}{n}r_+^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\Phi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{m\Phi}{n}\right)\frac{1}{z}=\frac{m}{n}\frac{f(z)}{z}.$$

Por lo tanto, el lector puede observar que la regla de derivación de la «potencia fraccionaria» $z^{\frac{m}{n}}$ se conserva formalmente igual que para la función correspondiente de variable real $x^{\frac{m}{n}}$. Solamente hay que tener en cuenta que nuestro cálculo se efectuaba con la condición de que $z\neq 0$, condición que puede omitirse solamente cuando $\frac{m}{n}$ sea un número entero no negativo.

Como ejercicio, proponemos al lector convencerse de que la función $f(z)=\ln r+i\Phi$, definida en el mismo recinto G, es diferenciable y su derivada es igual a $\frac{1}{z}$ (aquí también hay que separar las ramas uniformes y continuas de la función).

§ 2. SIGNIFICADO GEOMETRICO DE LA DERIVADA. TRANSFORMACION CONFORME

2.1. Consideremos primero una función compleja $z=\lambda(t)$ de variable real t, definida y continua en un segmento $E:[\alpha,\beta]$ del eje real. Como se señaló en el ap. 4.1 del capítulo primero, tal función determina una curva continua L. Supongamos que en cierto punto del segmento $[\alpha,\beta]$ existe la derivada (sobre el conjunto E) $\lambda'(t)\neq 0$. Demostremos que entonces existe en el punto correspondiente $z_0=\lambda(t_0)$ de la curva L la tangente T de ésta (entendida como la posición límite de la secante que pasa por el punto z_0) y que el ángulo entre T y el eje real coincide con $\operatorname{Arg}\lambda'(t_0)$.

En efecto, tracemos una secante por los puntos $z_0=\lambda(t_0)$ y $z_1=\lambda(t_1)$ de la curva L. Se puede suponer que estos puntos no coinciden para todos los valores t_1, distintos de t_0 y suficientemente próximos a t_0 (en caso contrario, existe una sucesión $\{t_{1n}\}\to t_0$, tal que

$$\lambda(t_{1n})-\lambda(t_0)=0$$

para todos n, y por consiguiente,

$$\left.\lambda'(t_0)=\lim_{t_{1n}\to t_0}\frac{\lambda(t_{1n})-\lambda(t_0)}{t_{1n}-t_0}=0\right).$$

Observando que la dirección de la secante coincide con la dirección del vector $\frac{z_1-z_0}{t_1-t_0}$, sacamos la conclusión de que la secante tendrá una posición límite para $t_1 \to t_0$ $(z_1 \to z_0)$, solamente si el ángulo entre el último vector y el eje real, igual a $\operatorname{Arg}\frac{z_1-z_0}{t_1-t_0}$, tiene límite cuando $t_1 \to t_0$. Pero, según la condición, existe el límite

$$\lim_{t_1\to t_0}\frac{z_1-z_0}{t_1-t_0}=\lambda'(t_0)\neq 0;$$

por lo cual también existe el límite

$$\lim_{t_1\to t_0}\operatorname{Arg}\frac{z_1-z_0}{t_1-t_0}=\operatorname{Arg}\lambda'(t_0)\,^{*}),$$

con lo cual se termina la demostración.

Resumiendo, *para una función compleja de variable real, la existencia de derivada distinta de cero significa la existencia de tangente a la curva correspondiente; el ángulo de inclinación de la tangente al eje real coincide con el argumento de la derivada.*

Examinemos ahora una función de variable compleja $w = f(z)$, definida y continua en un recinto G, y supongamos que en un punto $z_0 \in G$ existe la derivada $f'(z_0) \neq 0$. Trazemos por el punto z_0 alguna curva L: $z = \lambda(t)$, $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\lambda(\alpha) = z_0)$, para la cual exista la derivada $\lambda'(t_0) \neq 0$; según lo expuesto anteriormente, la curva L posee tangente en el punto $z_0 = \lambda(\alpha)$ con el ángulo de inclinación igual a $\operatorname{Arg}\lambda'(t_0)$. Mediante la transformación $w = f(z)$ esta curva se transforma en una curva Λ, situada en el plano w: $w = f[\lambda(t)] = \mu(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\mu(t_0) = f(z_0) = w_0)$. Según la regla de derivación de las funciones compuestas (ap. 1.1), la función $\mu(t)$ es derivable en el punto $t = t_0$ y $\mu'(t_0) = f'(z_0)\lambda'(t_0) \neq 0$, por lo cual la curva Λ posee tangente en el punto $w_0 = f(z_0)$, y el ángulo entre la tangente y el eje real es igual a

$$\operatorname{Arg}\mu'(t_0)=\operatorname{Arg}[\lambda'(t_0)f'(z_0)]=\operatorname{Arg}\lambda'(t_0)+\operatorname{Arg}f'(z_0).$$

De aquí se deduce que, al pasar de la curva L a su imagen Λ, el ángulo de inclinación de la tangente en el punto inicial de la curva varía en la magnitud

$$\operatorname{Arg}\mu'(t_0)-\operatorname{Arg}\lambda'(t_0)=\operatorname{Arg}f'(z_0),$$

que no depende de la curva. Si del punto z_0 parten dos curvas cualesquiera L_1 y L_2, que posean tangentes t_1 y t_2 en el punto z_0, entonces las tangentes τ_1 y τ_2 a sus imágenes Λ_1 y Λ_2 en el punto $w_0 = f(z_0)$ se obtendrán de t_1 y t_2 mediante un giro en un mismo ángulo $\operatorname{Arg}f'(z_0)$.

*) Véase el final del ap. 3.3, cap. 1.

y, por consiguiente, el ángulo entre las curvas L_1 y L_2 será igual (en valor y en el sentido de la dirección) al ángulo entre Λ_1 y Λ_2. Por lo tanto, al hacer una transformación mediante una función continua $w = f(z)$, que posea derivada $f'(z_0)$ distinta de cero, todas las curvas del plano z que pasan por el punto z_0 y que posean tangente en este punto se transforman en curvas del plano w que pasan por el punto $w_0 = f(z_0)$ y que también poseen tangente en este punto; en esta transformación se conservan los ángulos entre las curvas. La transformación mediante una función continua, que conserva los ángulos entre las curvas que pasan por el punto dado, se llama conforme en este punto.

Si, además, se conservan no solamente los valores de los ángulos, sino también los sentidos de sus direcciones, se dice que la transformación es conforme de primera especie*), si los sentidos de las direcciones de los ángulos se cambian por los contrarios, se dice que la transformación es conforme de segunda especie**).

Resumiendo, *una transformación mediante una función de variable compleja, analítica en un recinto G, es una transformación conforme de primera especie en todos los puntos en los que la derivada es distinta de cero.* Si la transformación es conforme en todos los puntos del recinto G sin excepción, entonces se llama transformación conforme del recinto G.

Puede servir de ejemplo de transformación conforme de segunda especie la simetría con respecto del eje real: $w = \bar{z}$. Sirven de ejemplos más generales las transformaciones que se realizan mediante las funciones conjugadas con las analíticas: $w = \overline{f(z)}$ (se supone que $f'(z) \neq 0$).

Proponemos demostrar al lector que si la derivada es igual a cero en cierto punto, los ángulos pueden conservarse o variar (examínense las transformaciones

$$f_1(z) = r^2 (\cos \Phi + i \operatorname{sen} \Phi)$$
$$f_2(z) = r^2 (\cos 2\Phi + i \operatorname{sen} 2\Phi) = z^2$$

en el punto $z = 0$).

2.2. En el apartado anterior se demostró que $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ representa el ángulo de rotación de la tangente a la curva L en el punto z_0 de la misma al pasar a su imagen Λ y al punto $w_0 = f(z_0)$. En particular, si $f'(z_0)$ es un número real positivo, entonces los vectores tangentes a L en z_0 y a Λ en $f(z_0)$ son paralelos y tienen una misma dirección.

*) O conforme directa. (*N. del T.*)
**) O conforme inversa. (*N. del T.*)

Veamos ahora el significado geométrico que tiene el módulo de la derivada $|f'(z_0)|$. Con este fin, obsérvese que

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

y que los números $|z - z_0|$ y $|f(z) - f(z_0)|$ expresan las distancias entre los puntos z y z_0 del plano z y entre sus imágenes $f(z)$ y $f(z_0)$ del plano w, respectivamente. Si la razón $\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ se puede considerar como la dilatación del vector $z - z_0$, obtenida al hacer la transformación mediante la función $w = f(z)$ (esta dilatación puede ser menor que la unidad, igual a la unidad o mayor que la unidad), *el módulo de la derivada* $|f'(z_0)|$ *se puede considerar como la dilatación en el punto* z_0 *en la transformación mediante la función* $w = f(z)$. De lo que acabamos de exponer se deduce que la magnitud de dilatación en el punto z_0 no depende del vector $z - z_0$ que se tome con el origen en este punto; no obstante, ésta no coincide con la dilatación del vector $z - z_0$ sino que representa el límite de esta dilatación cuando z tiende a z_0.

2.3. Como ilustración, estudiemos la **función homográfica** *) $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (al menos uno de los números c o d es distinto de cero). Supongamos primero que $c = 0$. Entonces, $L(z)$ puede expresarse en la forma $L(z) = \alpha z + \beta$ $\left(\alpha = \frac{a}{d},\ \beta = \frac{b}{d}\right)$; ésta es una **función lineal entera**. Está definida para todos los valores de z y posee derivada $L'(z) = \alpha$, que conserva un valor constante y distinto de cero, si $\alpha \neq 0$. Por consiguiente, la función $L(z)$ realiza una transformación conforme de todo el plano de la variable compleja z. En esta transformación, las tangentes a todas las curvas del plano z giran un mismo ángulo, igual a $\operatorname{Arg}\alpha$, y la dilatación en todos los puntos es igual a $|\alpha|$. Si $\alpha = 1$, se tiene, $\operatorname{Arg}\alpha = 2k\pi$, $|\alpha| = 1$, y realmente no existe ni rotación ni dilatación. Como, en este caso, la transformación toma la forma $w = z + \beta$, ésta, evidentemente, se reduce a una traslación del plano como un todo en el vector β. Si $\alpha \neq 1$ (y $\alpha \neq 0$), la transformación puede expresarse en la forma $w - \gamma = \alpha(z - \gamma)$, donde γ se determina por la ecuación $\gamma = \alpha\gamma + \beta$. De aquí se deduce que en la transformación cada vector $z - \gamma$ que parta del punto γ, gira un ángulo igual a $\operatorname{Arg}\alpha$ y se dilata en $|\alpha|$ veces, convirtiéndose en el vector $w - \gamma$ que parte del mismo punto γ. Esto significa que la transformación $L(z) = \alpha z + \beta$, siendo $\alpha \neq 1$ (y $\alpha \neq 0$), se reduce a una rotación

*) La denominación de esta función dada por el autor es: función fraccionaria lineal. (*N. del T.*)

del plano como un todo, alrededor del punto $\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$ en el ángulo Arg α, y a una dilatación de razón $|\alpha|$ con respecto de este punto. Evidentemente, ésta es una transformación homotética con centro en el punto $\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$ de razón (o coeficiente de semejanza) $|\alpha|$, seguida de una rotación en el ángulo Arg α alrededor del mismo punto. Tal es la transformación conforme en el caso más simple.

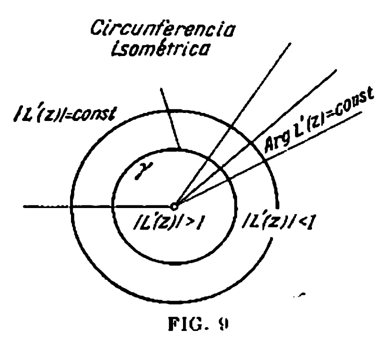


FIG. 9

Supongamos ahora que $c \neq 0$. Entonces, para $z \neq \delta = -\frac{d}{c}$ existe la derivada

$$L'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{(z-\delta)^2}.$$

Si el determinante $ad - bc \neq 0$ $\Big($la igualdad a cero de la expresión $ad - bc$ significa el cumplimiento de la proporción $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$, de donde $a = c\lambda$, $b = d\lambda$ y $L(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{c\lambda z + d\lambda}{cz+d} = \lambda\Big)$, se tiene, $L'(z) \neq 0$ para todos los puntos $z \neq \delta$. Por consiguiente, la transformación $w = L(z)$ es conforme en todos los puntos finitos, distintos de δ. En esta transformación, las tangentes a las curvas que pasan por un punto arbitrario $z \neq \delta$, giran un ángulo igual a

$$\operatorname{Arg} L'(z) = \operatorname{Arg} \frac{ad-bc}{c^2} - 2 \operatorname{Arg}(z-\delta).$$

Evidentemente, el ángulo de rotación de la tangente varía al pasar de un punto a otro, conservando el mismo valor en los puntos, para los cuales Arg $(z - \delta)$ conserva un mismo valor, es decir, en los puntos

de cada uno de los rayos rectilíneos que parten del punto δ. La dilatación de la longitud en el punto z en esta transformación es igual a $|L'(z)| = \left|\frac{ad-bc}{c^2}\right| : |z-\delta|^2$ y también varía al pasar de un punto a otro. Esta conserva el mismo valor en los puntos para los cuales la magnitud $|z-\delta|$ es la misma, es decir, en los puntos de cada circunferencia con el centro en el punto δ. En particular, esta dilatación es igual a la unidad en cada punto de la circunferencia $\gamma : |z-\delta| = \frac{1}{|c|}\sqrt{|ad-bc|}$ (circunferencia isométrica de la transformación homográfica); es mayor que la unidad en el interior de γ, tendiendo al infinito cuando z tiende a δ, y es menor que la unidad en el exterior de γ, tendiendo a cero cuando z tiende al infinito (fig. 9).

2.4. Supongamos, como anteriormente, que $c \neq 0$ y $ad - bc \neq$ $\neq 0$. Entonces, evidentemente,

$$\lim_{z\to\delta=-\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} = \alpha.$$

En correspondencia con esto, obtenemos:

$$L(\delta) = \infty \quad \text{y} \quad L(\infty) = \alpha.$$

Por lo tanto, el punto finito δ se transforma mediante la función $w = L(z)$ en el punto del infinito, y el punto del infinito, en el punto finito α. Demostremos que la transformación también es conforme en estos puntos. En efecto, sean γ_1 y γ_2 dos curvas que pasan por el punto δ y forman en el mismo un ángulo θ, y sean Γ_1 y Γ_2 sus imágenes en el plano w. Queremos demostrar que Γ_1 y Γ_2 forman también el ángulo θ en el punto del infinito. Hagamos con este fin la transformación del plano w: $\zeta = \frac{1}{w}$. Entonces, las curvas Γ_1 y Γ_2 se transformarán en las curvas Γ_1' y Γ_2', y el punto del infinito, en el origen de coordenadas (fig. 10). Está claro que el paso de γ_1 y γ_2 en el plano z a Γ_1' y Γ_2' en el plano ζ se efectúa mediante la transformación homográfica

$$\zeta = \frac{1}{w} = \frac{cz+d}{az+b},$$

que es conforme en el punto $z = \delta = -\frac{d}{c}$. Por consiguiente, Γ_1' y Γ_2' también forman el ángulo θ en el origen de coordenadas. De aquí que, en virtud de la definición del ap. 5.6 del capítulo primero, las curvas Γ_1 y Γ_2 forman también entre sí el ángulo θ en el punto del infinito. Así, pues, queda demostrado que la transformación $w = L(z)$ es conforme en el punto $z = \delta$.

De un modo análogo se demuestra que también es conforme en el punto del infinito. Precisando, si las curvas γ_1 y γ_2 pasan por el punto del infinito en el plano z, sus imágenes Γ_1 y Γ_2 en el plano w pasan por el punto α. Supongamos que γ_1 y γ_2 forman entre sí un ángulo θ en el punto del infinito. Esto significa que sus imágenes γ_1' y γ_2', obtenidas como resultado de la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$,

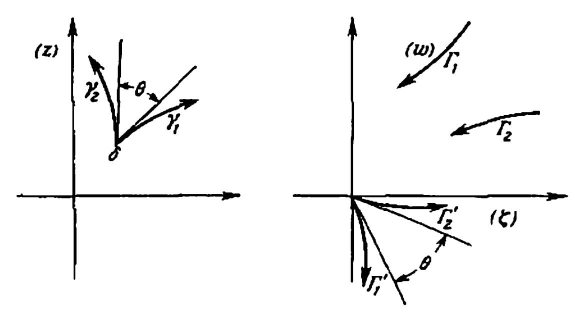


FIG. 10

forman el ángulo θ en el origen de coordenadas. Pero, evidentemente, se puede pasar de γ_1' y γ_2' a Γ_1 y Γ_2 mediante la transformación

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a\frac{1}{\zeta}+b}{c\frac{1}{\zeta}+d} = \frac{a+b\zeta}{c+d\zeta}.$$

Esta transformación es homográfica y, por lo tanto, conforme en el punto $\zeta = 0$. De aquí se deduce que Γ_1 y Γ_2 forman también entre sí el ángulo θ en el punto $\alpha = \frac{a}{c}$, con lo que se termina la demostración de que la transformación $w = L(z)$ es conforme en el punto del infinito.

Cuando $c = 0$, resulta la función lineal entera

$$w = L(z) = \alpha z + \beta \quad (\alpha \neq 0).$$

Aquí se supone $L(\infty) = \infty$ y mediante la transformación auxiliar $\zeta = \frac{1}{w} = \frac{1}{az+b}$ se reduce este caso al que se acaba de examinar (al punto del infinito del plano z corresponde el origen de coordenadas del plano w).

Proponemos al lector hacer la demostración completa.

Resumiendo, se puede decir que la *función homográfica* $w = L(z)$ *realiza una transformación conforme del plano ampliado sobre sí mismo.*

§ 3. POLINOMIOS. FUNCION EXPONENCIAL. SENO Y COSENO

3.1. Las funciones uniformes y analíticas en todo el plano a excepción del punto del infinito, forman la clase más importante y simple de funciones diferenciables. Tales funciones se llaman *enteras*.

Un *polinomio*:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = P_n(z).$$

es un ejemplo muy particular de función entera. Esto puede reducirse a una constante ($n = 0$). Si $n > 0$ y $a_n \neq 0$, se tiene: $\lim\limits_{z \to \infty} P_n(z) = \infty$. Por consiguiente, un polinomio de grado superior a cero se hace igual a ∞ en el punto del infinito. Como se sabe por el álgebra, si w es un número complejo arbitrario (propio), la ecuación $P_n(z) = w$ tiene n raíces, algunas de las cuales pueden ser iguales entre sí (raíces múltiples). Por lo tanto, en la transformación $w = P_n(z)$ cada punto del plano w pertenece a la imagen del plano z; además, este punto tendrá n preimágenes: $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Agreguemos a esto que $P_n(\infty) = \infty$ y, por consiguiente, ∞ pertenece a la imagen del plano ampliado. Las preimágenes del punto del infinito $w = \infty$ son las raíces de la ecuación $P_n(z) = \infty$, es decir, es también el punto del infinito. Para simetría, a éste le consideraremos como raíz múltiple de esta ecuación, de orden n. Así, pues, *un polinomio de grado n ($a_n \neq 0$, $n > 0$) transforma el plano ampliado sobre sí mismo, de modo que cada punto de la imagen w tiene n preimágenes*: $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Por cierto, como ya se advirtió, para algunos valores excepcionales de w (entre los cuales también está incluido $w = \infty$) el número de preimágenes puede ser también menor que n.

Fácilmente se observa que la cantidad de tales valores excepcionales no es superior a n. En efecto, si $w_0 \neq \infty$ y la ecuación $P_n(z) = w_0$ tiene raíces múltiples, entonces, como se sabe por el álgebra, para cada una de ellas $P'_n(z) = 0$. Pero esta última ecuación tiene $n - 1$ raíces (entre las cuales también puede haber iguales entre sí): $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$. De aquí se deduce que w_0 tiene que tener alguno de los siguientes $n - 1$ valores: $P_n(\zeta_1), \ldots, P_n(\zeta_{n-1})$, y agregando aquí el punto del infinito, obtenemos aquellos n puntos (no más) del plano w que poseen menos que n preimágenes cada uno en el plano z.

3.2. En virtud de la teoría general, la transformación $w = P_n(z)$ es conforme en todos los puntos, a excepción de los puntos

$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$, en los cuales la derivada se anula, y también, posiblemente, a excepción del punto $z = \infty$.

Cuando $n = 1$, el polinomio es una función lineal entera, y en este caso, la transformación es biunívoca y conforme, incluyendo también el infinito (véanse los ap. 2.3—2.4). Cuando $n > 1$, la transformación deja de ser conforme en los puntos indicados.

En efecto, supongamos que $P'_n(z_0) = 0$. Entonces, $z = z_0$ es una raíz múltiple de la ecuación $P_n(z) - P_n(z_0) = 0$ y, por consiguiente, $P_n(z) - P_n(z_0)$ puede expresarse en la forma:

$$P_n(z) - P_n(z_0) = (z - z_0)^k Q(z),$$

donde $k \geqslant 2$ es el orden de multiplicidad de la raíz $z = z_0$ (como es sabido, el número k es una unidad mayor que el orden de multiplicidad de la raíz $z = z_0$ para la ecuación $P'_n(z) = 0$) y el polinomio $Q(z)$ no se anula en el punto $z = z_0$. Poniendo $P_n(z) = w$ y $P_n(z_0) = w_0$, obtenemos de aquí, que

$$\operatorname{Arg}(w - w_0) = \operatorname{Arg}(z - z_0)^k + \operatorname{Arg} Q(z),$$

de donde

$$\lim_{z \to z_0} \{\operatorname{Arg}(w - w_0) - \operatorname{Arg}(z - z_0)^k\} = \operatorname{Arg} Q(z_0).$$

Supongamos ahora que $z = \lambda(t)$ es una curva L que pasa por el punto $z_0\,(z_0 = \lambda(t_0))$ y que en este punto tiene tangente cuyo ángulo de inclinación al eje real es igual a

$$\operatorname{Arg} \lambda'(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \operatorname{Arg} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$$

(véase el ap. 2.1). La imagen Λ de esta curva en el plano w será: $w = P_n[\lambda(t)] = \mu(t)$. De aquí no podemos sacar inmediatamente la conclusión de que existe tangente a Λ en el punto w_0 $(t = t_0)$ (puesto que $\mu'(t_0) = P'_n(z_0)\,\lambda'(t_0) = 0$). Pero, para el ángulo de inclinación de la secante que pasa por los puntos w_0 y $w \neq w_0$, según la anterior, obtenemos:

$$\operatorname{Arg} \frac{w - w_0}{t - t_0} =$$

$$= \operatorname{Arg} \frac{w - w_0}{(z - z_0)^k} + k \operatorname{Arg} \frac{(z - z_0)}{t - t_0} \to \operatorname{Arg} Q(z_0) + k \operatorname{Arg} \lambda'(t_0) \text{ cuando } t \to t_0,$$

de donde se deduce que existe la tangente.

Si L_1 y L_2 son dos curvas: $z = \lambda_1(t)$ y $z = \lambda_2(t)$, que pasan por el punto z_0 y forman en éste un ángulo θ:

$$\theta = \operatorname{Arg} \lambda'_2(t_2) - \operatorname{Arg} \lambda'_1(t_1) \qquad (\lambda_1(t_1) = \lambda_2(t_2) = z_0),$$

entonces, las imágenes Λ_1 y Λ_2 de estas curvas pasan por el punto w_0 y forman en éste el ángulo

$$[\operatorname{Arg} Q(z_0) + k \operatorname{Arg} \lambda_2'(t_2)] - [\operatorname{Arg} Q(z_0) + k \operatorname{Arg} \lambda_1'(t_1)] = \\ = k[\operatorname{Arg} \lambda_2'(t_2) - \operatorname{Arg} \lambda_1'(t_1)] = k\theta.$$

Resumiendo, *en la transformación* $w = P_n(z)$ *todos los ángulos con los vértices en los puntos, en los cuales se anula la derivada* $P_n'(z)$, *se alteran*; *precisando*: *estos ángulos aumentan* k *veces si el orden de multiplicidad de la raíz correspondiente de la ecuación* $P_n'(z) = 0$ es igual a $k - 1$.

Aplicando la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$, el lector se convencerá fácilmente que cuando $n > 1$ la transformación deja de ser conforme también en el punto del infinito. Precisamente, en la transformación $w = P_n(z)$, los ángulos con el vértice en el punto del infinito aumentan n veces.

3.3. Examinemos, en particular, la transformación de la forma $w = (z - a)^n$ $(n > 1)$. Esta transforma el plano ampliado sobre sí mismo, de modo que cada punto w posee n preimágenes en el plano z. Son una excepción los puntos $w = 0$ y $w = \infty$, para los cuales, las preimágenes se confunden en un punto: a y ∞, respectivamente. Las preimágenes z $(\neq a, \neq \infty)$ se determinan de la ecuación

$$w = (z - a)^n,$$

de modo que

$$z = a + \sqrt[n]{w} = a + \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\operatorname{Arg} w}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\operatorname{Arg} w}{n}\right).$$

Evidentemente, estos n puntos están situados en los vértices de un polígono regular de n lados con el centro en a.

La transformación $w = (z - a)^n$ es conforme en todos los puntos, a excepción de los puntos $z = a$ y $z = \infty$. En este caso los ángulos con los vértices en los dos últimos puntos aumentan n veces.

Para obtener una idea más clara de esta transformación, señalemos que

$$|w| = |z - a|^n \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg} w = n \operatorname{Arg}(z - a).$$

De aquí se deduce que cada circunferencia de radio r con el centro en el punto $z = a$ se transforma en una circunferencia de radio r^n con el centro en el punto $w = 0$. Si, en este caso, el punto z recorre una vez la circunferencia $|z - a| = r$ en dirección positiva (es decir, que el Arg $(z - a)$, creciendo continuamente, aumenta en 2π), el punto w recorrerá n veces la circunferencia $|w| = r^n$ en la misma dirección (es decir, que el Arg w, creciendo continuamente, aumentará en $2\pi n$). Hagamos ahora recorrer al punto z a lo largo

del rayo rectilíneo $\operatorname{Arg}(z-a)=\varphi_0+2k\pi$, desde el punto a hasta el infinito. Nuestras fórmulas mustran que el punto correspondiente w recorrerá entonces el rayo rectilíneo $\operatorname{Arg} w = n\varphi_0 + 2m\pi$, desde el origen de coordenadas hasta el infinito.

Consideremos ahora la región g, que representa el interior del ángulo de magnitud θ, $0<\theta\leqslant\frac{2\pi}{n}$, con el vértice en el punto a. Supongamos que este ángulo está limitado por los rayos rectilíneos:

$$\operatorname{Arg}(z-a)=\varphi_0+2k\pi$$

y

$$\operatorname{Arg}(z-a)=\varphi_1+2m\pi,$$

$$(\varphi_1-\varphi_0=\theta).$$

De lo dicho se deduce que la imagen de la región g en el plano w es una región d que representa un ángulo de magnitud $n\theta$ con el

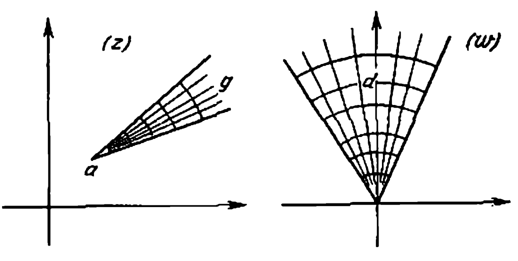


FIG. 11

vértice en el origen de coordenadas, limitado por rayos rectilíneos (fig. 11). La correspondencia entre g y d, establecida mediante la función $w=(z-a)^n$, es biunívoca. En efecto, como la función $w=(z-a)^n$ es uniforme, para comprobar esta afirmación es suficiente establecer que cada punto w de la región d tiene solamente una preimagen en la región g. Obsérvese para esto que todas las n preimágenes del punto w se sitúan en el plano z en los vértices de un polígono regular de n lados con el centro en a, de modo que dos de ellas podrían situarse dentro de un mismo ángulo con el vértice en a solamente cuando la magnitud del ángulo fuese mayor que $\frac{2\pi}{n}$. Pero la medida del ángulo g no es superior a $\frac{2\pi}{n}$, por consiguiente, al ángulo g solamente pertenece una imagen de cada uno de los puntos de d, con lo cual queda terminada la demostración de nuestra proposición.

Así, pues, *la función* $w = (z - a)^n$ *realiza una transformación biunívoca y conforme del interior de cualquier ángulo de lados rectilíneos, con el vértice en el punto* a *y de magnitud* θ, $0 < \theta \leqslant \frac{2\pi}{n}$, *sobre el interior de un ángulo correspondiente de lados rectilíneos también, con el vértice en el origen de coordenadas y de magnitud* $n\theta$.

Por esto mismo, se recurre a la función considerada siempre que sea necesario transformar un ángulo de lados rectilíneos en otro ángulo que sea unas cuantas veces mayor.

Indudablemente, sería erróneo creer que en la transformación $w = (z - a)^n$ $(n > 1)$ cualquier recta se transforma en recta y cualquier circunferencia en circunferencia. Supongamos, por ejemplo, que $a = 0$ y $n = 2$. Entonces se obtiene la función $w = z^2$. Veamos en qué se transforman, mediante la función $w = z^2$, las rectas que no pasan por el origen de coordenadas y que son paralelas a uno de los ejes coordenados. Tomemos, por ejemplo, una recta paralela al eje imaginario: $z = c + it$, $c \neq 0$, $-\infty < t < +\infty$. Como imagen obtendremos la línea $w = (c + it)^2$, o bien, poniendo $w = u + iv$ y separando las partes real e imaginaria:

$$u = c^2 - t^2, \qquad v = 2ct, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Estas son las ecuaciones de la línea transformada, expresadas en coordenadas cartesianas en la forma paramétrica. Excluyendo entre éstas el parámetro t, resulta:

$$v^2 = 4c^2 (c^2 - u).$$

Esta es la ecuación de una parábola, cuyo eje va dirigido por el eje real hacia el lado negativo, con el foco en el origen de coordenadas y con el parámetro $p = 2c^2$. Del mismo modo se observa que cada recta paralela al eje real: $z = t + ic'$ se transforma en la parábola

$$v^2 = 4c'^2 (u + c'^2)$$

cuyo eje lleva la dirección del eje real hacia el lado positivo, con el foco en el origen de coordenadas y con el parámetro $p' = 2c'^2$. Resumiendo, *las dos familias de rectas paralelas a los ejes coordenados se transforman mediante la función* $w = z^2$ *en dos familias de parábolas con el foco común en el origen y cuyos ejes están situados en el eje real* (fig. 12). Como las familias de rectas son ortogonales entre sí y la transformación es conforme, las familias de parábolas obtenidas también serán ortogonales entre sí; esto se comprueba también fácilmente mediante un cálculo inmediato.

Naturalmente, el lector tiene que tener presente que la transformación de todo el plano z mediante la función $w = z^2$ no es biunívoca, puesto que cada punto w, distinto de cero y del infinito,

posee dos preimágenes. En particular, las preimágenes de la parábola $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$ son dos rectas simétricas respecto del eje imaginario: $z = c + it$ y $z = -c + it$; del mismo modo, las preimágenes de la parábola $v^2 = 4c'^2(u + c'^2)$ son dos rectas simétricas respecto del eje real: $z = t + ic'$ y $z = t - ic'$. Pero si se considera solamente la imagen de algún semiplano g, limitado por una recta que pase por el origen de coordenadas (tal semiplano

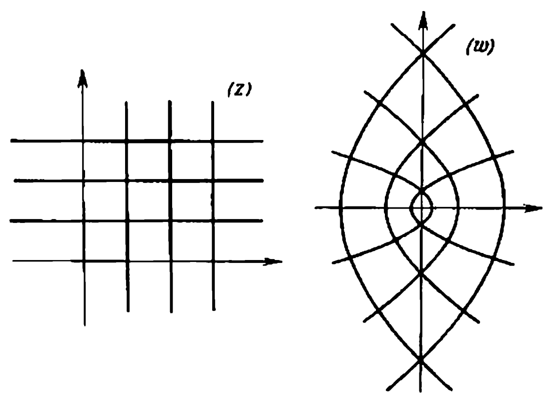


FIG. 12

representa el interior de un ángulo con el vértice en el origen de coordenadas de magnitud π), entonces, según lo expuesto anteriormente, la correspondencia entre g y su imagen d será biunívoca; d representará aquí un ángulo de magnitud 2π con el vértice en el origen de coordenadas; ambos lados de este ángulo se confunden en un rayo rectilíneo que parte del origen de coordenadas.

3.4. Las funciones enteras distintas de los polinomios, se llaman *funciones trascendentes enteras*. La más simple de éstas es la *función exponencial* exp z o e^z. Esta se obtiene como resultado de la generalización de la función exponencial de variable real e^x al plano complejo. Como es sabido, la función $f(x) = e^x$ se caracteriza completamente por sus propiedades: ésta

1) está definida unívocamente para todos los valores reales x, toma valores reales y para $x = 1$ el valor e;

2) satisface al teorema de la suma

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$$

para cualesquiera x_1 y x_2;

3) es continua en el punto $x = 0$.

Aquí construiremos la función exponencial de variable compleja $f(z) = \exp z$, exigiendo el cumplimiento de las siguientes condiciones: ésta

1') está definida unívocamente para todos los valores complejos (finitos) de z, para los valores reales $z = x$ toma también valores reales y para $x = 1$ toma el valor e;

2') satisface al teorema de la suma

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2)$$

para cualesquiera z_1 y z_2;

3') es diferenciable en el punto $z = 0$.

De las condiciones 1') y 2') se deduce que $f(0) = 1$. En efecto, $f(0) \cdot f(1) = f(1) \neq 0$ y, por consiguiente, $f(0) = 1$. Luego, sacamos la conclusión de que $f(z) \neq 0$ para todos los valores de z. En efecto, $f(z) \cdot f(-z) = f(0) = 1$, de donde se deduce que $f(z) \neq 0$. Aplicando 2') y 3'), obtenemos para cualquier z:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z)\cdot f(\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z} f(z) \to f'(0) f(z)$$

cuando $\Delta z \to 0$. Esto significa que $f(z)$ es una función analítica en todo el plano (entera), y satisface a la ecuación diferencial

$$f'(z) = f'(0) f(z). \qquad (3.4:1)$$

En particular, $f'(x) = f'(0) f(x)$, de donde $f(x) = e^{f'(0)x + C}$, de las condiciones $f(0) = 1$ y $f(1) = e$ se deduce que $C = 0$ y $f'(0) = 1$. Así, pues, $f(x) = e^x$; por cierto, esta conclusión se deduce inmediatamente de que $f(x)$ satisface a las condiciones 1), 2) y 3).

Poniendo en (3.4:1) el valor $f'(0)$, resulta:

$$f'(z) = f(z). \qquad (3.4:2)$$

Expresemos $f(z)$ en la forma

$$f(z) = f(x + iy) = f(x) f(iy) = e^x [\alpha(y) + i\beta(y)]. \qquad (3.4:3)$$

Entonces,

$$f'(z) = \frac{\partial [e^x \beta(y)]}{\partial y} - i \frac{\partial [e^x \alpha(y)]}{\partial y} = e^x [\beta'(y) - i\alpha'(y)].$$

De la ecuación (3.4:2), obtenemos:

$$\beta'(y) = \alpha(y), \quad \alpha'(y) = -\beta(y),$$

de donde $\beta''(y) + \beta(y) = 0$ y, por consiguiente:

$$\beta(y) = C_1 \cos y + C_2 \operatorname{sen} y, \quad \alpha(y) = \beta'(y) = -C_1 \operatorname{sen} y + C_2 \cos y.$$

Pero $f(0)=\alpha(0)+i\beta(0)=1$, es decir, $\alpha(0)=1$ y $\beta(0)=0$; por lo tanto, $C_1=0$ y $C_2=1$. En resumen,

$$\alpha(y)=\cos y, \quad \beta(y)=\operatorname{sen} y$$

y según la fórmula (3.4:3)

$$f(z)=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y).$$

Hemos obtenido la única función que satisface a las condiciones 1') 2') y 3'). Esta se llama función exponencial (de variable compleja) y se designa mediante $\exp z$ o e^z. Así, pues, según la definición

$$\exp z=e^z=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y). \qquad (3.4:3)$$

Obsérvese que si la condición 3') se sustituye por otra más general: 3") la función $f(z)$ es continua en el punto $z=0$, entonces se puede hallar un conjunto infinito de funciones distintas que satisfacen a las condiciones 1'), 2') y 3"). Todas ellas están comprendidas en la fórmula

$$f(z)=e^{x+ay}(\cos\alpha y+i\operatorname{sen}\alpha y),$$

donde a y α son números reales. Sin embargo, solamente una de ellas, la que se obtiene cuando $a=0$, $\alpha=1$, es analítica y además entera.

3.5. De la definición de función exponencial

$$\exp z=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y) \qquad (3.5:1)$$

se deduce que ésta no se anula para ningún valor de z y que

$$|\exp z|=e^x \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg}(\exp z)=y+2k\pi.$$

Para $z=iy\ (x=0)$ obtenemos:

$$\exp(iy)=\cos y+i\operatorname{sen} y.$$

Esta relación permite utilizar, en lugar de la forma trigonométrica del número complejo

$$c=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi) \quad (r\neq 0),$$

la forma exponencial

$$c=r\exp(i\varphi)=re^{i\varphi},$$

que es más compacta.

De las fórmulas (3.5:1) vemos que la función exponencial posee período, igual a $2\pi i$ (puesto que, al variar y en 2π, z varía en $2\pi i$, y el valor de la función no se altera):

$$\exp(z+2\pi i)=\exp z.$$

Demostremos que $2\pi i$ es el **período fundamental** (**primitivo**) de la función exponencial, es decir, que cualquier otro período de la misma tiene que tener la forma $2k\pi i$, donde k es un número entero.

En efecto, sea $\omega = \alpha + \beta i$ un período de la función exponencial. Entonces

$$\exp(z+\omega) = \exp z$$

para cualquier z y, en particular, para $z=0$

$$\exp \omega = \exp(\alpha + i\beta) = e^{\alpha}(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) = 1.$$

Pero esto significa que $e^{\alpha} = 1$, es decir, $\alpha = 0$ y $\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta = 1$, es decir, $\beta = 2k\pi$. Por consiguiente,

$$\omega = \alpha + i\beta = 2k\pi i,$$

como se quería demostrar.

La expresión $\exp\infty$ carece de sentido, puesto que $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ no existe. Para convencerse de esto es suficiente observar que $e^x \to \infty$ cuando $x > 0$ y tiende a ∞, y $e^x \to 0$ cuando $x < 0$ y tiende a $-\infty$.

De aquí, en particular, se deduce que $\exp z$ no coincide con ninguno de los polinomios, es decir, que verdaderamente es una función trascendente entera. En efecto, todo polinomio, que no se reduce a una constante, tiende al infinito cuando $z\to\infty$.

En adelante (en el cap. 4 ap. 33), se demostrará que ninguna función trascendente entera puede tener límite en el punto $z=\infty$.

Para la derivada de la función exponencial obtenemos:

$$(\exp z)' = \frac{\partial(e^x\cos y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial(e^x \operatorname{sen} y)}{\partial x} = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) = \exp z.$$

Por consiguiente, la derivada de la función exponencial no se anula para ningún valor z.

Estudiemos el comportamiento geométrico de la función $w = \exp z$ o, lo que es lo mismo, la transformación que esta función realiza. Ya se observó que esta función no toma el valor $w=0$ en ningún punto z. Esto significa que el origen de coordenadas del plano w no pertenece a la imagen del plano finito z en la transformación $w = \exp z$. Demostremos que cualquier otro punto finito del plano w pertenece a esta imagen. En efecto, de la ecuación $w = \exp z$, donde $w \neq 0$ está dado mientras que $z = x+iy$ es la incógnita, obtenemos:

$|w| = e^x$, de donde $x = \ln|w|$ y $\operatorname{Arg} w = y + 2\pi k$, o sea $y = \operatorname{Arg} w$.

Resumiendo, solamente pueden ser preimágenes de los puntos w los puntos de la forma

$$z = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w.$$

Evidentemente, hay una infinidad de puntos de éstos, puesto que Arg w toma un conjunto infinito de valores, que se diferencian dos a dos en múltiplos enteros de 2π. Además, cada uno de los puntos hallados es verdaderamente una preimagen del punto w, ya que

$$\exp(\ln|w| + i \operatorname{Arg} w) = e^{\ln|w|}(\cos \operatorname{Arg} w + i \operatorname{sen} \operatorname{Arg} w) = $$
$$= |w|(\cos \operatorname{Arg} w + i \operatorname{sen} \operatorname{Arg} w) = w.$$

En resumen, el conjunto de todas las raíces de la ecuación $w = e^z$ $(w \neq 0)$ se expresa por la fórmula

$$z = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w = \ln|w| + i(\arg w + 2k\pi), \qquad (3.5:2)$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Todos estos puntos están situados en una recta, paralela al eje imaginario, a las distancias entre sí de 2π.

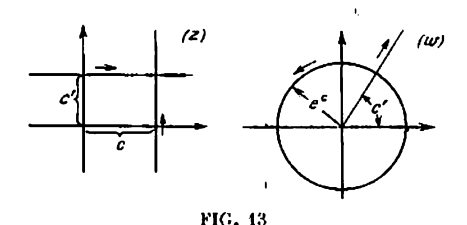


FIG. 13

Vemos, pues, que la función $w = \exp z$ transforma el plano finito z en el recinto que se obtiene del plano finito w excluyendo un punto $w = 0$; esta transformación no es biunívoca, puesto que cada punto $w \neq 0$ posee un conjunto infinito de preimágenes (3.5:2).

Como la derivada de la función exponencial siempre es distinta de cero, esta transformación es conforme en todos los puntos del plano finito z.

Supongamos que z recorre alguna recta paralela a uno de los ejes coordenados (fig. 13). Si ésta es una recta $z = c + it$ paralela al eje imaginario, entonces $w = e^c(\cos t + i \operatorname{sen} t)$, es decir, w estará situado en una circunferencia de radio e^c con el centro en el origen de coordenadas. Además, si el punto z recorre la recta una sola vez, de modo que la ordenada de este punto, igual a t, crece continuamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$, entonces w describirá infinitas veces la circunferencia correspondiente en una misma dirección positiva.

Si el punto z recorre una recta $z = t + ic'$ paralela al eje real, entonces $w = e^t (\cos c' + i \operatorname{sen} c')$ recorrerá, evidentemente, un rayo rectilíneo que parte del origen de coordenadas y forma el ángulo c' con la parte positiva del eje real. En este caso, cuando z recorra la recta una sola vez, de modo que la abscisa de este punto, igual a t, crezca continuamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el punto w describirá una sola vez el rayo correspondiente, de modo que la distancia desde este punto hasta el origen de coordenadas crecerá continuamente desde 0 hasta ∞ (naturalmente, se excluyen tanto un extremo como el otro, puesto que $|w| = e^t$).

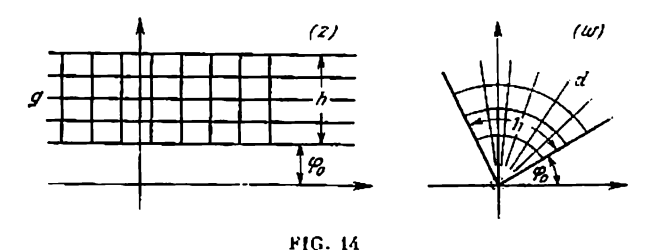


FIG. 14

Resumiendo, *en la transformación del plano z mediante la función $w = e^z$, la familia de rectas paralelas al eje imaginario se transforma en la familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas, y la familia de rectas paralelas al eje real, en la familia de rayos rectilíneos que parten del origen de coordenadas.*

Consideremos la región g formada por el interior de la franja rectilínea de anchura h, $0 < h \leqslant 2\pi$, paralela al eje real. Supongamos que esta franja está limitada por las rectas: $y = \varphi_0$ e $y = \varphi_1$ ($\varphi_1 - \varphi_0 = h$). De lo expuesto anteriormente se deduce que la imagen de la región g en el plano w será la región d formada por el ángulo de magnitud h con el vértice en el origen de coordenadas, limitado por los rayos rectilíneos $\operatorname{Arg} w = \varphi_0 + 2k\pi$ y $\operatorname{Arg} w = \varphi_1 + 2l\pi$ (fig. 14). La correspondencia entre las regiones g y d, establecida mediante la función $w = \exp z$, es ahora biunívoca. Para comprobar esto, es suficiente observar que solamente pueden ser preimágenes de algún punto w de la región d los puntos $\ln |w| + i \operatorname{Arg} w$, que se diferencian entre sí por los valores en la parte imaginaria. Dos puntos de éstos están situados en una recta paralela al eje imaginario a una distancia múltiple de 2π. Pero nuestra franja h tiene una anchura no superior a 2π, por lo cual, puede contener en su interior solamente una preimagen del punto w. Por lo tanto, cada punto $z \in g$ posee solamente una imagen y cada punto

$w \in d$ solamente una preimagen en el interior de g, lo cual demuestra que la transformación es biunívoca.

Vemos, pues, que *la función exponencial* $w = \exp z$ *realiza una transformación biunívoca y conforme de una franja de anchura* $h \leqslant 2\pi$, *paralela al eje real, en un ángulo de magnitud* h *con el vértice en el origen de coordenadas.*

Por esto mismo se recurre a la función exponencial siempre que se necesita transformar conformemente alguna franja rectilínea en el interior de un ángulo.

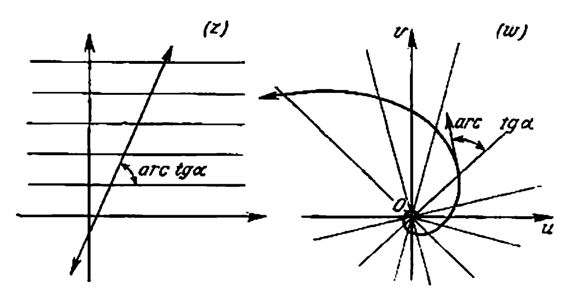


FIG. 15

Si la recta del plano z no es paralela a alguno de los ejes coordenados, su imagen en el plano w no será ya una recta o una circunferencia, sino una espiral logarítmica. En efecto, si esta recta es

$$z = t(1 + i\alpha) + bi, \quad -\infty < t < +\infty$$

(α es el coeficiente angular de la recta y b, la ordenada en el origen), entonces su imagen será la curva

$$w = \exp[t + i(\alpha t + b)] = e^t [\cos(\alpha t + b) + i \operatorname{sen}(\alpha t + b)].$$

Aquí

$$|w| = r = e^t, \quad \varphi = \operatorname{Arg} w = \alpha t + b + 2m\pi,$$

o bien, eliminando el parámetro t: $r = \exp \frac{\varphi - b - 2m\pi}{\alpha}$. Pero Arg w o el ángulo polar φ se determina salvo un entero múltiplo de 2π. Por lo tanto, designando de nuevo $\varphi - 2m\pi$ mediante φ, obtenemos:

$$r = ce^{\frac{\varphi}{\alpha}}, \text{ donde } c = e^{-\frac{b}{\alpha}}.$$

Esta es la ecuación de una espiral l o g a r í t m i c a (fig. 15). Como ésta es la imagen de la recta $z = t(1 + i\alpha) + bi$, la cual

se corta con las rectas paralelas al eje real bajo un ángulo constante igual a arc tg α, y como al transformación es conforme, la espiral logarítmica se cortará bajo el mismo ángulo con las imágenes de dichas rectas, es decir, con todos los rayos que partan del origen de coordenadas. Hemos obtenido la propiedad característica de la espiral logarítmica.

Las transformaciones que se realizan mediante las funciones $w = (z - a)^n$ y $w = \exp z$ experimentan cierta semejanza entre sí. Esta semejanza puede aclararse mediante la fórmula

$$\exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

cuya demostración proponemos hacer al lector como ejercicio.

Examinemos la transformación $w = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n}[z - (-n)]^n$ con relación a la cual la transformaición $w = \exp z$ es límite. En

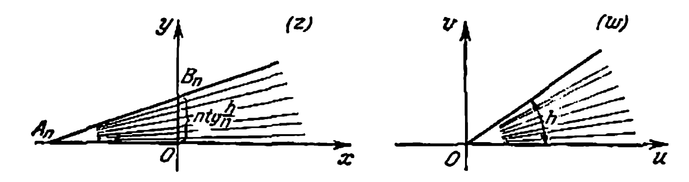


FIG. 16

virtud de lo expuesto en el ap. 3.3, esta función transforma el ángulo de magnitud $\frac{h}{n}$ $(0 < h \leqslant 2\pi)$ con el vértice en el punto A_n $(-n)$, limitado por la parte del eje real $x \geqslant -n$ $(y = 0)$ y el rayo Arg $(z + n) = \frac{h}{n} + 2k\pi$, en el ángulo de magnitud h con el vértice en el origen de coordenadas, limitado por los rayos Arg $w = 0$ y Arg $w = h + 2m\pi$ (fig. 16). Cuando n tiende al infinito, el vértice A_n se aleja al infinito a lo largo de la parte negativa del eje real y la longitud del segmento OB_n tiende al límite $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{tg}\frac{h}{n} = h$, de modo que la posición límite del rayo A_nB_n es la recta $y = h$, la cual, junto con el eje real, limita una franja de anchura h. Además, es evidente que la posición límite para los rayos que parten del vértice del ángulo serán unas rectas paralelas al eje real, y las posiciones límites para los arcos de las circunferencias con centro en el punto A_n serán los segmentos de las rectas perpendiculares al eje real comprendidos en el interior de la franja. Como vemos, el cuadro de la transformación realizada por la función exponencial

puede obtenerse del cuadro correspondiente de la transformación realizada por la función potencial, mediante el paso debido al límite.

3.6. Pasemos ahora a definir el seno y el coseno de un argumento complejo. De las fórmulas

$$\exp(ix) = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \exp(-ix) = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

obtenemos las fórmulas conocidas de Euler:

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i},$$

que, por lo tanto, son válidas para cualquier valor real de x. Como los segundos miembros de estas fórmulas están definidos para cualquier valor complejo de z ($z \neq \infty$) y, evidentemente, son funciones analíticas de z, tenemos aquí dos funciones enteras de z:

$$\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i},$$

que para valores reales de $z = x$ toman valores reales que coinciden con $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, respectivamente. Es natural que, por definición, la primera de ellas se denote mediante $\cos z$, la segunda mediante $\operatorname{sen} z$ y que se llamen *funciones trigonométricas* principales — *coseno y seno de z*:

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}. \qquad (3.6:1)$$

Las fórmulas (3.6:1) se denominan fórmulas de Euler. También se llama fórmula de Euler la que se obtiene al multiplicar ambos miembros de la segunda fórmula por i y al sumar después el resultado con la primera fórmula

$$\exp(iz) = \cos z + i \operatorname{sen} z. \qquad (3.6:2)$$

De las fórmulas (3.6:1) se deduce inmediatamente que $\cos z$ es una función par, y $\operatorname{sen} z$, una función impar:

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z. \qquad (3.6:3)$$

De las mismas fórmulas (3.6:1) se deduce que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ poseen período, igual a 2π (puesto que, al variar z en 2π, los argumentos de las funciones exponenciales en los segundos miembros de las fórmulas varían en $\pm 2\pi i$, los cuales son períodos de la función exponencial). Demostremos que 2π es el período primitivo (principal) de las funciones $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$. En efecto, si ω es un período de la función $\cos z$, se tiene:

$$\cos(z + \omega) = \cos z,$$

y para $z = \frac{\pi}{2}$ obtenemos:

$$\cos\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Pero de aquí se deduce que

$$\exp\left[i\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right] + \exp\left[-i\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0,$$

o bien

$$\exp[i(2\omega + \pi)] = -1.$$

Por consiguiente, según la fórmula (3.5:2) $i(2\omega + \pi) = \ln|-1| + i\operatorname{Arg}(-1) = i(\pi + 2k\pi)$, o sea, $\omega = k\pi$, y como $\cos\omega = \cos 0 = 1$, el número k es par y $\omega = 2k\pi$.

De un modo semejante se demuestra que 2π es también el período primitivo de la función sen z.

Dediquémonos ahora a demostrar los teoremas de adición para las funciones cos z y sen z, es decir, a buscar las relaciones existentes entre $\cos(z_1 + z_2)$ y $\operatorname{sen}(z_1 + z_2)$, de un lado, y $\cos z_1$, $\cos z_2$, sen z_1 y sen z_2, de otro lado (z_1 y z_2 son unos números complejos arbitrarios). Las relaciones pedidas se obtendrán como consecuencia del teorema de adición para la función exponencial.

Sustituyendo en la fórmula (3.6:2) z por $z_1 + z_2$, hallamos:

$$\cos(z_1 + z_2) + i\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \exp[i(z_1 + z_2)] =$$
$$= \exp(iz_1)\cdot\exp(iz_2) = (\cos z_1 + i\operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 + i\operatorname{sen} z_2)$$

o bien, efectuando la multiplicación:

$$\cos(z_1 + z_2) + i\operatorname{sen}(z_1 + z_2) =$$
$$= (\cos z_1\cos z_2 - \operatorname{sen} z_1\operatorname{sen} z_2) + i(\operatorname{sen} z_1\cos z_2 + \cos z_1\operatorname{sen} z_2).$$

Poniendo aquí $-z_1$ y $-z_2$ en lugar de z_1 y z_2 y aplicando las relaciones (3.6:3), resulta:

$$\cos(z_1 + z_2) - i\operatorname{sen}(z_1 + z_2) =$$
$$= (\cos z_1\cos z_2 - \operatorname{sen} z_1\operatorname{sen} z_2) - i(\operatorname{sen} z_1\cos z_2 + \cos z_1\operatorname{sen} z_2).$$

Sumando y restando estas fórmulas término a término, obtendremos:

$$\left.\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1\cdot\cos z_2 - \operatorname{sen} z_1\cdot\operatorname{sen} z_2,\\ \operatorname{sen}(z_1 + z_2) &= \operatorname{sen} z_1\cdot\cos z_2 + \cos z_1\cdot\operatorname{sen} z_2.\end{aligned}\right\} \quad (3.6:4)$$

Estas fórmulas son fundamentales en la teoría de las funciones trigonométricas. En particular, éstas contienen las denominadas «fórmulas de reducción del argumento». En efecto, poniendo en

las fórmulas (3.6:4) $z_1 = z$ y $z_2 = \frac{\pi}{2}$, obtenemos:

$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} z \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -\operatorname{sen} z,$$

$$\operatorname{sen}\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} z \cos\frac{\pi}{2} + \cos z \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \cos z.$$

Haciendo $z_1 = z$ y $z_2 = \pi$, hallamos otro par de fórmulas de reducción:

$$\cos(z+\pi) = -\operatorname{sen} z,$$

$$\operatorname{sen}(z+\pi) = -\cos z,$$

etc.

Poniendo en la primera de las fórmulas (3.6:4) $z_1 = z$ y $z_2 = -z$, obtenemos la siguiente relación entre sen z y cos z:

$$1 = \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z. \tag{3.6:5}$$

Ya vemos que todas las relaciones conocidas de la trigonometría entre las funciones trigonométricas de argumento real se conservan también en el campo complejo. No obstante, de las fórmulas (3.6:5) no se puede sacar la conclusión de que $|\cos z| \leqslant 1$ y $|\operatorname{sen} z| \leqslant 1$, puesto que, por lo general, $\cos^2 z$ y $\operatorname{sen}^2 z$ no son números reales no negativos.

Con las funciones trigonométricas sen z y cos z están estrechamente ligadas las *funciones hiperbólicas* ch z y sh z, definidas por las fórmulas

$$\operatorname{ch} z = \frac{\exp z + \exp(-z)}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2}. \tag{3.6:6}$$

Cuando $z = x$ es real, estas funciones toman, evidentemente, valores reales y coinciden entonces con las funciones ch x y sh x, conocidas en el análisis. La primera de éstas (es par) decrece en el semiintervalo $-\infty < x \leqslant 0$ desde ∞ hasta 1 y después crece desde 1 hasta ∞ en el semiintervalo $0 \leqslant x < \infty$; la segunda (es impar) crece en todo el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$ desde $-\infty$ hasta $+\infty$, anulándose para $x = 0$.

Comparando las fórmulas (3.6:6) con las fórmulas (3.6:1) se deduce que entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas existen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz), \quad \operatorname{sh} z = -i \operatorname{sen}(iz). \tag{3.6:7}$$

De aquí, en particular, se deduce que

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = [\cos(iz)]^2 + [\operatorname{sen}(iz)]^2 = 1. \tag{3.6:8}$$

Determinemos las partes reales e imaginarias, y también los módulos de las funciones cos z y sen z. Poniendo $z = x + iy$, obte-

nemos según las fórmulas (3.6:4) y (3.6:7):

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y, \qquad (3.6:4')$$

$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cos(iy) + \cos x \operatorname{sen}(iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

De aquí

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Re}[\cos(x+iy)] = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im}[\cos(x+iy)] = -\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y, \\ &\operatorname{Re}[\operatorname{sen}(x+iy)] = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im}[\operatorname{sen}(x+iy)] = \cos x \operatorname{sh} y. \end{aligned}\right\} \qquad (3.6:9)$$

Para los módulos de las funciones cos z y sen z obtenemos las siguientes expresiones:

$$|\cos z| = \underset{+}{\sqrt{(\cos x \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\operatorname{sen} x \operatorname{sh} y)^2}} =$$

$$= \underset{+}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y\,(1-\operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y}} = \underset{+}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sen}^2 x}}$$

y análogamente, $|\operatorname{sen} z| = \underset{+}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x}}$.

Así, pues,

$$|\cos z| = \underset{+}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sen}^2 x}}, \quad |\operatorname{sen} z| = \underset{+}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x}}. \qquad (3.6:10)$$

De aquí se deducen las desigualdades:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{ch} y \geqslant |\cos z| \geqslant \underset{+}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = |\operatorname{sh} y|, \\ &\underset{+}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \operatorname{ch} y \geqslant |\operatorname{sen} z| \geqslant |\operatorname{sh} y|. \end{aligned}\right\} \qquad (3.6:11)$$

Por cierto, estas desigualdades se deducen inmediatamente de las fórmulas (3.6:1). Por ejemplo:

$$|\cos z| \leqslant \frac{|\exp(iz)| + |\exp(-iz)|}{2} = \frac{\exp(-y) + \exp y}{2} = \operatorname{ch} y,$$

$$|\cos z| \geqslant \left| \frac{|\exp(iz)| - |\exp(-iz)|}{2} \right| = \frac{|\exp(-y) - \exp y|}{2} = |\operatorname{sh} y|.$$

Vemos que los módulos de las funciones cos z y sen z crecen indefinidamente junto con $|y|$ a medida que z se aleja del eje real, y que se cumplen las siguientes fórmulas asintóticas:

$$|\cos z| \approx \frac{1}{2} \exp|y|, \quad |\operatorname{sen} z| \approx \frac{1}{2} \exp|y|.$$

En la fig. 17 está representada la superficie: $u = |\operatorname{sen} z|$, denominada r e l i e v e d e l s e n o *). Como $\operatorname{sh} y \neq 0$ para $y \neq 0$,

*) El dibujo está adoptado de la «Tabla de funciones» de Jahnke y Emde.

de las desigualdades (3.6:11) se deduce luego que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ no pueden anularse fuera del eje real, es decir, que las ecuaciones $\cos z = 0$ y $\operatorname{sen} z = 0$ no poseen raíces imaginarias. Por consiguiente,

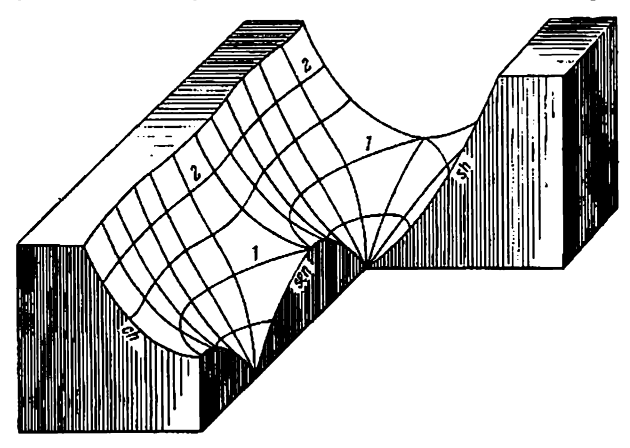


FIG. 17

todas las raíces de estas ecuaciones se reducen a las conocidas en la trigonometría:

$$z = (2k-1)\frac{\pi}{2} \text{ para la ecuación } \cos z = 0$$

y

$$z = k\pi \text{ para la ecuación } \operatorname{sen} z = 0.$$

Señalemos también las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas:

$$(\cos z)' = \left[\frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}\right]' = i\,\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2} = -\operatorname{sen} z,$$

$$(\operatorname{sen} z)' = \cos z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{ch} z.$$

3.7. Ocupémonos del estudio del comportamiento geométrico de las funciones trigonométricas. En este caso podemos limitarnos a estudiar la transformación

$$w = \cos z,$$

puesto que la transformación $w = \operatorname{sen} z$ puede expresarse en la forma

$$w = -\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

y, por consiguiente, se reduce a la traslación del plano en dirección del eje real $z_1 = z + \frac{\pi}{2}$, a la transformación $z_2 = \cos z_1$ y, finalmente, a la rotación de todo el plano alrededor del origen de coordenadas en el ángulo π: $w = -z_2$.

Examinemos primero las preimágenes del punto w en la transformación $w = \cos z$, es decir, las raíces de la ecuación

$$w = \cos z, \tag{3.7:1}$$

donde w es un número complejo arbitrario, distinto de ∞. Sustituyendo $\cos z$ según la fórmula de Euler (3.6:1) y poniendo para abreviar

$$\exp(iz) = t, \tag{3.7:2}$$

para determinar t obtenemos la ecuación

$$w = \frac{t + t^{-1}}{2}$$

o bien

$$t^2 - 2wt + 1 = 0, \tag{3.7:3}$$

de donde

$$t_j = w + \sqrt{w^2 - 1} \quad (j = 1, 2) \tag{3.7:4}$$

(ante la raíz cuadrada no ponemos el signo doble, puesto que esta raíz misma posee dos valores). Evidentemente, el producto de los números t_1 y t_2 es igual a 1, por lo cual cada uno de ellos es distinto de cero. Designando uno de estos mediante τ y el otro mediante $\frac{1}{\tau}$, obtenemos de (3.7:2) dos ecuaciones para determinar z:

$$\exp(iz) = \tau \; (\neq 0) \quad \text{y} \quad \exp(iz) = \frac{1}{\tau} \; (\neq 0). \tag{3.7:5}$$

Según el ap. 3.5, cada una de estas ecuaciones posee infinitas soluciones, que se expresan según la fórmula (3.5:2)

$$iz' = \ln|\tau| + i \operatorname{Arg} \tau$$

y

$$iz'' = \ln\left|\frac{1}{\tau}\right| + i \operatorname{Arg} \frac{1}{\tau} = -(\ln|\tau| + i \operatorname{Arg} \tau),$$

o bien,

$$z' = \operatorname{Arg} \tau - i \ln|\tau| \quad \text{y} \quad z'' = -(\operatorname{Arg} \tau - i \ln|\tau|). \tag{3.7:6}$$

Hemos obtenido dos conjuntos infinitos de puntos, situados sobre el par de rectas $y = \pm \ln|\tau|$, paralelas al eje real. En cada una de éstas los puntos vecinos z', respectivamente z'', están situados

a la distancia 2π unos de otros; además, para cada punto z', situado en la recta $y = -\ln|\tau|$, existe en la otra recta $y = \ln|\tau|$ un punto z'' simétrico con z' respecto del origen de coordenadas (véase la fig. 18, donde $|\tau| < 1$). Cuando $w = \pm 1$ las raíces τ y $\frac{1}{\tau}$ de la ecuación (3.7:3) son iguales a ± 1. En este caso, ambas rectas se confunden con el eje real y los dos conjuntos de puntos z' y z'' también coinciden.

Resumiendo, la ecuación (3.7:1) siempre posee soluciones y el conjunto de las soluciones siempre es infinito. De aquí se deduce, en primer lugar, que la función $w = \cos z$ transforma el plano finito

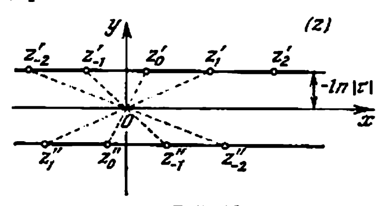


FIG. 18

z sobre todo el plano (finito) w, y, en segundo lugar, que cada punto w posee infinitas preimágenes en el plano z. Esta transformación es conforme en todos los puntos en los cuales $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z \neq 0$, es decir, para $z \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Supongamos que z recorre una recta cualquiera paralela a uno de los ejes de coordenadas. Si ésta es la recta $z = c + it$, paralela al eje imaginario, entonces la imagen será la curva L: $w = \cos z = \cos c \operatorname{ch} t - i \operatorname{sen} c \operatorname{sh} t$ (véase la primera de las fórmulas (3.6:4')). Si $c = k\pi$, obtenemos $w = \cos k\pi \operatorname{ch} t = (-1)^k \operatorname{ch} t$ $(-\infty < t < +\infty)$ o sea, w recorre dos veces la parte $u \geqslant 1$ del eje real cuando k es par y la parte $u \leqslant -1$ cuando k es impar. Si $c = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ obtenemos $w = (-1)^k i \operatorname{sh} t$, o sea, w describe una vez todo el eje imaginario en dirección del crecimiento de u cuando k es par y en dirección del decrecimiento de u cuando k es impar.

Supongamos ahora que $c \neq m\frac{\pi}{2}$ (para cualquier entero m). Escribamos la ecuación de la curva L en la forma:

$$u = \cos c \cdot \operatorname{ch} t, \quad v = -\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < \infty) \tag{3.7:7}$$

o bien, eliminando el parámetro t ($\cos c \neq 0$ y $\operatorname{sen} c \neq 0$):

$$\frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2 c} = 1. \tag{3.7:8}$$

Hemos obtenido la ecuación de una hipérbola con los semiejes $|\cos c|$ y $|\operatorname{sen} c|$ y con los focos en los puntos ± 1.

Sin embargo, no hay que creer que la curva L coincide con toda esta hipérbola. De la representación paramétrica (3.7:7) de L se deduce que u conserva todo el tiempo un mismo signo, que coincide con el signo de $\cos c$, mientras que v varía de una manera continua y monótona desde $-\infty$ hasta $+\infty$ (o al revés). De aquí se deduce que la curva L solamente coincide con una de las dos ramas de la hipérbola (3.7:8), precisamente con la rama de la derecha si $\cos c > 0$,

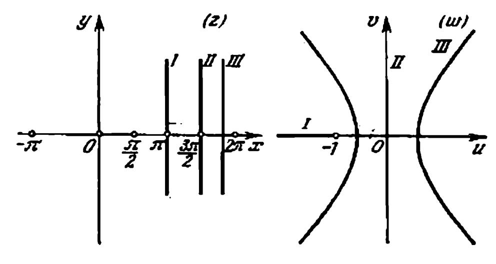


FIG. 19

y con la rama de la izquierda si $\cos c < 0$ (fig. 19, en la cual en la mitad de la derecha están representadas las imágenes de tres rectas del plano z:

$$\text{I } (x=\pi), \quad \text{II } \left(x=\frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad \text{III } \left(x=c, \text{ donde } \frac{3\pi}{2}<c<2\pi\right)\Big) .$$

Además, la transformación de la recta $z = c + it$ en la rama correspondiente es biunívoca y cada una de las dos semirrectas, en las que se divide nuestra recta por el eje real, se transforma biunívocamente en una de las semirramas, en las que se divide la rama de la hipérbola en el vértice.

Supongamos ahora que z describe una recta l': $z = t + ic'$, paralela al eje real. Su imagen será la curva L':

$$w = \cos z = \cos t \operatorname{ch} c' - i \operatorname{sen} t \operatorname{sh} c'.$$

Cuando $c' = 0$, l' es el eje real y L' tiene la ecuación $w = \cos t$ $(-\infty < t < +\infty)$; por consiguiente, w describe infinitas veces el segmento $-1 \leqslant u \leqslant 1$ del eje real, correspondiéndole a cada segmento de la recta l' de longitud 2π un doble recorrido del segmento indicado. Supongamos que $c' \neq 0$; entonces escribimos la ecuación de la curva L' en la forma:

$$u = \cos t \operatorname{ch} c', \quad v = -\operatorname{sen} t \operatorname{sh} c', \qquad (-\infty < t < \infty) \quad (3.7:9)$$

y, eliminando el parámetro t (ch $c' \neq 0$, sh $c' \neq 0$), obtenemos:

$$\frac{u^2}{\mathrm{ch}^2 c'} + \frac{v^2}{\mathrm{sh}^2 c'} = 1. \qquad (3.7:10)$$

Esta es la ecuación de una elipse con los semiejes $|\mathrm{ch}\, c'|$ y $|\mathrm{sh}\, c'|$ y con los focos en los puntos ± 1. De la representación paramétrica (3.7:9) de la curva L' se deduce que el punto w recorre infinitas veces la elipse en una misma dirección, correspondiendo cada recorrido a un desplazamiento del punto z a lo largo de la recta

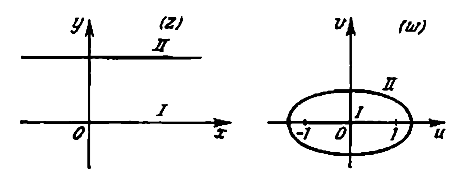


FIG. 20

$z = t + ic'$ a la distancia 2π (fig. 20, donde en la mitad de la derecha están representadas las imágenes de dos rectas del plano z: I ($y = 0$) y II ($y = c \neq 0$)).

Resumiendo, *la transformación $w = \cos z$ hace corresponder a la red ortogonal de rectas paralelas a los ejes coordenados, la red de elipses e hipérbolas con los focos comunes* ± 1. Como la transformación es conforme en todos los puntos del plano z, a excepción de los puntos de la forma $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) (las imágenes de los cuales son, precisamente, los focos indicados), la red de elipses e hipérbolas homofocales también tiene que ser ortogonal.

3.8. Tomemos en el plano z una región g que se transforme biunívocamente mediante la función $w = \cos z$ en la región correspondiente del plano w. Esta región se puede elegir de muchos modos. Hay que preocuparse solamente de que a ésta no le pertenezcan dos preimágenes de un mismo punto w. Elijamos por g, por ejemplo, la semifranja de anchura h ($0 < h \leqslant 2\pi$), paralela al eje imaginario, con la base en el eje real (fig. 21). Evidentemente, ésta satisface a las condiciones pedidas. En efecto, si para algún punto $z_0 \in g$, $\cos z_0 = w_0$, entonces, como ya se sabe (pág. 121—122), todas las demás preimágenes del punto w_0 en el plano z tienen que estar situadas, en una de sus partes, en la recta paralela al eje real que pasa por el punto z_0, y en la otra parte, en la recta simétrica a la primera con respecto al eje real. Pero las preimágenes situadas en la primera recta están a unas distancias del punto z_0 que son múltiples de 2π; como la anchura de la semifranja no es superior a 2π, ninguna de

éstas se situará dentro de la semifranja o en su frontera. La segunda recta carece de puntos comunes con la semifranja. En resumen, la función $w = \cos z$ transforma biunívoca y conformemente la región g en cierto conjunto de puntos del plano w.

Para construir este conjunto, hagamos describir al punto z la frontera γ de la región g de modo que éste recorra continua y sucesivamente, primero el lado I de la semifranja, después la base II y, finalmente, el otro lado III de la semifranja. Entonces, el punto

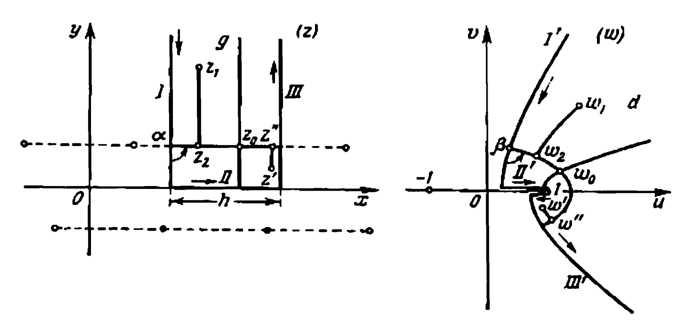


FIG. 21

$w = \cos z$ describirá también continua y sucesivamente la semirrama (I') de una hipérbola, después pasará por la parte (II') de la curva que es la imagen del eje real y se representa por el segmento $-1 \leqslant u \leqslant 1$, $v = 0$ (como la longitud de la base de la semifranja no es superior a 2π, el punto w recorrerá el último segmento no más de dos veces), y, finalmente, pasará una semirrama más (III') de cierta hipérbola.

La imagen completa obtenida en el plano w de la frontera de la región g —designémosla mediante Γ— divide el plano en dos regiones: afirmamos que una de éstas es la imagen buscada d de la región g. Indiquemos dos métodos generales mediante los cuales es posible señalar cuál de las regiones halladas es precisamente la imagen de la región g.

El primer método consiste en que se toma algún punto $z_0 \in g$ y se señala su imagen $w_0 = \cos z_0$. Esta imagen no puede pertenecer al circuito Γ, ya que en caso contrario una de las preimágenes del punto w_0 pertenecería a la región g y la otra, a la frontera γ de esta región, lo cual, como ya se vio, es imposible. Por consiguiente, el punto w_0 se situará en una de las regiones indicadas anteriormente. Esta región será la buscada.

El otro método consiste en que se señala el sentido del recorrido de la frontera γ de la región g. Esto se puede hacer, por ejemplo, figurándose un observador que se desplaza a lo largo de la frontera de la región g junto con el punto z y que anota hacia qué lado del mismo se encuentra el interior de la región. Durante el recorrido admitido en nuestra figura, la región g quedará, evidentemente, a la izquierda del observador. Obliguemos ahora al observador a desplazarse por Γ junto con el punto $w = \cos z$. Entonces verá la imagen de la región g del mismo lado, es decir, en nuestro ejemplo, a su izquierda.

Expongamos la demostración de todas estas afirmaciones. Supongamos que para el punto $z_0 \in g$ su imagen w_0 pertenece a la región d. Demostremos que, entonces, para cualquier otro punto $z_1 \in g$ su imagen w_1 también pertenece a la misma región d. Tracemos por el punto z_1 una recta paralela al eje imaginario hasta la intersección en el punto z_2 con la recta que pasa por el punto z_0 y es paralela al eje real. Al moverse desde el punto z_0 por el segmento de la última recta hacia z_2, el punto correspondiente $w = \cos z$ se moverá por el arco de elipse con los focos ± 1, que pasa por w_0 hacia el punto $w_2 = \cos z_2$. En el camino no se encontrará con ningún punto de la frontera Γ de la región d. En caso contrario, habría un punto w que sería imagen de uno de los puntos situados en γ y también, imagen de algún punto de la región g (del segmento z_0z_2), lo cual, como es sabido, es imposible. Así, pues, todo el arco de elipse w_0w_2 pertenece a la región d. También pertenece a ésta el punto w_2. Supongamos ahora que z se mueve por el segmento de la recta desde el punto z_2 hasta el punto z_1. El punto correspondiente $w = \cos z$ se moverá por el arco de una hipérbola con los focos ± 1, desde el punto w_2 hasta el punto $w_1 = \cos z_1$, y como de nuevo no es posible encontrarse con ningún punto de Γ, todo este arco de hipérbola, inclusive su extremo w_1, pertenecerá a la región d. Así, pues, la imagen de cualquier punto $z_1 \in g$ pertenece a la misma región d a la que pertenece también la imagen del punto $z_0 \in g$. Por consiguiente, toda la imagen de la región g está contenida en d. No queda más que demostrar que dicha imagen coincide con d, para lo cual hay que verificar que cada punto $w' \in d$ es la imagen de cierto punto $z' \in g$. Tracemos por w' un arco de hipérbola con los focos ± 1 hasta la intersección en el punto w'' con el arco de la elipse que pasa por el punto w_0. De este modo, obtenemos un arco de elipse w_0w'' y un arco de hipérbola $w''w'$ pertenecientes por completo a d. Hagamos describir al punto z el segmento de la recta paralela al eje real que pasa por el punto z_0, desde el punto de intersección con el lado I hasta el punto de intersección con el lado III. El punto correspondiente describirá un arco de elipse, comprendido en la región d, desde el punto de intersección con la semirrama de la hipérbola I'

hasta el punto de intersección con la semirrama III', y, por consiguiente, pasará por el punto w''. De aquí se deduce que el segmento indicado de recta contiene la preimagen z'' del punto w''. Describamos, finalmente, la semirrecta paralela al eje imaginario que pasa por el punto z'. Su imagen será la semirrama de la hipérbola con los focos ± 1, que pasa por el punto w''. Pero esta semirrama pasa por el punto w'. Por consiguiente, la semirrecta indicada contiene a la preimagen z' del punto w'.

Queda demostrado que w' pertenece a la imagen g, de donde, en virtud de la arbitrariedad del punto w', se deduce la coincidencia de la imagen de la región g con la región d. Ahora ya es fácil argumentar el método de elección de la región que es la imagen de la región g, basándose en la correspondencia entre los recorridos de los circuitos γ y Γ. Supongamos, por ejemplo, que recorremos el lado I de la semifranja g en la dirección señalada por la flecha, de modo que la región g se mantiene a nuestra izquierda. En algún punto $\alpha \in$ I tracemos hacia dentro de la región un segmento de la normal a la frontera. En este caso, el segmento irá por una recta paralela al eje real. La imagen de este segmento tiene que pertenecer a la imagen de la región g. En el caso considerado ésta representa un arco de la elipse que pasa por un punto $\beta = \cos \alpha$, situado en la semirrama de la hipérbola Γ, y, por consiguiente, por imagen de la región g se debe elegir aquella región (ya se ha verificado que la imagen de la región g es una de las regiones limitadas por el circuito Γ) hacia la cual está dirigida este arco elíptico. Recordemos ahora que en la transformación conforme no sólo se conservan los valores de los ángulos sino también los sentidos de sus direcciones. También tiene que conservarse el sentido de la dirección del ángulo comprendido entre la parte de la frontera γ que parte del punto α en la dirección del recorrido y la normal interior. Pero la indicación de que durante el recorrido del circuito γ la región se mantiene a la izquierda del observador es equivalente al hecho de que el observador, situado en el punto α, tiene que girar un ángulo recto de la derecha hacia la izquierda para ver por la normal el interior de la región g. Debido a esto, el observador que recorre Γ y se encuentra en el punto $\beta = \cos \alpha$ también tiene que girar un ángulo recto de la derecha hacia la izquierda para ver en la dirección de la imagen de la normal (del arco de elipse) el interior de la imagen de la región g. Esto significa que la imagen buscada de la región g estará situada a la izquierda del observador, lo cual se afirmaba.

Señalemos en conclusión que, por lo general, la forma de la región d varía junto con la variación de la disposición y anchura de la semifranja g. En la fig. 22 se ha representado el caso que tiene lugar cuando la base de la semifranja pertenece a uno de los inter-

valos de la forma $(k\pi, (k+1)\pi)$. El caso representado en la fig. 21, que se caracteriza por que la base de la franja, al hacer la transfor

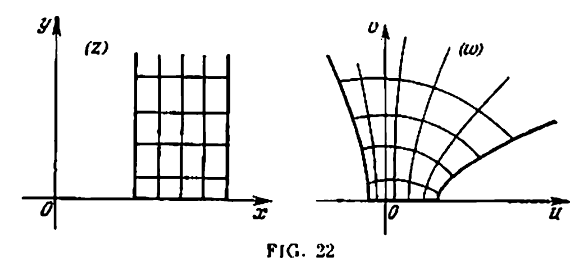


FIG. 22

mación, parece partirse en el punto $w = 1$ o $w = -1$, tiene lugar cuando la base de la semifranja contiene en su interior un punto de la forma $k\pi$.

§ 4. FUNCIONES RACIONALES. FUNCION HOMOGRAFICA. GEOMETRIA DE LOBACHEVSKI. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

4.1. En el párrafo precedente se estudiaron unas cuantas representantes más elementales de la clase de funciones enteras. Siguiendo el orden de aumento de generalidad, después de la clase de funciones enteras viene la clase de f u n c i o n e s m e r o m o r f a s. Así se llaman las funciones que pueden expresarse en forma de una razón de dos funciones enteras. El vocablo mismo «meromorfa» proviene de las palabras griegas μερίσ (parto, fracción) y μορφή (forma) y significa «semejante a una fracción». Está claro que cada función entera $f(z)$ es a la vez meromorfa, puesto que puede expresarse en la forma $\frac{f(z)}{1}$. Naturalmente, lo recíproco no es justo, como muestra el ejemplo de la función $\frac{1}{z}$. Esta función es meromorfa pero no es entera, ya que toma el valor ∞ en el origen de coordenadas.

Las representantes más simples de la clase de las funciones meromorfas en el sentido propio de esta palabra (es decir, que por lo general no se reducen a las enteras), son las f u n c i o n e s r a c i o n a l e s. Así se llama toda función que puede expresarse en forma de una razón de dos polinomios:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m} \qquad (4.1:1)$$

(el denominador no es idénticamente igual a cero). Supondremos que la fracción $\frac{P(z)}{Q(z)}$ es irreducible, es decir, que las ecuaciones $P(z) = 0$ y $Q(z) = 0$ carecen de raíces comunes. Supongamos, además, que $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$, es decir, que $P(z)$ y $Q(z)$ son de grados (¡exactos!) n y m, respectivamente. Designemos por $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ todas las raíces distintas entre sí de la ecuación $P(z) = 0$, y por $k_1, k_2, \ldots, k_p$, sus órdenes de multiplicidad; del mismo modo, sean $\beta_1, \ldots, \beta_q$ todas las raíces distintas entre sí de la ecuación $Q(z) = 0$, y $l_1, \ldots, l_q$, sus órdenes de multiplicidad. Entonces (4.1:1) puede escribirse así:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n (z-\alpha_1)^{k_1} \ldots (z-\alpha_p)^{k_p}}{b_m (z-\beta_1)^{l_1} \ldots (z-\beta_q)^{l_q}}. \qquad (4.1:2)$$

Evidentemente, cualquiera de los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ es distinto de cualquiera de los números $\beta_1, \ldots, \beta_q$; en caso contrario los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ no serían primos entre sí. Además, $k_1 + \ldots + k_p = n$ y $l_1 + \ldots + l_q = m$. En cada uno de los puntos $z = \alpha_s$ la función $f(z)$ se anula y en cada uno de los puntos $z = \beta_t$ toma el valor ∞. Los puntos α_s se llaman *ceros* y los puntos β_t, *polos* de la función racional $f(z)$. Los números k_s y l_t que les corresponden, se llaman *órdenes de multiplicidad de los ceros o de los polos*. Si el orden de multiplicidad k_s (o l_t) es igual a uno, el cero α_s (o el polo β_t) se llama *simple*, si el orden de multiplicidad es mayor que uno, se llama *múltiple*.

De esta definición se deduce que los ceros de la función $f(z)$ son polos de la función $\frac{1}{f(z)}$, y los polos de $f(z)$ son ceros de $\frac{1}{f(z)}$ conservándose sus órdenes respectivos de multiplicidad al pasar de $f(z)$ a $\frac{1}{f(z)}$ (es decir, que el cero de un orden determinado se convierte en polo del mismo orden, y viceversa). La función racional está definida en los puntos β_t por las condiciones $f(\beta_t) = \infty$ $(t = 1, 2, \ldots, q)$; definámosla ahora en el punto del infinito haciendo $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$. Obtenemos, evidentemente,

1) $f(\infty) = 0$ si $n < m$,

2) $f(\infty) = \frac{a_n}{b_n}$ si $n = m$,

3) $f(\infty) = \infty$ si $n > m$.

En el caso 1) se dirá que $f(z)$ tiene un cero en el punto del infinito, y en el caso 3), que tiene un polo en el punto del infinito. Para atribuir a este punto un orden de multiplicidad determinado,

hagamos la transformación previa $z = \frac{1}{\zeta}$, que hace corresponder a $z = \infty$ el punto $\zeta = 0$. Entonces resulta:

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a_0 + a_1 \frac{1}{\zeta} + \ldots + a_n \frac{1}{\zeta^n}}{b_0 + b_1 \frac{1}{\zeta} + \ldots + b_m \frac{1}{\zeta^m}} =$$

$$= \frac{\zeta^m}{\zeta^n} \cdot \frac{a_n + a_{n-1}\zeta + \ldots + a_0\zeta^n}{b_m + b_{m-1}\zeta + \ldots + b_0\zeta^m} = \varphi(\zeta).$$

Se distinguen los siguientes casos:

1) $n < m$; entonces

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta^{m-n}(a_n + a_{n-1}\zeta + \ldots + a_0\zeta^n)}{b_m + b_{m-1}\zeta + \ldots + b_0\zeta^m}.$$

Esta función racional posee un cero de orden $m - n$ en el punto $\zeta = 0$. De acuerdo a esto, se dirá que $f(z)$ posee un cero del mismo orden $m - n$ en el punto $z = \infty$.

2) $n = m$; entonces

$$\varphi(\zeta) = \frac{a_n + a_{n-1}\zeta + \ldots + a_0\zeta^n}{b_n + b_{n-1}\zeta + \ldots + b_0\zeta^n}.$$

Esta función racional no tiene ni cero ni polo en el punto $\zeta = 0$ $\left(\text{se hace aquí igual a } \frac{a_n}{b_n}\right)$. De acuerdo a esto, $f(z)$ tampoco tiene cero ni polo en el punto $z = \infty$ $\left(\text{se hace aquí igual a } \frac{a_n}{b_n}\right)$.

3) $n > m$; entonces

$$\varphi(\zeta) = \frac{a_n + a_{n-1}\zeta + \ldots + a_0\zeta^n}{\zeta^{n-m}(b_m + b_{m-1}\zeta + \ldots + b_0\zeta^m)}.$$

Esta función racional tiene un polo de orden $n - m$ en el punto $\zeta = 0$. Respectivamente, se dirá que $f(z)$ tiene un polo del mismo orden $n - m$ en el punto $z = \infty$.

Determinemos el número total de ceros o de polos de la función racional en el plano ampliado, contando cada uno de ellos de acuerdo a su orden de multiplicidad. Ante todo, obtenemos $k_1 + \ldots + k_p = n$ ceros finitos. Si $n \geqslant m$ no hay cero en el infinito. Si $n < m$, obtenemos otro cero en el punto del infinito, de orden $m - n$, y el número total de ceros se hace igual a $n + (m - n) = m$. Si en todos los casos designamos con N el mayor de los números m y n:

$$N = \max(m, n),$$

y lo llamamos **orden de la función racional** $f(z)$, obtenemos que el número total de ceros de la función $f(z)$ en el plano ampliado es igual al orden de esta función. El número total de polos resulta exactamente igual. Precisando, si $n \leqslant m$, la función $f(z)$ no tiene polo en el punto del infinito y todos sus polos son finitos. Pero el número de estos últimos es $l_1 + \ldots + l_q = m = N$. Si $n > m$, además de los m polos finitos, la función $f(z)$ posee también un polo de orden $n - m$ en el punto del infinito. Por consiguiente, su número total de polos es $m + (n - m) = n = N$.

Sea ahora A un número complejo arbitrario, distinto de 0 y de ∞. Averiguemos todas las raíces de la ecuación

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = A \qquad (4.1:3)$$

o, lo que es lo mismo, las raíces de la ecuación

$$F(z) = \frac{P(z) - AQ(z)}{Q(z)} = 0. \qquad (4.1:4)$$

Si se atribuye a cada raíz de la ecuación (4.1:3) el mismo orden de multiplicidad que tiene esta misma raíz en la ecuación (4.1:4), se puede afirmar, según lo anterior, que el número total de raíces de la ecuación (4.1:3), igual al número de ceros de la función $F(z) = \frac{P(z) - AQ(z)}{Q(z)}$, tiene que coincidir con el orden de esta última. Pero, si $n > m$, el grado del polinomio $P(z) - AQ(z)$ es igual a n y, por consiguiente, el orden de la función $F(z)$ también es igual a n, es decir, coincide con el orden de la función $f(z)$. Cuando $n = m$, el grado del polinomio $P(z) - AQ(z)$ no es superior a n, y como el grado del polinomio $Q(z)$ es igual a n, el orden de la función $F(z)$ es igual a n, o sea, de nuevo coincide con el orden de la función $f(z)$. Finalmente, si $n < m$, el grado del polinomio $P(z) - AQ(z)$ es igual a m ($A \neq 0$), y como el grado del polinomio $Q(z)$ también es igual a m, el orden de la función $F(z)$ es igual a m. Por consiguiente, en este caso, el orden de la función $F(z)$ también coincide con el orden de la función $f(z)$. Resumiendo, en todos los casos, los órdenes de las funciones $f(z)$ y $F(z)$ son iguales, de donde se deduce que *el número total de raíces de la ecuación* (4.1:3) *en el plano ampliado es igual para todos los valores A y coincide con el orden N de la función $f(z)$*.

Queda revelado, pues, que la conocida propiedad de los polinomios de tomar cualquier valor A en un mismo número de puntos del plano, igual al grado del polinomio, se extiende a cualquier función racional sustituyendo el grado por el orden.

Como ejemplo, examinemos la función $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$. Esta tiene dos ceros simples: $\pm i$ y dos polos simples: ± 1. Para el valor $A = 1$ la ecuación

$$\frac{z^2+1}{z^2-1} = 1 \quad \text{o sea} \quad \frac{2}{z^2-1} = 0$$

no tiene raíces. Pero tiene una raíz doble en el ∞, puesto que el grado del denominador de la fracción es dos unidades superior al grado del numerador.

De los resultados obtenidos se deduce que *una función racional $w = f(z)$ de orden N transforma el plano ampliado en el plano ampliado de tal modo, que cada punto $w = f(z)$ posee generalmente N preimágenes en el plano z*. Para algunos valores w el número de preimágenes distintas entre sí puede resultar menor que N. Así, por ejemplo, si $f(z)$ tiene ceros múltiples o polos múltiples, a los puntos $w = 0$ o $w = \infty$ les corresponderán menos de N distintas preimágenes en el plano z.

Los demás valores w ($w \neq 0$, $w \neq \infty$) de este género se obtienen buscando las condiciones según las cuales la ecuación

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = w \quad \text{o sea} \quad \frac{P(z) - wQ(z)}{Q(z)} = 0$$

tiene raíces múltiples. Todas las raíces múltiples finitas de la última ecuación coinciden con las raíces múltiples de la ecuación

$$P(z) - wQ(z) = 0,$$

y, por consiguiente, satisfacen también a la ecuación

$$P'(z) - wQ'(z) = 0$$

y, finalmente, a la ecuación de grado no superior a $m+n-1$,

$$P(z)\,Q'(z) - P'(z)\,Q(z) = 0. \qquad (4.1:5)$$

Esta última posee no más de $m+n-1$ raíces distintas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$, a las cuales corresponden no más de $m+n-1$ distintos valores

$$w_j = \frac{P(\gamma_j)}{Q(\gamma_j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

que poseen un número menor que N de preimágenes.

Obsérvese que todos los ceros múltiples finitos de $f(z)$ satisfacen a las ecuaciones

$$P(z) = 0 \quad \text{y} \quad P'(z) = 0,$$

y los polos múltiples finitos, a las ecuaciones

$$Q(z) = 0 \quad \text{y} \quad Q'(z) = 0.$$

Por consiguiente, tanto unos como otros satisfacen también a la ecuación (4.1:5), o sea, se encuentran entre sus raíces γ_j. Debido a esto, los números 0 y ∞ también se encontrarán entre los r números w_j (cuando existan ceros múltiples finitos o polos múltiples finitos). Sin embargo, puede ocurrir que la ecuación $f(z) = f(\infty)$ posea raíces múltiples solamente en el punto del infinito; entonces el número $f(\infty)$ (posiblemente, igual a cero o a infinito) no se encontrará entre los números w_j $(j = 1, \ldots, r)$ y, por consiguiente, habrá que añadirle a éstos. El número de puntos obtenidos no será superior a $m + n$.

Resumiendo, *en todos los casos, el número total de aquellos puntos del plano w que poseen, cada uno de ellos, menos de N preimágenes, no es superior a* $m + n$. El conjunto de todas las preimágenes de estos puntos consta de los puntos $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$; a veces, a estos puntos hay que agregar también el punto ∞.

Si z es distinto de los polos de la función $f(z)$ y del punto del infinito, la función $f(z)$ posee derivada

$$f'(z) = \frac{P'(z)\,Q(z) - P(z)\,Q'(z)}{[Q(z)]^2};$$

para que ésta no sea igual a cero, hay que exigir también que el punto z no coincida con ninguno de los puntos γ_j $(j = 1, \ldots, r)$. De aquí se deduce que la transformación $w = f(z)$ es conforme en todos los sitios, a excepción, posiblemente, de un número finito de puntos.

Dejamos a cuenta del lector la demostración de que la transformación es conforme también en cualquier polo simple de la función $f(z)$, y también en el punto del infinito, suponiendo que $z = \infty$ no es una raíz múltiple de la ecuación $f(z) = f(\infty)$. Del mismo modo se puede demostrar que la transformación no es conforme en cada uno de los puntos γ_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$, a los cuales hay que añadir también $\gamma_0 = \infty$, si $z = \infty$ es una raíz múltiple de la ecuación $f(z) = f(\infty)$. Precisamente, el ángulo con el vértice en el punto γ_j aumenta en la transformación $w = f(z)$ en un número de veces, igual al orden de multiplicidad de la raíz γ_j en la ecuación $f(z) = f(\gamma_j)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, r)$.

4.2. De los resultados del apartado anterior se deduce que la función racional de primer orden, es decir, la función homográfica $w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, es *la única de las funciones racionales que realiza una transformación biunívoca del plano ampliado sobre sí mismo*. (En este caso hay que exigir además que el determinante de la función $L(z)$ sea distinto de cero: $ad - bc \neq 0$; cuando no se cumple esta condición, $L(z)$ se hace idénticamente igual a una constante, o sea, transforma el plano ampliado en un punto). Ya se vio en el

ap. 2.3 que la transformación $w = L(z)$ es conforme en todos los puntos del plano ampliado. En las cuestiones más diversas de la teoría de las funciones de variable compleja se suele recurrir a esta transformación (a sus distintos casos particulares). Debido a esto, merece un estudio particular. Consideremos aquí sus propiedades principales.

Estudiaremos el conjunto M de todas las transformaciones homográficas con el determinante diferente de cero. Dos transformaciones

$$L_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} \quad \text{y} \quad L_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$$

se consideran iguales cuando, y sólo cuando, $L_1(z) = L_2(z)$ para todos los valores de z. Para esto es suficiente que los coeficientes correspondientes sean proporcionales entre sí:

$$a_2 = \lambda a_1, \quad b_2 = \lambda b_1, \quad c_2 = \lambda c_1 \quad \text{y} \quad d_2 = \lambda d_1 \qquad (\lambda \neq 0).$$

Estas mismas condiciones son necesarias. En efecto, si $L_1(z) = L_2(z)$, entonces, en particular,

$$L_1(0) = L_2(0), \quad L_1(1) = L_2(1) \quad \text{y} \quad L_1(\infty) = L_2(\infty);$$

lo cual significa que

$$\frac{b_1}{d_1} = \frac{b_2}{d_2} = p, \quad \frac{a_1 + b_1}{c_1 + d_1} = \frac{a_2 + b_2}{c_2 + d_2}, \quad \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = q.$$

Poniendo en la igualdad del medio

$$b_1 = d_1p, \quad b_2 = d_2p, \quad a_1 = c_1q \quad \text{y} \quad a_2 = c_2q$$

obtenemos

$$\frac{c_1q + d_1p}{c_1 + d_1} = \frac{c_2q + d_2p}{c_2 + d_2}, \text{ o sea, } (c_1d_2 - c_2d_1)(q - p) = 0.$$

Pero $q \neq p$ $\left(\text{en caso contrario sería } \frac{a_1}{c_1} = \frac{b_1}{d_1}\text{, es decir, } a_1d_1 - b_1c_1 = 0\right.$ lo cual contradice a la hipótesis$\left.\right)$. Por consiguiente,

$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}.$$

Las relaciones obtenidas pueden escribirse en la forma

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{c_2}{d_1} = \lambda,$$

que es lo que se quería demostrar.

De lo expuesto se deduce que el valor del determinante de la transformación homográfica no es, de por sí mismo, característico para esta transformación. En efecto, al pasar de los coeficientes

a_1, b_1, c_1 y d_1 a los coeficientes λa_1, λb_1, λc_1 y λd_1 ($\lambda \neq 0$) el determinante se multiplica por λ^2. Pero, en todo caso, este determinante, siendo distinto de cero para algunos valores de los coeficientes, se mantiene siempre distinto de cero.

La transformación

$$U(z) = z,$$

perteneciente, evidentemente, al conjunto M, se llamará **transformación idéntica o unidad.**

Llamaremos **inversa** con respecto a una transformación

$$z_1 = L(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

a la transformación según la cual para cada z se toma por imagen su preimagen z_1 en la transformación dada. La transformación inversa es

$$z = \frac{dz_1 - b}{-cz_1 + a}.$$

La transformación inversa con respecto a L se designará mediante L^{-1}.

Si

$$z_1 = L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ y } z_2 = L_1(z_1) = \frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}$$

son dos transformaciones homográficas arbitrarias (como siempre, con los determinantes distintos de cero), la transformación que se obtiene al realizarlas consecutivamente una tras otra en cierto orden, se llama **producto** de las transformaciones dadas. Supongamos que se efectúa primero la transformación $z_1 = L(z)$, y después la transformación $z_2 = L_1(z_1)$. Entonces su producto se designa mediante $L_1 L(z)$. Para éste se tiene:

$$z_2 = L_1 L(z) = \left[a_1 \frac{az+b}{cz+d} + b_1\right] : \left[c_1 \frac{az+b}{cz+d} + d_1\right] =$$
$$= [(aa_1 + cb_1) z + (ba_1 + db_1)] : [(ac_1 + cd_1) z + (bc_1 + dd_1)].$$

Por consiguiente, $z_2 = L_1 L(z)$ también es una transformación homográfica; para su determinante obtenemos:

$$(aa_1 + cb_1)(bc_1 + dd_1) - (ba_1 + db_1)(ac_1 + cd_1) =$$
$$= (ad - bc)(a_1 d_1 - b_1 c_1) \neq 0.$$

Así, pues, la transformación $L_1 L(z)$ pertenece al conjunto M.

Evidentemente,

$$LL^{-1}(z) = L^{-1}L(z) = U(z).$$

Obsérvese que la transformación $z_2 = LL_1(z)$, obtenida al realizar primero la transformación $z_1 = L_1(z)$ y después la transformación $z_2 = L(z_1)$, se diferencia, generalmente, de la transformación $L_1L(z)$. Así, por ejemplo, si

$$L(z) = \frac{z}{z+1} \quad \text{y} \quad L_1(z) = \frac{z+1}{z-1},$$

se tiene

$$L_1L(z) = -2z-1, \text{ mientras que } LL_1(z) = \frac{z+1}{2z}.$$

La operación definida de multiplicación de transformaciones es asociativa, es decir, para cualesquiera transformaciones homográficas L, L_1 y L_2, se cumple la igualdad

$$(LL_1)L_2 = L(L_1L_2).$$

Esta propiedad se comprueba fácilmente. En efecto, supongamos que $L_2(z) = z_2$. Entonces

$$(LL_1)L_2(z) = LL_1[L_2(z)] = LL_1(z_2)$$

y

$$L(L_1L_2)(z) = L[L_1L_2(z)] = LL_1(z_2),$$

así, pues,

$$(LL_1)L_2(z) = L(L_1L_2)(z).$$

La propiedad asociativa se extiende al producto de cualquier número de transformaciones. Esta nos libra de la necesidad de poner los paréntesis en este producto. Así, por ejemplo,

$$L[L_1(L_2L_3)](z) = LL_1(L_2L_3)(z) = L(L_1L_2)L_3(z) = \ldots = LL_1L_2L_3(z).$$

Como el conjunto M, junto con cada dos transformaciones L y L_1, contiene también su producto L_1L (y LL_1), y junto con la transformación L contiene también la inversa L^{-1}, éste forma un grupo de transformaciones *).

4.3. Veamos la demostración de la propiedad homocíclica (o circular) de la transformación homográfica, que se expresa en que la imagen de una recta o una circunferencia en la transformación $w = L(z)$, es una recta o una circunferencia; la imagen de una recta puede ser una recta o una circunferencia y, del mismo modo, la imagen de una circunferencia puede ser una recta o una circunferencia.

Para una funcion lineal entera $L(z) = \alpha z + \beta$ esta propiedad es inmediata, puesto que la transformación $w = L(z)$ se reduce

*) Véase, por ejemplo, A. Kurosch, *Curso de álgebra superior*, Editorial Mir, Moscú, 1968, § 63.

a una traslación (cuando $\alpha = 1$) o a una rotación seguida de una homotecia (o dilatación) (si $\alpha \neq 1$); véase el ap. 2.3.

Consideremos ahora la transformación

$$w = \Lambda(z) = \frac{1}{z},$$

que utilizamos ya varias veces.

Evidentemente, la ecuación de cualquier recta o circunferencia puede expresarse en la forma

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0.$$

Cuando $A = 0$ y B y C no son simultáneamente iguales a cero, resulta una recta, y cuando $A \neq 0$ y $B^2 + C^2 - AD > 0$, resulta una circunferencia. Sustituyendo aquí $x^2 + y^2$ por $z\bar{z}$, $2x$ por $z + \bar{z}$ y $2y$ por $-i(z - \bar{z})$, representamos esta ecuación en la forma

$$Az\bar{z} + (B - iC)z + (B + iC)\bar{z} + D = 0,$$

o bien

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \qquad (4.3:1)$$

donde $E = B + Ci$. Aquí $A = 0$, y el número complejo E es distinto de cero en el caso de una recta y $A \neq 0$ y $E\bar{E} - AD > 0$ en el caso de una circunferencia. Recíprocamente: cualquier ecuación de esta forma con coeficientes reales A y D y coeficientes complejos conjugados E y $\bar{E}$ será la ecuación de una recta si $A = 0$ y el número E es distinto de cero, y la ecuación de una circunferencia, si $A \neq 0$ y $E\bar{E} - AD > 0$. Para cerciorarse de esto, es suficiente pasar de z a x e y según las fórmulas

$$z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

Queriendo obtener la imagen de la línea (4.3:1) en la transformación $w = \frac{1}{z}$, sustituyamos z en la ecuación (4.3:1) por $\frac{1}{w}$. Obtenemos:

$$A\frac{1}{w\bar{w}} + \bar{E}\frac{1}{w} + E\frac{1}{\bar{w}} + D = 0,$$

o bien

$$Dw\bar{w} + Ew + \bar{E}\bar{w} + A = 0. \qquad (4.3:2)$$

La ecuación (4.3:2) tiene la misma forma que la ecuación (4.3:1) con la sustitución de A por D, D por A y E por $\bar{E}$. De aquí se deduce que si $D = 0$ ésta es la ecuación de una recta (puesto que entonces será $A = 0$ y $E \neq 0$, o bien $A \neq 0$ y $E\bar{E} - AD = E\bar{E} > 0$, es-

decir, de nuevo $E \neq 0$), y si $D \neq 0$, la ecuación de una circunferencia (puesto que cuando $A \neq 0$ la ecuación (4.3:1) representaba una circunferencia y, por consiguiente, se cumplía la condición $E\overline{E} - AD > 0$, mientras que cuando $A = 0$ ésta representaba una recta, por consiguiente, E era distinto de cero, de donde $E\overline{E} - AD = E\overline{E} > 0$). Queda demostrado que *la imagen de una recta o de una circunferencia en la transformación* $w = \Lambda(z) = \frac{1}{z}$ *es una recta o una circunferencia.*

Considerando una función homográfica arbitraria

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (c \neq 0),$$

representémosla de la forma

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}.$$

Pongamos

$$z_1 = L_1(z) = cz + d, \quad z_2 = \Lambda(z_1) = \frac{1}{z_1}$$

y

$$w = L_2(z_2) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} z_2;$$

entonces $L(z)$ se escribirá en forma del producto de tres transformaciones:

$$L = L_2 \Lambda L_1.$$

Como, en cada una de las transformaciones L_1, Λ y L_2, la imagen de una recta o circunferencia es una recta o circunferencia, la transformación L posee la misma propiedad. Queda demostrada por completo la propiedad homocíclica de la transformación homográfica.

Designemos mediante $\delta = -\frac{d}{c}$ el polo de la función homográfica $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(c \neq 0)$. La imagen de cada recta o circunferencia que pasa por δ tiene que contener al punto del infinito $L(\delta) = \infty$, y, por consiguiente, no puede ser una circunferencia. En virtud de la propiedad homocíclica, esta imagen es una recta. La imagen de una recta o una circunferencia que no pase por el punto δ, no puede contener al punto del infinito y, por consiguiente, no puede ser una recta. En virtud de la propiedad homocíclica, esta imagen es una circunferencia. Resumiendo, *en la transformación* $w = L(z)$ *todas las rectas y circunferencias que pasan por el polo* δ *de esta función se transforman en rectas del plano* w, *mientras que las rectas y circunferencias que no pasan por* δ *se transforman en circunferencias del plano* w.

Supongamos que $w = L(z)$ es una función homográfica arbitraria; sea γ una recta o circunferencia del plano z, y sea Γ su imagen en el plano w (es decir, también una recta o circunferencia). Consideremos las regiones g_1 y g_2 limitadas por la línea γ en el plano z; éstas son dos semiplanos o el interior y el exterior de una circunferencia. Demostremos que la imagen de una de éstas es una de las dos regiones limitadas por la línea Γ en el plano w, mientras que la imagen de la otra es la segunda de dichas regiones. En efecto, sea z_1 un punto de la región g_1 y z_2 un punto de la región g_2. Como z_1

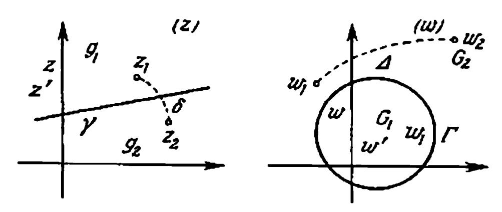


FIG. 23

y z_2 no están situados en γ, las imágenes de estos puntos w_1 y w_2 no pueden estar situados en Γ y, por consiguiente, se sitúan en las regiones en las que Γ divide el plano w. Si éstos estuviesen situados en una misma región, entonces podrían unirse mediante un segmento Δ de recta (o arco de circunferencia) que no tuviese puntos comunes con Γ (fig. 23). La proimagen del segmento Δ en el plano z tiene que ser un segmento de recta (o de arco de circunferencia) δ que una z_1 y z_2 y que no tenga puntos comunes con γ. Pero la existencia de tal segmento contradice a que z_1 y z_2 están situados en distintas regiones g_1 y g_2. Por lo tanto, si los puntos z_1 y z_2 pertenecen a distintas regiones g_1 y g_2, sus imágenes w_1 y w_2 también pertenecen a distintas regiones limitadas por la línea Γ. Designemos mediante G_1 la región que contiene a w_1 y mediante G_2, la que contiene a w_2, y demostremos que la imagen de la región g_1 es G_1, y la imagen de la región g_2 es G_2.

En efecto, si, por ejemplo, z' es algún punto de la región g_1, entonces el hecho de pertenecer z' y z_2 a distintas regiones g_1 y g_2 implica, según lo demostrado, que sus imágenes w' y w_2 pertenecen a distintas regiones G_1 y G_2. Pero w_2 pertenece a G_2, por lo cual w' pertenece a G_1. Así, pues, la imagen de cada punto de la región g_1 pertenece a G_1; del mismo modo, la imagen de cada punto de la región g_2 pertenece a G_2. Tomemos, finalmente, un punto arbitrario w de la región G_1. Este tiene que ser la imagen de uno de los puntos z de la región g_1 o g_2. Pero z no puede ser un punto de la región

g_2, puesto que en caso contrario w sería un punto de la región G_2. Por consiguiente, w es la imagen del punto z, perteneciente a g_1. Resumiendo, G_1 es la imagen de la región g_1, y G_2, la imagen de la región g_2. Por consiguiente, queda demostrado que dos regiones limitadas por la línea γ se transforman en dos regiones limitadas por la línea Γ, además, queda verificado que para saber cuál precisamente de las dos regiones, limitadas por la línea Γ, es la imagen de la región dada g_1, limitada por la línea γ, es suficiente observar la imagen w_1 de un solo punto $z_1 \in g_1$; la región G_i a la cual pertenezca w_1 será la imagen de la región g_1.

4.4. Si la transformación homográfica $w = L(z)$ es distinta de la idéntica, entonces, por lo general, w es distinto de z. No obstante, aquí también existen **puntos inmóviles de la transformación**, caracterizados por la ecuación

$$z = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Supongamos primero que $c=0\,(d \neq 0)$. Entonces $L(z)$ representa una función lineal entera

$$l(z) = \alpha z + \beta \quad \left(\alpha = \frac{a}{d},\ \beta = \frac{b}{d}\right).$$

Como $l(\infty) = \infty$, uno de los puntos inmóviles de la transformación lineal entera es el punto del infinito del plano, $z = \infty$. Si $\alpha \neq 1$, existe también otro punto inmóvil, determinado por la ecuación

$$z = \alpha z + \beta.$$

Este es el punto $z = \frac{\beta}{1-\alpha}$. Si $\alpha = 1$ y $\beta \neq 0$, no existe ningún punto finito inmóvil. Pero si $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \to 1$, entonces el punto finito inmóvil $\frac{\beta}{1-\alpha}$ tiende hacia el punto del infinito. Debido a esto, en el caso de la transformación $l(z) = z + \beta$ $(\beta \neq 0)$, el punto del infinito se puede considerar como dos puntos inmóviles confundidos.

Supongamos ahora que $c \neq 0$. Entonces $L(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$, o sea, el punto $z = \infty$ no es inmóvil. Del mismo modo, no es inmóvil tampoco el punto $-\frac{d}{c}$, pues

$$L\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \neq -\frac{d}{c}.$$

Resolvamos la ecuación

$$z = \frac{az+b}{cz+d},$$

suponiendo que $z \neq \infty$ y $z \neq -\frac{d}{c}$, o sea, la ecuación

$$cz^2 - (a-d)z - b = 0.$$

Obtenemos:

$$z = \frac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}.$$

Si $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$, de aquí se hallan dos puntos inmóviles finitos distintos. Cuando $(a-d)^2 + 4bc = 0$, estos dos puntos se confunden en un solo punto inmóvil finito $\frac{a-d}{2c}$.

En resumen, *la transformación homográfica distinta de la idéntica posee solamente dos puntos inmóviles, que en el caso particular pueden confundirse en uno.* [Las transformaciones lineales enteras se caracterizan por completo en que al menos uno de los puntos inmóviles es el punto del infinito.]

La transformación homográfica que posee más de dos puntos inmóviles puede ser solamente la transformación idéntica $U(z) = z$ (para la cual todos los puntos son inmóviles). De aquí se puede deducir que para la coincidencia de dos transformaciones homográficas $L(z)$ y $\Lambda(z)$ es suficiente que se cumpla la igualdad $L(z) = \Lambda(z)$ para tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3. En efecto, sea $L(z_k) = \Lambda(z_k) = w_k$ $(k = 1, 2, 3)$; entonces $\Lambda^{-1}(w_k) = z_k$ $(k = 1, 2, 3)$ y, por consiguiente, la transformación $\Lambda^{-1}L(z)$ hace corresponder a los puntos z_k de nuevo los mismos puntos, o sea, $\Lambda^{-1}L(z_k) = z_k$ $(k = 1, 2, 3)$ (puesto que $L(z_k) = w_k$ y $\Lambda^{-1}(w_k) = z_k$). Es decir, la transformación $\Lambda^{-1}L$ tiene tres puntos distintos inmóviles: z_1, z_2 y z_3, o sea, es la transformación idéntica:

$$\Lambda^{-1}L = U.$$

Por consiguiente,

$$\Lambda(\Lambda^{-1}L) = \Lambda U.$$

Pero

$$\Lambda(\Lambda^{-1}L) = (\Lambda\Lambda^{-1})L = UL = L$$

y

$$\Lambda U = \Lambda.$$

Definitivamente, obtenemos:

$$L = \Lambda.$$

como se quería demostrar.

En resumen, *para determinar una transformación homográfica es suficiente señalar tres puntos distintos:* w_1, w_2 y w_3, *correspondientes a tres puntos distintos dados:* z_1, z_2 y z_3.

Propongámonos hallar la función homográfica que realiza esta transformación, y supongamos primero que z_1, z_2 y z_3 son puntos finitos y que $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$ y $w_3 = 1$.

Para que la función homográfica

$$w = \Lambda(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

tome el valor 0 para $z = z_1$ y el valor ∞ para $z = z_2$, es necesario y suficiente que $z = z_1$ sea un cero del numerador $az + b$, o sea, que el numerador tenga la forma $a(z - z_1)$, y que $z = z_2$ sea un cero del denominador, o sea, que el denominador tenga la forma $c(z - z_2)$. Por lo tanto, la función buscada tiene que poseer la forma

$$w = \frac{a}{c}\,\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

Pero, cuando $z = z_3$, w tiene que ser igual a 1. De la ecuación

$$1 = \frac{a}{c}\,\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

obtenemos:

$$\frac{a}{c} = 1 : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2},$$

de donde

$$w = \Lambda(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Esta es la función homográfica buscada, que hace corresponder a los puntos z_1, z_2 y z_3 los puntos 0, ∞ y 1, respectivamente.

Supongamos ahora que w_1, w_2 y w_3 son unos puntos finitos arbitrarios (distintos) y que $w = L(z)$ es la transformación homográfica que satisface a las condiciones:

$$L(z_1) = w_1, \qquad L(z_2) = w_2 \quad \text{y} \quad L(z_3) = w_3.$$

Según lo demostrado, la función $\zeta = \Lambda_1(w) = \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}$ hace corresponder a los puntos w_1, w_2 y w_3 los puntos 0, ∞ y 1. Debido a esto, la función $\Lambda_1 L(z)$ hace corresponder a los puntos z_1, z_2 y z_3 los puntos 0, ∞ y 1, es decir,

$$\Lambda_1 L(z) = \Lambda(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

De la relación

$$\Lambda_1 L = \Lambda$$

se deduce que

$$\Lambda_1^{-1}(\Lambda_1 L) = \Lambda_1^{-1}\Lambda.$$

o sea,

$$L = \Lambda_1^{-1}\Lambda$$

(puesto que $\Lambda_1^{-1}(\Lambda_1 L) = (\Lambda_1^{-1}\Lambda_1)L = UL = L$).

Esta última relación resuelve el problema, ya que las transformaciones Λ y Λ_1 son conocidas:

$$\Lambda(\zeta) = \frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}, \qquad \Lambda_1(\zeta) = \frac{\zeta - w_1}{\zeta - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}.$$

Por cierto, para el estudio de la transformación $w = L(z)$ es mejor utilizar directamente la relación:

$$\Lambda_1 L(z) = \Lambda(z),$$

de donde, después de sustituir $L(z)$ por w, se deduce que:

$$\Lambda_1(w) = \Lambda(z),$$

o bien,

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \qquad (4.4{:}1)$$

Esta ecuación determina la función homográfica $w = L(z)$ en forma implícita.

Hemos resuelto el problema planteado, bajo la hipótesis de que todos los puntos z_1, z_2, z_3, w_1, w_2 y w_3 sean finitos. Si, por ejemplo, $z_1 = \infty$, la función $\Lambda(z)$, que a los puntos $z_1 = \infty$, z_2 y z_3 hace corresponder los puntos $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$ y $w_3 = 1$, adquiere la forma

$$\Lambda(z) = \frac{1}{z - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2} \text{ *)}.$$

Por lo tanto, la ecuación (4.4:1) se sustituye por la ecuación

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{1}{z - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2} \qquad (4.4{:}1')$$

(suponiendo que son finitos los puntos w_1, w_2 y w_3). Si $z_2 = \infty$, la función $\Lambda(z)$ que a los puntos z_1, $z_2 = \infty$ y z_3 hace corres-

---

*) Se puede llegar a esta expresión así: suponiendo z_1 finito, se escribe la relación

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

en la forma

$$\frac{\frac{z}{z_1} - 1}{z - z_2} : \frac{\frac{z_3}{z_1} - 1}{z_3 - z_2}$$

y se pasa al límite para $z_1 \to \infty$.

ponder los puntos $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$ y $w_3 = 1$, toma la forma

$$\Lambda(z) = (z - z_1) : (z_3 - z_1)$$

y, por consiguiente, la ecuación (4.4:1) se sustituye por la ecuación

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = (z - z_1) : (z_3 - z_1). \qquad (4.4:1'')$$

Si $z_3 = \infty$, la función $\Lambda(z)$ que a los puntos z_1, z_2 y $z_3 = \infty$ hace corresponder los puntos $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$ y $w_3 = 1$, toma la forma

$$\Lambda(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

y la ecuación (4.4:1) se sustituye por la ecuación

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2}. \qquad (4.4:1''')$$

Del mismo modo, el primer miembro de la ecuación (4.4:1) se debe sustituir por

$$\frac{1}{w - w_2} : \frac{1}{w_3 - w_2}, \qquad (w - w_1) : (w_3 - w_1), \qquad \frac{w - w_1}{w - w_2}$$

según que sea $w_1 = \infty$, $w_2 = \infty$ o $w_3 = \infty$.

En resumen, llegamos a la siguiente regla mnemotécnica: si $z_k = \infty$ o $w_l = \infty$ ($k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, 3$), entonces en la ecuación (4.4:1) las diferencias en las que figuren z_k o w_l deben sustituirse por 1. El lector fácilmente confirmará la justeza de esta regla mediante el paso al límite en la ecuación (4.4:1) (para $z_k \to \infty$ o $w_l \to \infty$).

De la ecuación (4.4:1) se deduce una importante propiedad general de las transformaciones homográficas. Sean a, b, c y d unos números complejos distintos (finitos) arbitrarios. Llamemos a

$$\frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b}$$

razón doble o anarmónica de cuatro números o de los puntos a, b, c y d. Esta razón la designaremos con la notación (a, b, c, d):

$$(a, b, c, d) = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b}.$$

La definición de razón doble la extenderemos también al caso en que uno de los cuatro puntos a, b, c, d sea el del infinito. Precisando, llamaremos razón doble de cuatro puntos, entre los cuales uno es el del infinito, al límite de la razón doble de cuatro puntos finitos, de los cuales tres coinciden con los puntos dados y el cuarto

tiende hacia el punto del infinito. Siguiendo esta definición, tendremos:

$$(\infty, b, c, d) = \frac{1}{c-b} : \frac{1}{d-b} \ .$$

$$(a, \infty, c, d) = (c-a) : (d-a),$$

$$(a, b, \infty, d) = 1 : \frac{d-a}{d-b} \ ,$$

$$(a, b, c, \infty) = \frac{c-a}{c-b} \ .$$

Supongamos ahora que $w = L(z)$ es una transformación homográfica arbitraria. Designemos mediante A, B, C y D los puntos homólogos a los cuatro puntos distintos: a, b, c, y d. Como los tres puntos a, b y d se transforman en los puntos A, B y D, los puntos $w = L(z)$ y z estarán ligados por la relación (4.4:1):

$$\frac{w-A}{w-B} : \frac{D-A}{D-B} = \frac{z-a}{z-b} : \frac{d-a}{d-b} \ ,$$

en la cual se deben sustituir por 1 aquellas diferencias en las que figura el punto del infinito. Haciendo $z = c$, tenemos que poner $w = C$ (puesto que en nuestra transformación al punto c corresponde el punto C). Por consiguiente,

$$\frac{C-A}{C-B} : \frac{D-A}{D-B} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

(las diferencias en las que figura el punto del infinito se deben sustituir por 1), o

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d). \qquad (4.4:2)$$

Resumiendo, *en la transformación homográfica la razón doble de cuatro puntos cualesquiera no varía*; *en otras palabras, la razón doble es un invariante de la transformación homográfica.*

4.5. Basándose en la propiedad homocíclica de la transformación homográfica y en la posibilidad de transformar cualquier terna de puntos z_1, z_2, z_3 en otra terna previamente dada w_1, w_2, w_3, demostremos la siguiente proposición:

Cualesquiera que sean las rectas o circunferencias γ y Γ y dos ternas de puntos z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3, pertenecientes a γ y Γ, respectivamente, existe una transformación homográfica $w = L(z)$ que transforma γ en Γ y hace corresponder a los puntos z_1, z_2, z_3 los puntos w_1, w_2, w_3, respectivamente.

En efecto, escribamos la transformación homográfica $w = L(z)$ que satisface a las condiciones $L(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, 3$). Según lo expuesto anteriormente, tal función existe y es la única que satisface a estas condiciones. Esta transforma la recta o circunferencia γ

en una recta o circunferencia Γ'. Pero γ pasa por los puntos z_1, z_2 y z_3; por lo tanto, Γ' pasa por los puntos w_1, w_2 y w_3, y como por tres puntos no se pueden trazar dos rectas o circunferencias distintas, Γ' coincide con Γ. Así, pues, $w = L(z)$ satisface a todas las condiciones de la proposición enunciada.

Tomemos de nuevo unas rectas o circunferencias arbitrarias γ y Γ (distintas o coincidentes) y sea g una de las dos regiones limitadas por la línea γ, y G, una de las dos regiones limitadas por la línea Γ. Evidentemente, tanto una como la otra pueden ser un semiplano, el interior de una circunferencia o el exterior de una circunferencia. Elijamos una terna arbitraria de puntos z_1, z_2 y z_3 situados

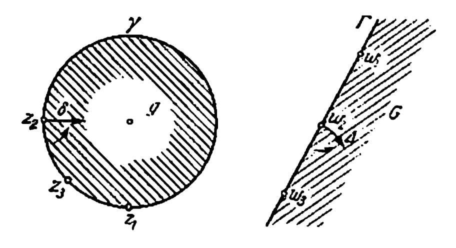


FIG. 24

en γ y supongamos para fijar ideas que al moverse el observador a lo largo de γ, en la dirección del punto z_1 al punto z_3, pasando por z_2, la región g se mantiene a su izquierda. Sea w_1, w_2, w_3 una terna de puntos situados en Γ tal que, al moverse el observador a lo largo de Γ en la dirección del punto w_1 al punto w_3, pasando por el punto w_2, la región G se mantenga a su izquierda. En lo demás, los puntos w_1, w_2, w_3 son arbitrarios. Formemos, como se mostró anteriormente, una función homográfica $w = L(z)$ que satisfaga a las condiciones $w_j = L(z_j)$ $(j = 1, 2, 3)$, la cual, por consiguiente, transformará γ en Γ. Demostremos que esta función transforma también la región g en la region G. En efecto, sea δ el segmento de la normal a la línea γ, trazada por el punto z_2 hacia el interior de la region g, es decir, a la izquierda del observador situado en el punto z_2, que mira a lo largo de γ en la dirección establecida anteriormente; entonces, como la transformación $w = L(z)$ es conforme, la imagen Δ de este segmento (que será un segmento de recta o de arco de circunferencia) también estará dirigida hacia la izquierda del observador situado en el punto w_2 que mira a lo largo de Γ en la dirección establecida en Γ (fig. 24). Por consiguiente, según la condición, Δ pertenece a G. De este modo, queda ya establecido que la región G contiene las imágenes de ciertos puntos pertenecientes a g (precisamente,

las imágenes de los puntos del segmento δ). Pero, según el ap. 4.3, $L(g)$ es una de las regiones cuya frontera coincide con la imagen de la frontera de la región g, es decir, con $\Gamma = L(\gamma)$. Como solamente hay dos regiones de éstas y una de ellas, G, contiene las imágenes de los puntos de la región g, ésa es la imagen buscada de esta región g: $G = L(g)$.

Aclaremos lo expuesto con un ejemplo. Supongamos que hay que transformar conformemente el semiplano superior $y > 0$ en el interior del círculo unidad.

Para resolver el problema hagamos, por ejemplo, $z_1 = -1$, $z_2 = 0$ y $z_3 = 1$, de modo que el semiplano quede a la izquierda del observador que vaya por el eje real en la dirección de z_1 a z_3 pasando por z_2, y elegimos también en la circunferencia unidad tres puntos: w_1, w_2 y w_3, de modo que el interior del círculo quede a la izquierda del observador que vaya por la circunferencia en la dirección de w_1 a w_3 pasando por w_2. Para mayor sencillez, se pueden tomar: $w_1 = 1$, $w_2 = i$ y $w_3 = -1$. Entonces, la transformación homográfica que cumple las condiciones $w_j = L(z_j)$ $(j = 1, 2, 3)$, será la buscada. Esta puede expresarse en la forma

$$\frac{w-1}{w-i} : \frac{-1-1}{-1-i} = \frac{z+1}{z} : \frac{1+1}{1},$$

o bien

$$w = \frac{z-i}{iz-1}.$$

4.6. Sean z_1 y z_2 dos puntos simétricos con respecto a cierta recta γ. Entonces, el centro de una circunferencia arbitraria δ que pase por z_1 y z_2 estará situado en γ y, por consiguiente, δ será ortogonal a γ. Será también ortogonal a γ la recta que pasa por los puntos z_1 y z_2. Fácilmente se observa que también es justo lo recíproco: si cualquier circunferencia o recta que pase por un par de puntos z_1 y z_2, es ortogonal a la recta γ, entonces z_1 y z_2 son simétricos respecto de γ.

Hagamos una transformación del plano mediante una función homográfica $w = L(z)$, de modo que la recta γ se transforme en una recta o circunferencia Γ. Entonces, el par de puntos z_1 y z_2, simétricos respecto de γ, se transformará en cierto par de puntos w_1 y w_2, y cada circunferencia o recta δ que pase por z_1 y z_2 se transformará en una circunferencia o recta Δ que pasa por w_1 y w_2, y viceversa: cualquier recta o circunferencia que pase por w_1 y w_2 será la imagen de cierta recta o circunferencia que pasa por z_1 y z_2. En virtud de la simetría de los puntos z_1 y z_2 respecto de γ y debido a que la transformación $w = L(z)$ es conforme, las rectas y circunferencias que pasan por w_1 y w_2 serán todas ortogonales a Γ. Por consiguiente, si Γ es una recta, los puntos $w_1 = L(z_1)$ y $w_2 = L(z_2)$ serán simétricos

respecto de Γ. Generalizando el concepto de simetría, *diremos que dos puntos son simétricos respecto de una circunferencia, si cualquier recta o circunferencia que pase por ellos es ortogonal a la circunferencia dada.* Entonces se podrá decir que si la recta γ se transforma en una circunferencia Γ mediante la función homográfica $w = L(z)$, entonces cualquier par de puntos simétricos respecto de la recta se transforma en un par de puntos simétricos respecto de la circunferencia, y recíprocamente. De aquí se deduce que, dada la circunferencia Γ y el punto w_1, el punto simétrico a w_1 respecto de Γ se determina unívocamente. En efecto, si existiesen dos puntos distintos w_2 y w_2' que fuesen simétricos a w_1 respecto de Γ, entonces en la transformación homográfica de Γ en la recta γ los puntos w_1, w_2 *y* w_2' se transformarían en los puntos z_1, z_2 y $z_2' \neq z_2$, donde los puntos z_1 y z_2, y también z_1 y z_2', serían simétricos respecto de γ, lo cual, evidentemente, es imposible.

Los razonamientos expuestos aquí sobre la transformación de una recta γ en una recta o circunferencia Γ se extienden sin cambios algunos al caso en que una circunferencia se transforma en una circunferencia, obteniendo que en la transformación homográfica cualquier par de puntos simétricos respecto de una circunferencia γ se transforma en un par de puntos simétricos respecto de la circunferencia Γ que es la imagen de γ. Así, pues, hemos obtenido la siguiente propiedad general de **conservación de la simetría** en las transformaciones homográficas:

Si los puntos z_1 y z_2 son simétricos respecto de una recta o circunferencia γ, entonces en cualquier transformación homográfica $w = L(z)$ sus imágenes w_1 y w_2 serán simétricas respecto de la imagen $\Gamma = L(\gamma)$.

Señalemos un caso particular de esta proposición. Supongamos que γ se transforma en una circunferencia Γ, y que z_1 es el punto que se transforma en el centro w_1 de la circunferencia Γ. Entonces el punto z_2, simétrico a z_1, tiene que transformarse en un punto w_2 del plano ampliado, simétrico a w_1 respecto de Γ. Pero tal punto es el del infinito. En efecto, la recta que une w_1 y $w_2 = \infty$, es decir, cualquier recta que pase por el centro de la circunferencia Γ será ortogonal a Γ. En virtud de la unicidad del punto simétrico (al punto dado respecto de la circunferencia dada), el punto ∞, y sólo ésto, sera simétrico al centro de la circunferencia Γ respecto de Γ.

Sea γ una recta o circunferencia arbitraria. La transformación del plano ampliado que consiste en que cada punto z se transforma en un punto z^*, simétrico a z respecto de γ, se llama **transformación de simetría** respecto de γ. Cuando γ es una circunferencia, esta transformación se llama también **inversión** respecto de γ.

Hallemos las expresiones analíticas para la transformación de simetría. Supongamos primero que γ es una recta. Esta se deter-

mina completamente por uno de sus puntos a y el vector unitario $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, que lleva su dirección.

Realicemos la transformación lineal

$$z = a + e^{i\theta} w = l(w),$$

que, evidentemente, transforma el eje real en la recta considerada (es una traslación que lleva el origen de coordenadas al punto a, seguida de una rotación en el ángulo θ alrededor del último punto). Como la transformación $w = l^{-1}(z)$ transforma γ en el eje real, la misma transforma a cada par de puntos z y z^*, simétricos respecto de γ, en un par de puntos w y w^*, simétricos respecto del eje real. Estos últimos se expresan por números complejos conjugados $w = t$ y $w^* = \bar{t}$. Debido a esto, $z - a = e^{i\theta} t$, o bien $\overline{z - a} = e^{i\theta}\bar{t}$ y $z^* - a = e^{i\theta} w^* = e^{i\theta}\bar{t}$. Eliminando t entre las dos últimas igualdades, obtenemos:

$$z^* - a = e^{2i\theta}\,\overline{(z - a)}. \tag{4.6:1}$$

Esta ecuación muestra que para realizar la transformación de simetría respecto de la recta γ que pasa por el punto a formando con el eje real el ángulo θ, se debe pasar del vector $z - a$ a su simétrico respecto del eje real $\overline{z - a}$ y girar luego este último el ángulo 2θ alrededor del punto a.

Consideremos ahora la transformación de simetría respecto de una circunferencia Γ de radio R $(0 < R < \infty)$ con centro en a. Realizemos una transformación homográfica que transforme Γ en el eje real. Lo más sencillo es tomar la transformación

$$z = a + R\frac{1 + iw}{1 - iw} = L(w),$$

la cual a los puntos del eje real $w_1 = -1$, $w_2 = 0$ y $w_3 = 1$ hace corresponder los puntos de la circunferencia Γ: $z_1 = a - iR$, $z_2 = a + R$ y $z_3 = a + iR$ y, por consiguiente, transforma el eje real en Γ. La transformación inversa $w = L^{-1}(z)$ transforma Γ en el eje real y a cada par de puntos z y z^*, simétricos respecto de Γ, hace corresponder un par de puntos w y w^*, simétricos respecto del eje real. Como w y w^* se expresan por números complejos conjugados: $w = t$ y $w^* = \bar{t}$, se tiene, $z - a = R\dfrac{1 + it}{1 - it}$ o bien, $\overline{z - a} = R\dfrac{1 - i\bar{t}}{1 + i\bar{t}}$ y $z^* - a = R\dfrac{1 + i\bar{t}}{1 - i\bar{t}}$. Multiplicando término a término estas dos últimas relaciones, obtenemos:

$$\overline{(z - a)}\,(z^* - a) = R^2$$

o sea

$$z^* - a = \frac{R^2}{\overline{z-a}}. \qquad (4.6:2)$$

De aquí se deduce: primero, que

$$\operatorname{Arg}(z^* - a) = -\operatorname{Arg}\overline{(z-a)} = \operatorname{Arg}(z-a)$$

y, segundo, que

$$|z^* - a||z-a| = R^2.$$

Por consiguiente, los puntos z^* y z están situados en un mismo rayo que parte del centro de la circunferencia y se encuentran a tales distancias del centro que el producto de estas distancias es igual al cuadrado del radio. Por estas dos condiciones, o lo que es lo mismo, por la fórmula (4.6:2), se determina completamente la posición de uno de los puntos z, z^* siendo dado el otro, es decir, se determina la transformación de inversión respecto de la circunferencia $|z - a| = R$.

De las igualdades (4.6:1) o (4.6:2) se deduce que *la transformación general de simetría se reduce a la realización consecutiva de una transformación lineal (entera o fraccionaria) y una transformación de simetría respecto del eje real.*

Así, por ejemplo, la transformación de simetría respecto de una recta puede expresarse en la forma:

$$z_1 = \bar{a} + e^{-2i\theta}(z-a) \text{ y } z^* = \bar{z}_1, \qquad (4.6:1')$$

y la transformación de simetría respecto de una circunferencia, en la forma

$$z_1 = \bar{a} + \frac{R^2}{z-a} \text{ y } z^* = \bar{z}_1. \qquad (4.6:2')$$

Como la transformación lineal es conforme y posee la propiedad homocíclica, y la transformación de simetría respecto del eje real posee las mismas propiedades con la única diferencia de que, conservando las magnitudes de los ángulos, se cambian sus sentidos por los opuestos, la transformación de simetría en el caso más general posee también las propiedades indicadas. Precisamente, ésta es una transformación conforme de segundo género y transforma las rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.

4.7. Ilustremos con dos ejemplos la aplicación de la propiedad de conservación de la simetría en las transformaciones homográficas.

E j e m p l o 1. Transformar conformemente el semiplano superior en el interior del círculo $|w| < R$ de modo que a un punto dado del semiplano le corresponda el centro del círculo: $w = 0$.

La función buscada, si existe, se anula para $z = \alpha$: $L(\alpha) = 0$. Así, pues, ya conocemos el cero $z = \alpha$ de la función $L(z)$. Pero el

punto $\bar{\alpha}$, simétrico a α respecto del eje real, tiene que transformarse en un punto simétrico al centro de la circunferencia respecto de la circunferencia misma, es decir, en el punto del infinito. Por consiguiente, ya conocemos también el polo $z = \bar{\alpha}$ de la transformación homográfica $L(z)$. Por lo tanto, $L(z)$ tiene la forma

$$w = L(z) = \frac{a(z-\alpha)}{c(z-\bar{\alpha})} = \lambda \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}, \tag{4.7:1}$$

donde λ es un número complejo distinto de cero.

Demostremos que la función hallada transforma el semiplano en el círculo $|w| < |\lambda|$ de modo que el punto α se transforma en el centro del círculo $w = 0$. Evidentemente, esta última condición se cumple para la función (4.7:1) con cualquier λ. No queda más que comprobar que el eje real se transforma en la circunferencia de radio $|\lambda|$ con el centro en el origen de coordenadas. En efecto, si $z = x$ es un número real arbitrario, los números $x - \alpha$ y $x - \bar{\alpha}$ son complejos conjugados y, por consiguiente,

$$|w| = |L(x)| = \left|\lambda \frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}}\right| = |\lambda| \left|\frac{x-\alpha}{x-\bar{\alpha}}\right| = |\lambda|.$$

Hemos obtenido que las imágenes de todos los puntos del eje real están situados en la circunferencia $|w| = |\lambda|$, de donde, en virtud de la propiedad homocíclica, se deduce que la imagen del eje real es esta circunferencia.

Para obtener la transformación del semiplano en un círculo de radio R se debe tomar $|\lambda| = R$. Queda indeterminado todavía el argumento del número λ. El significado geométrico de esta indeterminación es completamente claro. El paso en la fórmula (4.7:1) de un valor λ a otro manteniendo invariable el módulo $|\lambda| = R$ equivale a la variación de los argumentos de todos los puntos en una misma magnitud, es decir, a la rotación del círculo alrededor de su centro $w = 0$. En tal rotación, el círculo se transforma en sí mismo, su centro se mantiene en su sitio, y no se infringen las condiciones del problema.

Si se quiere que el problema planteado posea solución única, es necesario introducir una condición complementaria. Se puede exigir, por ejemplo, que:

a) un punto dado del eje real $x = x_0$ se transforme en el punto $w = R$ de la circunferencia, o

b) la derivada $L'(\alpha)$ sea un número real positivo (geométricamente esto significa que las tangentes a las curvas que pasan por el punto α no tienen que cambiar la inclinación al hacer la transformación).

En efecto, en la condición a), obtenemos de (4.7:1):

$$R = L(x_0) = \lambda \frac{x_0 - \alpha}{x_0 - \bar{\alpha}},$$

de donde

$$\lambda = R \frac{x_0 - \bar{\alpha}}{x_0 - \alpha}$$

y

$$L(z) = R \frac{x_0 - \bar{\alpha}}{x_0 - \alpha} \cdot \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}. \tag{4.7:2}$$

Evidentemente,

$$|\lambda| = R \left| \frac{x_0 - \bar{\alpha}}{x_0 - \alpha} \right| = R.$$

Supongamos ahora que $\alpha = \xi + i\eta$, donde $\eta > 0$. Como

$$L'(\alpha) = \frac{\lambda}{\alpha - \bar{\alpha}},$$

con la condición b) sacamos la conclusión que $\frac{\lambda}{\alpha - \bar{\alpha}} = \frac{\lambda}{2\eta i}$, lo cual significa que $\frac{\lambda}{i}$ es un número real positivo. Pero, por otra parte, el módulo $|\lambda|$ tiene que ser igual a R. Por lo tanto, $\lambda = iR$ y

$$L(z) = iR \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}. \tag{4.7:3}$$

E j e m p l o 2. Transformar conformemente el círculo $|z| < R$ en sí mismo, de modo que el punto dado $z = \alpha$ de este círculo se transforme en su centro $w = 0$.

La función homográfica $L(z)$ buscada, si existe, se anula para $z = \alpha$: $L(\alpha) = 0$. Así, pues, ya conocemos un cero $z = \alpha$ de la función $L(z)$. Pero el punto α^*, simétrico a α respecto de la circunferencia $|z| = R$, tiene que transformarse en el punto simétrico al centro respecto de la misma circunferencia. Por esto, ya conocemos también el polo $z = \alpha^*$ de la función $L(z)$. Por consiguiente, la función homográfica $L(z)$ tiene que tener la forma

$$w = L(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \alpha^*},$$

donde λ es un número complejo distinto de cero. Según la fórmula (4.6:2), el punto α^*, simétrico al punto α respecto de la circunferencia $|z| = R$, es:

$$\alpha^* = \frac{R^2}{\bar{\alpha}}.$$

Por lo tanto,

$$w = L(z) = -\lambda\bar{\alpha}\frac{z-\alpha}{R^2-\bar{\alpha}z} = \mu\frac{z-\alpha}{R^2-\bar{\alpha}z}. \qquad (4.7:4)$$

Demostremos que la función buscada transforma el círculo $|z| < R$ en el círculo $|w| < \frac{|\mu|}{R}$, de modo que el punto α se transforma en el centro del círculo 0. Evidentemente, esto último se cumple para la función $w = L(z)$ con cualquier μ. No queda más que demostrar que la circunferencia $|z| = R$ se transforma mediante (4.7:4) en la circunferencia $|w| = \frac{|\mu|}{R}$. Pero, en efecto, sea

$$z = Re^{i\theta} \qquad (0 < \theta < 2\pi)$$

un punto arbitrario de la circunferencia $|z| = R$. Entonces, para su imagen

$$w = L(Re^{i\theta}) = \mu\frac{Re^{i\theta}-\alpha}{R^2-\bar{\alpha}Re^{i\theta}} = \frac{\mu}{Re^{i\theta}}\frac{Re^{i\theta}-\alpha}{Re^{-i\theta}-\bar{\alpha}}$$

se tiene:

$$|w| = \left|\frac{\mu}{Re^{-i\theta}}\right|\left|\frac{Re^{i\theta}-\alpha}{Re^{-i\theta}-\bar{\alpha}}\right| = \frac{|\mu|}{R}$$

(puesto que $|e^{i\theta}| = 1$ y $\left|\frac{Re^{i\theta}-\alpha}{Re^{-i\theta}-\bar{\alpha}}\right| = 1$), de donde se deduce que la imagen de la circunferencia $|z| = R$ es la circunferencia $|w| = \frac{|\mu|}{R}$.

Para obtener la transformación del círculo de radio R en sí mismo es debido, evidentemente, tomar en la fórmula (4.7:4) $|\mu| = R^2$. El argumento del número μ continúa manteniéndose indeterminado. Para que el problema de la transformación tenga solución única se puede imponer una de las siguientes condiciones complementar as:

a) un punto dado a de la circunferencia $|z| = R$ se transforma en el punto $w = R$ de la misma circunferencia;

b) la derivada $L'(\alpha)$ es un número real positivo.

Dejamos a cuenta del lector la comprobación de que, en el caso):

$$L(z) = R\frac{R^2-\bar{\alpha}a}{a-\alpha}\frac{z-\alpha}{R^2-\bar{\alpha}z}, \qquad (4.7:5)$$

y en el caso b):

$$L(z) = \frac{R^2(z-\alpha)}{R^2-\bar{\alpha}z}. \qquad (4.7:6)$$

4.8. Arriba se demostró que toda función de la forma

$$w = \Lambda(z) = \mu \frac{z-\alpha}{R^2-\bar{\alpha} z} \quad (|\alpha| < R, \quad |\mu| = R^2) \qquad (4.8:1)$$

transforma el círculo K: $|z| < R$ en sí mismo. En particular, junto con cada función $\Lambda(z) = \mu \frac{z-\alpha}{R^2-\bar{\alpha} z}$ posee también la misma propiedad la función $\bar{\mu} \frac{z-\bar{\alpha}}{R^2-\alpha z}$, que convendremos en designar mediante $\bar{\Lambda}(z)$. Evidentemente $\overline{\Lambda(z)} = \bar{\Lambda}(\bar{z})$.

Fácilmente se observa que, eligiendo en la fórmula (4.8:1) α y μ de todas las maneras posibles, conservando las condiciones $|\alpha| < R$, $|\mu| = R^2$, obtenemos todas las transformaciones homográficas posibles del círculo K en sí mismo. En efecto, si $w = L(z)$ es una de ellas, entonces ésta transforma algún punto del círculo $z = \alpha$ en su centro y, por consiguiente, según el ap. 4.7 tiene que tener la forma (4.8:1).

Si Λ_1 y Λ_2 son dos transformaciones del círculo K en sí mismo, su producto $\Lambda = \Lambda_1\Lambda_2$ posee la misma propiedad; del mismo modo, la transformación inversa a una cualquiera de las transformaciones (4.8:1) transforma el círculo K en sí mismo, o sea, es una transformación de la forma (4.8:1). De aquí se deduce que todas las transformaciones posibles de la forma (4.8:1) (estando fijado $R > 0$) forman un grupo. Designémoslo mediante Γ; éste es un subgrupo del grupo de todas las transformaciones homográficas. El grupo Γ admite una interpretación geométrica admirable; precisamente se puede considerar como el grupo de los movimientos del plano en la geometría de Lobachevski.

Al interior del círculo K lo llamaremos plano de Lobachevski, a los puntos del círculo K, puntos de Lobachevski y a los arcos de circunferencias o a los segmentos de rectas, pertenecientes a K y ortogonales a la circunferencia Γ: $|z| = R$, rectas de Lobachevski, o bien, abreviadamente: $\mathscr{L}$-plano, $\mathscr{L}$-puntos, $\mathscr{L}$-rectas. Por cierto, a continuación, en lugar de $\mathscr{L}$-punto diremos siempre simplemente: punto. Estas denominaciones quedan justificadas por el hecho de que entre el interior del círculo, sus puntos y los arcos de circunferencias o segmentos de rectas indicados en la geometría de Euclides se verifican las mismas relaciones que entre el plano, sus puntos y rectas en la geometría de Lobachevski. Ante todo, en el $\mathscr{L}$-plano se verifican las siguientes proposiciones (axiomas de Hilbert *)):

Axiomas de unión:

I_1. Para cada dos puntos A y B siempre existe una $\mathscr{L}$-recta que pasa por A y B.

I_2. Para dos puntos A y B existe no más de una $\mathscr{L}$-recta que pase por A y B.

I_3. En cada $\mathscr{L}$-recta existen al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos no situados en una $\mathscr{L}$-recta.

Axiomas de orden:

II_1. Si A, B y C son puntos de una $\mathscr{L}$-recta y B está situado entre A y C, entonces B también está situado entre C y A.

II_2. Si A y C son puntos de una $\mathscr{L}$-recta, existe al menos un punto B tal, que C está situado entre A y B.

---

*) Véase D. Hilbert, Fundamentos de la geometría.

II_3. Entre tres puntos cualesquiera de una $\mathscr{L}$-recta existe no más de un punto situado entre los otros dos.

II_4. Sean A, B y C tres puntos no situados en una $\mathscr{L}$-recta y a, una $\mathscr{L}$-recta que no pase por ninguno de los puntos A, B, C; si ésta pasa por un punto del segmento AB, entonces pasa indispensablemente por un punto del segmento AC o por un punto del segmento BC.

Para demostrar que se verifican los axiomas I_1 y I_2 *), supondremos primero que uno de los puntos dados, por ejemplo A, coincide con el centro del círculo K. Entonces el diámetro del círculo que pasa por el punto B será la $\mathscr{L}$-recta que satisface a la condición I_1. Supongamos, en contra del axioma I_2, que existe otra $\mathscr{L}$-recta más que pasa por los puntos A y B. Esta tendrá que ser un arco de circunferencia ortogonal a Γ y, por consiguiente, los radios de Γ trazados a los extremos de este arco tendrán que ser tangentes a éste. Pero esto es imposible, puesto que cada uno de los radios posee dos puntos comunes distintos con el arco (el punto A y uno de los extremos del arco). Supongamos ahora que ninguno de los puntos A y B coincide con el centro del círculo. Entonces, efectuando una transformación de la forma (4.8:1), donde α es el afijo del punto A, reducimos la cuestión al caso que acabamos de considerar y, después, mediante la transformación inversa, obtenemos la única $\mathscr{L}$-recta que pasa por los puntos dados (la imagen del diámetro del círculo K en la última transformación). Dejamos a cuenta del lector la comprobación de la justeza de los demás axiomas.

Llamaremos m o v i m i e n t o d e L o b a c h e v s k i (abreviadamente, $\mathscr{L}$-m o v i m i e n t o) a cualquier transformación homográfica de la forma (4.8:1), es decir, a la transformación homográfica del círculo K en sí mismo. Cada $\mathscr{L}$-movimiento transforma biunívocamente el $\mathscr{L}$-plano en sí mismo, de modo que los puntos se transforman en puntos y las $\mathscr{L}$-rectas en $\mathscr{L}$-rectas (aquí nos basamos en la propiedad homocíclica y en que la transformación homográfica es conforme).

Consideremos un conjunto E de puntos del $\mathscr{L}$-plano y el conjunto $\overline{E}$ de los puntos simétricos a éste respecto del eje real. Si F es otro conjunto de puntos del $\mathscr{L}$-plano, diremos que E e s c o n g r u e n t e a l c o n j u n t o F en el s e n t i d o d e L o b a c h e v s k i (abreviadamente: $\mathscr{L}$-c o n g r u e n t e) cuando, y sólo cuando, existe un $\mathscr{L}$-movimiento L que transforma F en E o en $\overline{E}$, de modo que $L(F) = E$ o $L(F) = \overline{E}$.

De la definición de $\mathscr{L}$-congruencia se deduce que cada conjunto E es $\mathscr{L}$-congruente a sí mismo, y también al conjunto $\overline{E}$ simétrico a él con respecto al eje real. Además, de la definición se deduce que si E es $\mathscr{L}$-congruente a F, entonces F es $\mathscr{L}$-congruente a E. En efecto, si $L(F) = E$, entonces $F = L^{-1}(E)$, y si $L(F) = \overline{E}$, entonces también $F = L^{-1}(\overline{E})$ y $\overline{F} = \overline{L^{-1}(\overline{E})} = \overline{L}^{-1}(E)$. Supongamos, finalmente, que E es $\mathscr{L}$-congruente a F y F es $\mathscr{L}$-congruente a G; demostremos que entonces E es $\mathscr{L}$-congruente a G. En efecto, supongamos primero que $F = \Lambda(G)$ y $E = L(F)$ o $\overline{E} = L(F)$. En el primer caso, tendremos $E = L\Lambda(G)$, y en el segundo caso, $\overline{E} = L\Lambda(G)$; en uno y otro caso, según la definición, obtenemos que E es $\mathscr{L}$-congruente a G.

Supongamos ahora que $\overline{F} = \Lambda(G)$; entonces, si $E = L(F)$, se tiene $\overline{E} = \overline{L}(\overline{F}) = \overline{L}\Lambda(G)$, y si $\overline{E} = L(F)$, resulta $E = \overline{L}(\overline{F}) = \overline{L}\Lambda(G)$. De nuevo obtenemos que E es $\mathscr{L}$-congruente a G.

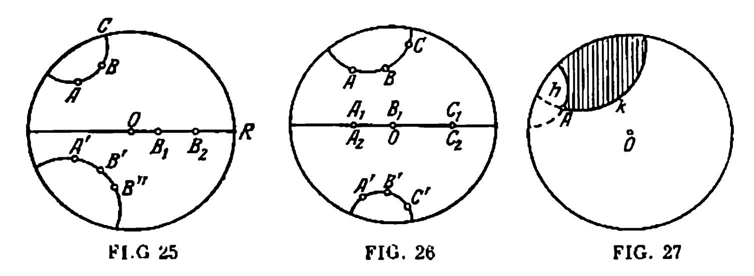
*) A nosotros no nos debe desconcertar el hecho de que demostremos los axiomas. Para nosotros éstos son solamente unos teoremas de la geometría de Euclides, referentes al interior del círculo, a sus puntos y a los segmentos de rectas y arcos de circunferencias situados en este círculo; demostrándolos, tenemos el derecho de aplicar todas las proposiciones y conceptos conocidos de la geometría de Euclides.

En resumen, el concepto introducido aquí de $\mathscr{L}$-congruencia posee todas las propiedades de equivalencia, pues ésta es r e f l e x i v a (cada conjunto es $\mathscr{L}$-congruente a sí mismo), s i m é t r i c a (si E es $\mathscr{L}$-congruente a F, entonces F es $\mathscr{L}$-congruente a E) y t r a n s i t i v a (si E es $\mathscr{L}$-congruente a F y F es $\mathscr{L}$-congruente a G, entonces E es $\mathscr{L}$-congruente a G). Designemos la relación de congruencia entre E y F con el signo $\equiv$. Entonces tendremos: 1) $E \equiv E$; 2) si $E \equiv F$, entonces $F \equiv E$; 3) si $E \equiv F$ y $F \equiv G$, entonces $E \equiv G$.

Ahora se pueden formular y demostrar las siguientes proposiciones:

A x i o m a s d e c o n g r u e n c i a:

III_1. Si A y B son dos puntos de una $\mathscr{L}$-recta a y A' es un punto de la misma o de otra L-recta a', entonces en la recta a', hacia un lado dado del



FI.G 25 FIG. 26 FIG. 27

punto A', siempre se puede hallar un punto B', y sólo uno, tal que el segmento $A'B'$ sea $\mathscr{L}$-congruente al segmento AB.

III_2. Si $AB' \equiv A'B'$ y $AB \equiv A''B''$, entonces $A\ B' \equiv A''B''$.

III_3. Sean AB y BC dos segmentos de una $\mathscr{L}$-recta a sin puntos interiores comunes; sean luego $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos de esta misma o de otra $\mathscr{L}$-recta a', también sin puntos interiores comunes. Si en estas condiciones, $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$, entonces también $AC \equiv A'C'$.

Antes de enunciar los otros dos axiomas de congruencia, demostremos los axiomas que acabamos de formular.

Aludiendo a la demostración del axioma III_1, designemos mediante C uno de los extremos del arco de circunferencia (o del segmento de recta) que representa la $\mathscr{L}$-recta a. Según el ap. 4.7 se puede hallar una transformación del círculo K en sí mismo de modo que lleve el punto A al centro O del círculo K y el punto C al punto R de la circunferencia Γ de este círculo (fig. 25). Como resultado, obtenemos un $\mathscr{L}$-movimiento L que transforma a en la $\mathscr{L}$-recta d, representada por el diámetro del círculo situado en el eje real, y a la $\mathscr{L}$-semirrecta AC, en la $\mathscr{L}$-semirrecta OR.

Si AC contenía al segmento AB, la imagen $B_1 = L\ (B)$ del punto B estará situada en OR. Señalemos en la $\mathscr{L}$-recta a' la semirrecta $A'C'$ que está situada hacia el lado dado de A'. Sea L' el $\mathscr{L}$-movimiento que transforma a' en d y $A'C'$ en OR, y sea B' el punto de la $\mathscr{L}$-recta a' para el cual $L'\ (B') = B_1$. Entonces, evidentemente, el $\mathscr{L}$-segmento $A'B'$ estará situado en a' hacia el lado dado de A' y el $\mathscr{L}$-movimiento $L^{-1}L'$ transformará a' en a y el segmento $A'B$ en AB.

Hay que demostrar también que B' es el único punto que satisface a las condiciones del axioma. Pero, en efecto, suponiendo que existiese otro punto más B'', situado en la semirrecta $A'C'$ y tal que el segmento $A'B'$ fuese congruente a AB, existiría en la semirrecta OR un punto $B_2 \neq B_1$ ($B_2 = L'\ (B'')$) tal que $OB_2 \equiv OB_1$. De aquí, según la definición, se deduciría que existe un

$\mathscr{L}$-movimiento Λ tal que $OB_2 = \Lambda(OB_1)$. (La consideración del conjunto $\overline{OB_2}$, simétrico a OB_2 respecto del eje real, es aquí superflua, puesto que $\overline{OB_2}$ coincide con OB_2). Esto significaría que $w = \Lambda(z)$ sería una transformación del círculo K en sí mismo tal, que el segmento rectilíneo OB_1 se transformaría en OB_2 y, por consiguiente, el diámetro situado en el eje real se transformaría en sí mismo. *A priori* existen dos posibilidades:

1) que el punto O se transforme en O y B_1 en B_2; entonces [según la fórmula (4.8:1), donde $\alpha = 0$] $\Lambda(z)$ tiene que tener la forma

$$w = \Lambda(z) = \frac{\mu}{R^2} z,$$

y como $|\mu| = R^2$, resulta $|w| = |z|$; pero esto contradice al hecho de que B_1 se transforma en B_2 ($|B_1| \neq |B_2|$);

2) que el punto B_1 se transforme en O y O en B_2; entonces

$$w = \Lambda(z) = \mu \cdot \frac{z - B_1}{R^2 - B_1 z} \; (\alpha = B_1), \quad B_2 = \Lambda(0) = -\frac{\mu B_1}{R^2}.$$

de donde $|B_2| = \frac{|\mu|}{R^2} |B_1| = |B_1|$, lo cual de nuevo contradice a la condición $|B_2| \neq |B_1|$.

Así, pues, la negación de la unicidad del punto B' en las condiciones del axioma III_1 conduce a una contradicción. Queda establecido el contenido fundamental del axioma.

El axioma III_2 es consecuencia inmediata de las propiedades simétrica y transitiva de la $\mathscr{L}$-congruencia.

Veamos el axioma III_3. Transformemos a en d mediante un $\mathscr{L}$-movimiento L, de modo que el punto B se transforme en el centro del círculo $B_1 = O$ y el punto C en un punto situado en la parte positiva del eje real. Entonces, en virtud de las hipótesis del axioma, el punto A se transformará en un punto situado en la parte negativa del eje real. Supongamos que A_1 y C_1 son los puntos homólogos de A y C (fig. 26). Si consideramos un $\mathscr{L}$-movimiento análogo, formado a partir de la $\mathscr{L}$-recta a', obtendremos que el punto A_2 estará situado en la parte negativa del eje real, $B_2 = O$ y C_2 estará situado en la parte positiva del eje real.

De las relaciones $AB \equiv A\,B'$, $AB \equiv A_1B_1$ y $A'B' \equiv A_2B_2$ se deducirá entonces que $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, es decir, $A_1O \equiv A_2O$, y, análogamente, $C_1O \equiv C_2O$. Pero A_1 y A_2 están situados en d hacia un lado de O. Debido a esto, de $A_1O \equiv A_2O$ se deduce que $A_1 = A_2$; análogamente, obtenemos, $C_1 = C_2$ y, por consiguiente, $A_1C_1 \equiv A_2C_2$. De aquí, finalmente, aplicando la propiedad transitiva de la $\mathscr{L}$-congruencia, obtenemos que $AC \equiv A\,C'$, como se quería demostrar.

Introduzcamos el concepto de $\mathscr{L}$-ángulo (como figura geométrica). Llamaremos $\mathscr{L}$-á n g u l o al conjunto de dos $\mathscr{L}$-semirrectas h y k, que parten de un punto A y pertenecen a distintas $\mathscr{L}$-rectas. El ángulo se designa mediante $\widehat{h, k}$ o $\widehat{k, h}$; el punto A se llama vértice y h y k, lados del $\mathscr{L}$-ángulo (fig. 27).

Evidentemente, los lados de un $\mathscr{L}$-ángulo dividen el $\mathscr{L}$-plano en dos regiones tales, que cualquier par de puntos pertenecientes a una de las regiones pueden unirse mediante un segmento de $\mathscr{L}$-recta que no se corta con los lados del ángulo (región convexa), mientras que existen pares de puntos, pertenecientes a la otra región, para los cuales es imposible una unión semejante (región no convexa). Para convencerse de lo dicho, lo más fácil es transformar el punto A mediante un $\mathscr{L}$-movimiento en O, debido a lo cual las semirrectas h y k se transformarán en radios de la circunferencia. A la primera de las regiones indicadas la llamaremos interior, a la segunda, región exterior del $\mathscr{L}$-ángulo. Cercioré-

monos de la justeza de los siguientes axiomas planos de congruencia (los axiomas considerados anteriormente se llaman lineales).

III$_4$. Sean dados un $\mathcal{L}$-ángulo $\widehat{h, k}$, una $\mathcal{L}$-recta a' y su $\mathcal{L}$-semirrecta h' que parte de un punto A de esta $\mathcal{L}$-recta. Entonces hacia un lado dado de a' existe una, y sólo una, $\mathcal{L}$-semirrecta k' que parte de A, tal que el ángulo $\widehat{h', k'}$ es congruente al ángulo $\widehat{h, k}$. Cada ángulo es congruente a sí mismo, es decir, $\widehat{h, k} \equiv \widehat{h, k}$ y también $\widehat{h, k} \equiv \widehat{k, h}$.

La formulación de este axioma y la comprobación de su justeza son semejantes al axioma III$_1$. Lo único es que en la demostración de la unicidad de la $\mathcal{L}$-semirrecta k' hay que basarse ahora en la conservación de la magnitud (la medida) del ángulo en el $\mathcal{L}$-movimiento. Según esto, es evidente que dos $\mathcal{L}$-ángulos $\widehat{h', k'}$ y $\widehat{h', k''}$ con un vértice común A y un lado común h', para los cuales k' y k'' están situados hacia un lado de a' y representan distintas $\mathcal{L}$-semirrectas, no pueden ser $\mathcal{L}$-congruentes.

Consideremos, finalmente, tres segmentos AB, BC y CA, pertenecientes a distintas $\mathcal{L}$-rectas. Estos segmentos forman un $\mathcal{L}$-triángulo, para el cual los puntos A, B y C son los vértices, y AB, BC y CA, los lados. Si h y k son unas semirrectas que parten de A y contienen a los lados AB y AC, entonces el ángulo $(\widehat{h, k})$ se llama ángulo del triángulo ABC c o m p r e n d i d o entre los lados AB y AC u o p u e s t o al lado BC. Dentro del mismo están situados todos los puntos interiores del triángulo ABC; se designa mediante $\widehat{BAC}$ o $\hat{A}$.

III$_5$. Si en los triángulos ABC y $A'B'C'$: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ y $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, entonces, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ y $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$.

Para comprobar este último axioma de congruencia, traslademos los triángulos ABC y $A'B'C'$, de modo que los vértices A y A' caigan al punto $z = 0$ y los lados AB y $A'B'$ coincidan con un mismo segmento de la recta OR. Entonces los lados AB, $A'B'$, AC y $A'C'$ se representarán por segmentos de radios que parten del vértice común O (A y A'). Si AC y $A'C'$ se sitúan en este caso hacia un lado del diámetro d de la circunferencia que lleva el segmento $AB = A'B'$, entonces, en virtud de la congruencia de los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{B'A'C'}$, AC y $A'C'$ tienen que estar situados en una misma $\mathcal{L}$-semirrecta que parte de O. Por esto coinciden los puntos C y C' (puesto que $AC \equiv A'C'$) y, debido a la coincidencia de los puntos A y A' y C y C', coincidirán los lados AC y $A'C'$ y también BC y $B'C'$, de donde se deduce la congruencia de los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ y $\widehat{BCA}$ y $\widehat{B'C'A'}$ (y junto con ello la congruencia de los triángulos mismos). Si AC y $A'C'$ se sitúan hacia diversos lados del diámetro d, entonces mediante la transformación de simetría respecto de este diámetro, llegamos al caso ya estudiado.

Introduzcamos ahora el concepto de magnitud de un ángulo y longitud de un segmento. Estos conceptos, que denominaremos con el vocablo general de «medida», tienen que satisfacer a las siguientes condiciones:

I. La medida tiene que ser un número no negativo.

II. La medida no tiene que variar en los $\mathcal{L}$-movimientos, es decir, a los ángulos o segmentos congruentes tienen que corresponder medidas iguales.

III. La medida tiene que poseer la propiedad aditiva, en el sentido de que la medida de un segmento AC tiene que ser igual a la suma de las medidas de AB y BC para cualquier punto interior B de este segmento y la medida del

ángulo $(\widehat{h, k})$ tiene que ser igual a la suma de las medidas de los ángulos $(\widehat{h, l})$ y $(\widehat{l, k})$ para cualquier semirrecta l que parta del vértice del ángulo y esté contenida dentro del ángulo.

El problema de la medida de los ángulos se resuelve con una facilidad particular. Por medida del $\mathscr{L}$-ángulo $(\widehat{h, k})$ se toma la medida euclídea del ángulo formado por los arcos de las circunferencias que representan h y k. Evidentemente, en este caso se cumplen las condiciones I y III; en lo que se refiere a la condición II, ésta también se cumple debido a la conservación de las magnitudes de los ángulos en los $\mathscr{L}$-movimientos.

Consideremos ahora la medida de los segmentos. La longitud euclídea del arco de la circunferencia que representa el segmento AB también satisface a las condiciones I y III. Sin embargo, ésta no satisface a la condición II, puesto que los $\mathscr{L}$-movimientos (a excepción de la rotación alrededor del punto O y de la transformación de simetría respecto del diámetro) hacen variar la longitud euclídea. Para hallar una medida que satisfaga a todas las tres condiciones, apliquemos la invariabilidad en los $\mathscr{L}$-movimientos de la razón doble de cuatro puntos situados en cualquier recta o circunferencia euclídea.

Sean a y b los afijos de los extremos del segmento AB y sean α y β los afijos de los extremos del arco de circunferencia que lleva este segmento. Elijamos las designaciones para estos dos últimos puntos de modo que los cuatro puntos: α, β, a y b se sitúen en el arco de la circunferencia en el orden α, a, b y β. En el $\mathscr{L}$-movimiento los puntos α, a, b y β se transformarán en nuevos puntos: α', a', b' y β', además, los puntos α' y β' se quedarán en la circunferencia y no se alterará el orden relativo de los puntos α', a', b' y β' en el arco, en el que se transformará el arco inicial. No variará tampoco la razón doble $(\alpha, \beta, b, a) = \frac{b-\alpha}{b-\beta} : \frac{a-\alpha}{a-\beta}$. Demostremos que éste es un número positivo mayor que la unidad. Con este fin, hagamos coincidir, mediante un $\mathscr{L}$-movimiento, la $\mathscr{L}$-recta que lleva el segmento AB con el diámetro d situado en el eje real, de modo que el punto a se traslade al punto O. Supongamos que, en este caso, el punto α se transforma en R, entonces β se transformará en $-R$ y el punto b, en un punto b' tal, que $0 > b' > -R$ (esto último es consecuencia de la conservación de la posición relativa de los puntos de la $\mathscr{L}$-recta en el $\mathscr{L}$-movimiento). Obtendremos: $(\alpha, \beta, b, a) = (R, -R, b', 0) = \frac{b'-R}{b'+R} : \frac{0-R}{0+R} = \frac{R-b'}{R+b'} > 1$, como se quería demostrar. Por lo tanto, la razón doble (α, β, b, a) como medida del segmento AB posee las propiedades I y II. No obstante, fácilmente se observa que no posee la propiedad aditiva III. En efecto, para un punto C de afijo c, perteneciente a AB, se tiene:

$$(\alpha, \beta, c, a) = \frac{c-\alpha}{c-\beta} : \frac{a-\alpha}{a-\beta}, \quad (\alpha, \beta, b, c) = \frac{b-\alpha}{b-\beta} : \frac{c-\alpha}{c-\beta}$$

y por consiguiente

$$(\alpha, \beta, b, a) = \frac{b-\alpha}{c-\beta} : \frac{a-\alpha}{a-\beta} = \left(\frac{c-\alpha}{c-\beta} : \frac{a-\alpha}{a-\beta}\right)\left(\frac{b-\alpha}{b-\beta} : \frac{c-\alpha}{c-\beta}\right) =$$
$$= (\alpha, \beta, c, a) \cdot (\alpha, \beta, b, c),$$

o sea, la razón doble (α, β, b, a) no es igual a la suma de las razones dobles (α, β, c, a) y (α, β, b, c), sino a su producto (que, por lo general, no es igual a la suma).

Pero ahora está claro que se satisfacen todas las condiciones que se exigen para la medida si se toma por longitud del segmento el logaritmo de la razón

doble: $\ln(\alpha, \beta, b, a)$. En efecto, como $(\alpha, \beta, b, a) > 1$, se tiene $\ln(\alpha, \beta, b, a) > 0$. Por otra parte, $\ln(\alpha, \beta, b, a)$ no varía en los $\mathcal{L}$-movimientos, pues esto se cumple para (α, β, b, a). Finalmente, para cualquier punto C perteneciente al segmento AB, se tiene:

$$\ln(\alpha, \beta, b, a) = \ln(\alpha, \beta, c, a) + \ln(\alpha, \beta, b, c).$$

Obsérvese que en nuestra definición de $\mathcal{L}$-longitud del segmento AB (o, lo que es lo mismo, de $\mathcal{L}$-distancia entre los puntos A y B) *los puntos de la circunferencia se pueden considerar como puntos del infinito del $\mathcal{L}$-plano*. En efecto, fijando en la $\mathcal{L}$-recta un punto A (a), hacemos al punto B (b) aproximarse indefinidamente a β (o fijando B, hacemos que A se aproxime indefinidamente a α). Entonces la razón doble $(\alpha, \beta, b, a) = \frac{b-\alpha}{b-\beta} : \frac{a-\alpha}{a-\beta}$ crecerá indefinidamente y, por consiguiente, la $\mathcal{L}$-longitud del segmento AB: $\ln(\alpha, \beta, b, a)$ tenderá hacia $+\infty$.

Continuando la verificación de los sistemas de axiomas de Hilbert para nuestro modelo de geometría de Lobachevski, omitimos por ahora el IV grupo de axiomas (el axioma de paralelismo), pasando inmediatamente al último, V grupo de axiomas de continuidad.

V_1 (axioma de Arquímedes). Sea A_1 un punto cualquiera de una $\mathcal{L}$-recta, situado entre unos puntos A y B arbitrariamente dados; tracemos los puntos $A_2, A_3, A_4, \ldots$ de modo que el punto A_1 esté situado entre A y A_2, A_2 entre A_1 y A_3, A_3 entre A_2 y A_4, etc. y además, que los segmentos AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... sean congruentes entre sí; entonces en la serie de puntos $A_2, A_3, A_4, \ldots$ siempre existe un punto A_n tal, que el punto B está situado entre A y A_n.

Para convencerse de que este axioma es justo es suficiente observar que, en virtud de las propiedades II y III de la medida, la longitud del segmento AA_n es igual al producto de la longitud del segmento AA_1 por n. Por consiguiente, la longitud del segmento AA_n crece indefinidamente junto con n y el punto A_n tiende hacia uno de los extremos del arco que representa la $\mathcal{L}$-recta. Como el punto B está situado entre A y este extremo, resulta que comenzando desde cierto n en adelante éste quedará situado entre A y A_n.

Como segundo axioma de continuidad, en lugar del axioma de Hilbert de plenitud, tomaremos el axioma de continuidad de Cantor.

V_2. Si en una $\mathcal{L}$-recta existen dos sucesiones de puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ y $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ tales que, cualesquiera que sean p y q, B_q está situado entre A_p y B_{q-1}, y A_p entre B_q y A_{p-1}, entonces en esta $\mathcal{L}$-recta existe al menos un punto C situado entre A_p y B_q para cualesquiera p y q.

Considerando esta proposición como un teorema de la geometría euclídea, que expresa una propiedad del arco de circunferencia que representa a nuestra $\mathcal{L}$-recta, nos convencemos inmediatamente de su justeza.

Hasta ahora observábamos una semejanza completa de las dos geometrías: la geometría de Euclides y la de Lobachevski. Esta semejanza se expresaba en que todos los axiomas de unión (relativos a la geometría plana), orden de congruencia y continuidad se formulaban igualmente en estas geometrías. De aquí se deduce que todos los teoremas de la geometría euclídea son válidos también en la geometría de Lobachevski. La diferencia entre las dos geometrías se manifiesta solamente al considerar los axiomas del IV grupo de la geometría euclídea, precisamente, el axioma de paralelismo. Este no se cumple en la geometría de Lobachevski. Aquí, *por cada punto A del $\mathcal{L}$-plano, no situado en la $\mathcal{L}$-recta dada a, se puede trazar un conjunto infinito de $\mathcal{L}$-rectas distintas que no tengan puntos comunes con a.* Esta proposición queda clara con solo mirar la fig. 28. Aquí, por el punto A se han trazado dos arcos $A\alpha$ y $A\beta$, ortogonales a la circunferencia Γ, de modo que cada uno de ellos posee un extremo común

con el arco $\alpha\beta$ que representa la $\mathcal{L}$-recta a. Los arcos $A\alpha$ y $A\beta$ representan $\mathcal{L}$-rectas que no tienen puntos comunes con la $\mathcal{L}$-recta a (recordemos al lector que, según la definición, *son puntos del $\mathcal{L}$-plano solamente los que están situados en el interior de la circunferencia* Γ). Estas dos $\mathcal{L}$-rectas se llaman $\mathcal{L}$-paralelas a a trazadas por el punto A. Cada una de éstas tienen con a un punto del infinito común (α y β, respectivamente). Evidentemente, toda $\mathcal{L}$-recta que pase por A y esté comprendida en el ángulo formado por las $\mathcal{L}$-paralelas, no tiene puntos comunes con a, no sólo finitos sino tampoco del infinito. Las últimas $\mathcal{L}$-rectas no se llaman $\mathcal{L}$-paralelas.

Del hecho indicado se deducen una serie de consecuencias importantes. Demostremos ante todo el siguiente teorema: *la suma de los ángulos de un $\mathcal{L}$-triángulo es menor que* π. Sea ABC un $\mathcal{L}$-triángulo con los ángulos α, β y γ.

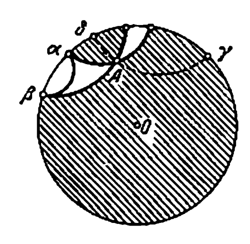



FIG. 28

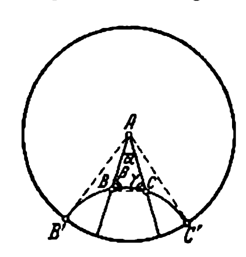


FIG. 29

Apliquémosle un $\mathcal{L}$-movimiento que lleve el vértice A al centro $z = 0$ del círculo. Entonces este $\mathcal{L}$-triángulo tomará la forma indicada en la fig. 29. Evidentemente, el arco $B'C'$, que representa la $\mathcal{L}$-recta en la cual está situada el lado BC del $\mathcal{L}$-triángulo, tendrá la convexidad dirigida hacia el vértice A. En efecto, este punto es el punto de intersección de las tangentes al arco $B'BCC'$ trazadas en los puntos B' y C' y, por consiguiente, está situado fuera de la circunferencia a la cual pertenece el arco $B'BCC'$. Uniendo B y C con un segmento de recta (euclídea), obtenemos un triángulo euclídeo ABC, cuya suma de ángulos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ es igual a π. Pero $\alpha = \hat{A}$, $\beta < \hat{B}$ y $\gamma < \hat{C}$, por lo tanto, $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, como se quería demostrar.

Demostremos otro teorema más que no hay en la geometría euclídea: *dos $\mathcal{L}$-triángulos con ángulos iguales son $\mathcal{L}$-congruentes.*

Sean ABC y $A_1B_1C_1$ triángulos con ángulos iguales, es decir, sean $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ y $\gamma = \gamma_1$. Sometamos estos triángulos a sendos $\mathcal{L}$-movimientos, que transformen los puntos A y A_1 en el punto O, y los lados AB y A_1B_1 en segmentos de un mismo radio h de la circunferencia Γ (claro, estos movimientos serán distintos). Si, en este caso, los lados AC y A_1C_1 no caen en un mismo radio de la circunferencia, entonces, debido a la igualdad de los ángulos α y α_1, se situarán en radios simétricos respecto de h. Por lo tanto, aplicando a uno de estos triángulos la transformación de simetría respecto de h, hacemos coincidir a los radios en los cuales están situados los lados AC y A_1C_1. Si, entonces, los triángulos no coinciden, nos encontraremos con una de las dos posibilidades señaladas en la fig. 30.

En el caso a) los lados BC y B_1C_1 se cortan en cierto punto D, gracias a lo cual se forman dos $\mathcal{L}$-triángulos: BDB_1 y CDC_1 (si D coincide con B y B_1 o con C y C_1, entonces uno de estos últimos degenera en un punto). Calculando los ángulos del $\mathcal{L}$-triángulo BDB_1, tendremos, por ejemplo, para el caso repre-

sentado en la fig. *a*):

$$\hat{B}_1=\beta_1, \qquad \hat{B}=\pi-\beta \quad \text{y} \quad \hat{D}>0.$$

Por lo tanto

$$\hat{B}_1+\hat{B}+\hat{D}=\pi+\beta_1-\beta+\hat{D}=\pi+D \text{ (puesto que } \beta_1=\beta).$$

Así, pues, hemos llegado a la conclusión de que la suma de los ángulos del $\mathscr{L}$-triángulo BDB_1 es mayor que π, lo cual es imposible.

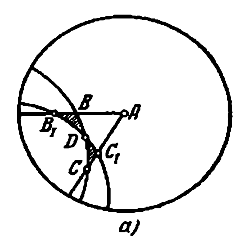
En el caso b), los ángulos del $\mathscr{L}$-cuadrilátero BB_1CC_1 son:

$$\hat{B}=\pi-\beta, \quad \hat{B}_1=\beta_1, \quad \hat{C}=\pi-\gamma \quad \text{y} \quad \hat{C}_1=\gamma_1.$$

Por lo tanto

$$\hat{B}+\hat{B}_1+\hat{C}+\hat{C}_1=2\pi+\beta_1-\beta+\gamma_1-\gamma=2\pi.$$

Pero la suma de los ángulos de este mismo $\mathscr{L}$-cuadrilátero se puede calcular dividiéndolo por la $\mathscr{L}$-diagonal B_1C en dos $\mathscr{L}$-triángulos BCB_1 y B_1CC_1 y



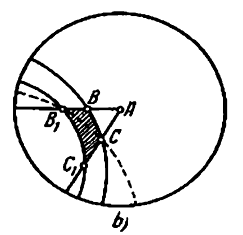


FIG. 30

hallando la suma de todos los ángulos de estos últimos. Como tiene que resultar un número menor que 2π, de aquí obtenemos de nuevo una contradicción.

Resumiendo, como resultado de los $\mathscr{L}$-movimientos señalados, los $\mathscr{L}$-triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ tienen que coincidir, es decir, son congruentes.

Para la construcción de la geometría de Lobachevski tiene gran importancia el denominado ángulo de paralelismo. Sea a una $\mathscr{L}$-recta y A un punto fuera de ella. Tracemos por A dos $\mathscr{L}$-paralelas a a y una $\mathscr{L}$-perpendicular a a (fig. 31). Las paralelas forman con esta perpendicular dos ángulos en el punto A. Estos ángulos se llaman ángulos de paralelismo y dependen solamente de la $\mathscr{L}$-distancia del punto A hasta la $\mathscr{L}$-recta a (esta distancia se mide por la $\mathscr{L}$-longitud δ de la perpendicular AB bajada de A a a). Para estudiar el ángulo de paralelismo como función de δ —esta función se designa mediante $\Pi(\delta)$ — apliquemos el $\mathscr{L}$-movimiento que lleva la $\mathscr{L}$-recta perpendicular a a al diámetro d de modo que el punto A se transforme en el punto $A'=O$ (fig. 32). Entonces las $\mathscr{L}$-paralelas a a se transformarán en los radios de la circunferencia. De la simetría del dibujo se observa la igualdad de los ángulos entre las $\mathscr{L}$-paralelas y la perpendicular $A'B'$.

Designemos mediante b' el afijo del punto B' y sea, para fijar ideas, $b'>0$. Entonces, para la $\mathscr{L}$-distancia del punto A' hasta la recta a', tendremos:

$$\delta=\ln(-1,\ 1,\ b',\ 0)=\ln\left(\frac{b'+1}{b'-1}:\frac{0+1}{0-1}\right)=\ln\frac{1+b'}{1-b'},$$

de donde

$$\frac{1+b'}{1-b'}=e^{\delta} \quad \text{y} \quad b'=\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1}.$$

Tracemos por el punto β' la tangente a la circunferencia unidad hasta su intersección con el eje real en el punto C'. Evidentemente, C' será el centro de la circunferencia cuyo arco representa la $\mathscr{L}$-recta a', y $C'\beta'=\rho$, su radio.

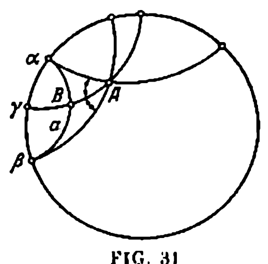


FIG. 31

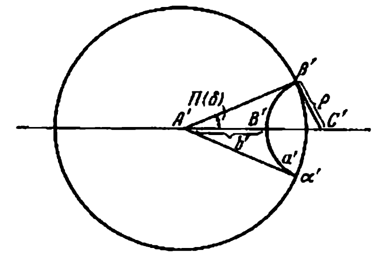


FIG. 32

Como $A'\beta'$ es un segmento tangente a esta circunferencia, resulta: $A'\beta'^2 = A'B'(A'B'+2\rho)$ o sea,

$$1=b'(b'+2\rho),$$

de donde

$$\rho=\frac{1-b'^2}{2b'}=\frac{1-\left(\frac{e^{\delta}-1}{1+e^{\delta}}\right)^2}{2\frac{e^{\delta}-1}{1+e^{\delta}}}=\frac{2e^{\delta}}{e^{2\delta}-1}=\frac{1}{\frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{2}}=\frac{1}{\operatorname{sh}\delta},$$

donde $\operatorname{sh}\delta$ es el seno hiperbólico de δ. Definitivamente, del triángulo $A'\beta'C'$ hallamos:

$$\Pi(\delta)=\operatorname{arctg}\frac{\beta'C'}{A'\beta'}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{sh}\delta}.$$

De aquí se deduce que el ángulo de paralelismo $\Pi(\delta)$ está comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$:

$$0<\Pi(\delta)<\frac{\pi}{2},$$

además, $\Pi(\delta)\to\frac{\pi}{2}$ a medida que $\delta\to 0$ $\left(\text{puesto que } \operatorname{sh}\delta\to 0,\ \frac{1}{\operatorname{sh}\delta}\to+\infty\right.$ y, por consiguiente, $\left.\operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{sh}\delta}\to\frac{\pi}{2}\right)$, y $\Pi(\delta)\to 0$ cuando $\delta\to\infty$ $\left(\text{puesto que}\right.$ $\left.\operatorname{sh}\delta\to\infty,\ \frac{1}{\operatorname{sh}\delta}\to 0 \text{ y } \operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{sh}\delta}\to 0\right)$.

La fórmula que acabamos de deducir para $\Pi(\delta)$ es básica para toda la geometría de Lobachevski.

Aquí no vamos a desarrollar más la geometría de Lobachevski, recomendando al lector que lea obras especiales *).

4.9. Entre las funciones racionales de grado superior al primero, en el ap. 3.3 estudiamos la función de la forma $w = (z - a)^n$, donde n es un número natural ($n > 1$).

Detengámonos también en la función $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \lambda(z)$, que frecuentemente aparece en la resolución de diversos problemas. Por todas las aplicaciones de esta función que N. Joukowski halló para la aeromecánica (véase el cap. V), se llama **función de Joukowski**.

Evidentemente, ésta es una función de segundo orden $\left(w = \frac{z^2+1}{2z}\right)$, que satisface a la condición $\lambda(z) = \lambda\left(\frac{1}{z}\right)$. De aquí se deduce que cada punto del plano w tiene en la transformación $w = \lambda(z)$ dos (no más de dos) preimágenes z_1 y z_2, ligadas por la relación $z_1z_2 = 1$. Si una de éstas pertenece al interior del círculo unidad, la otra pertenece a su exterior y viceversa. Por consiguiente, los conjuntos de valores $w = \lambda(z)$ que se toman en el interior y en el exterior del círculo unidad, tienen que ser iguales. Demostremos que la función $w = \lambda(z)$, siendo continua (en el sentido generalizado) en el dominio $|z| \leqslant 1$ (o $|z| \geqslant 1$) y tomando distintos valores en los puntos del recinto $|z| < 1$ (o $|z| > 1$), transforma biunívoca y continuamente el recinto $|z| < 1$ (o $|z| > 1$) en cierto recinto G del plano w. Para hallar la frontera Γ de este recinto hay que hallar la imagen de la circunferencia unidad $\gamma : |z| = 1$. Pero, si

$$z = e^{it}, \; 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \text{ entonces } w = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t \; (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

es decir, la imagen de la circunferencia unidad γ es el segmento del eje real $[-1, 1]$, recorrido dos veces. Por lo tanto, se puede esperar que el recinto G está formado por todos los puntos del plano w, a excepción de aquellos que pertenecen al segmento del eje real Γ: $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Para demostrar esto, hagamos un estudio más detallado de esta transformación; con este fin, consideremos (fig. 33) las imágenes de las circunferencias $|z| = r$ y los radios $\operatorname{Arg} z = \alpha + 2k\pi$. Podemos limitarnos a considerar, por ejemplo, el interior de la circunferencia unidad $|z| < 1$.

Hagamos

$$z = re^{it}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \quad (0 < r < 1);$$

*) N. Lobachevski. *Tres obras de geometría. Estudios geométricos sobre la teoría de las líneas paralelas.* Véase también N. Efímov, *Geometría superior.*

entonces

$$w=\frac{1}{2}\left[re^{it}+\frac{1}{r}e^{-it}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+r\right)\cos t-i\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)\operatorname{sen} t$$

o bien

$$u=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+r\right)\cos t,\quad v=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)\operatorname{sen} t\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).\quad (4.9:1)$$

De aquí, eliminando el parámetro t, obtenemos:

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+r\right)\right]^2}+\frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)\right]^2}=1.\quad (4.9:2)$$

Esta es la ecuación de una elipse con los semiejes $a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+r\right)$ y $b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)$ y focos ± 1. De las fórmulas (4.9:1) se deduce que,

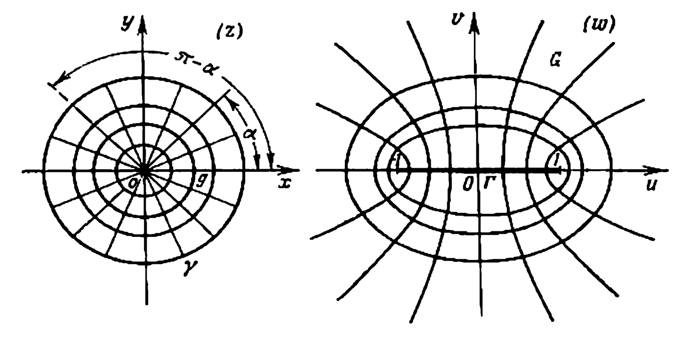


FIG. 33

cuando t crece continuamente desde 0 hasta 2π (es decir, que el punto z describe una sola vez toda la circunferencia $|z|=r$ en dirección positiva), el punto correspondiente describe una sola vez toda la elipse (4.9:2) en dirección negativa. En efecto, cuando $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, u es positivo y decrece desde a hasta 0, mientras que v es negativo y decrece desde 0 hasta $-b$; cuando $\frac{\pi}{2}<t<\pi$, u continúa decreciendo desde 0 hasta $-a$, mientras que v crece desde $-b$ hasta 0; cuando $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$, u crece desde $-a$ hasta 0, mientras que v crece

desde 0 hasta b; finalmente, cuando $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, u crece desde 0 hasta a, mientras que v decrece desde b hasta 0.

Variando el radio r de la circunferencia $|z| = r$ desde 0 hasta 1, hacemos decrecer a a desde ∞ hasta 1 y b, desde ∞ hasta 0; las elipses correspondientes describirán todo el conjunto de elipses del plano w con los focos ± 1. De esto ya se deduce que $w = \lambda(z)$ transforma biunívocamente el círculo unidad en el recinto G que representa el exterior del segmento Γ. Además, la imagen del centro del círculo unidad es el punto del infinito, y la imagen de la circunferencia unidad es el segmento Γ (doblemente recorrido).

Para la imagen del radio $z = te^{i\alpha}$, $0 \leqslant t < 1$, obtenemos primero la ecuación

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + t\right)\cos\alpha - i\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)\operatorname{sen}\alpha,$$

o bien

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + t\right)\cos\alpha, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)\operatorname{sen}\alpha \quad (0 \leqslant t < 1). \quad (4.9{:}3)$$

De aquí se ve que las imágenes de dos radios, simétricos respecto del eje real (si a uno de ellos le corresponde el ángulo α, entonces al otro le corresponderá el ángulo $-\alpha$), también son simétricos respecto del eje real, mientras que las imágenes de dos radios, simétricos respesto del eje imaginario (si a uno de ellos le corresponde el ángulo α, entonces al otro le corresponderá el ángulo $\pi - \alpha$), son simétricas respecto del eje imaginario. Por lo tanto, es suficiente considerar solamente las imágenes de los radios pertenecientes, por ejemplo, al primer cuadrante: $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Obsérvese que para $\alpha = 0$ se tiene:

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + t\right), \qquad v = 0 \qquad (0 \leqslant t < 1).$$

Esto es un semiintervalo infinito del eje real: $1 < u \leqslant \infty$. El intervalo simétrico a éste $-\infty \leqslant u < -1$ es la imagen del radio que corresponde a $\alpha = \pi$.

Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se tiene:

$$u = 0, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right) \qquad (0 \leqslant t < 1).$$

Esto es el semieje imaginario: $-\infty \leqslant v < 0$. El otro semieje imaginario $0 < v \leqslant \infty$ es la imagen del radio que corresponde a $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

En resumen, la imagen del diámetro «horizontal» de la circunferencia unidad es el intervalo infinito del eje real que va desde el punto -1 hasta el punto $+1$ pasando por ∞, mientras que la imagen del diámetro «vertical» es todo el eje imaginario, a excepción del origen de coordenadas (incluyendo el punto del infinito).

Supongamos ahora que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Entonces, eliminando el parámetro t entre las ecuaciones (4.9:3), obtenemos:

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 1. \qquad (4.9:4)$$

Esta es la ecuación de una hipérbola con el semieje real $a = \cos\alpha$; con el semieje imaginario $b = \operatorname{sen}\alpha$ y con los focos ± 1. Sin embargo, el punto w no describe toda la hipérbola por completo cuando el punto z describe todo el radio $z = te^{i\alpha}$ $(0 \leqslant t < 1)$. En efecto, de las ecuaciones (4.9:3) se deduce que, al crecer t desde 0 hasta 1, u decrece desde ∞ hasta $\cos\alpha$, mientras que v crece desde $-\infty$ hasta 0. Por consiguiente, el punto describe una vez solamente la cuarta parte de toda la hipérbola perteneciente al cuarto cuadrante. En virtud de lo observado anteriormente, la cuarta parte perteneciente al primer cuadrante, es decir, la simétrica a la dada respecto del eje real, será la imagen del radio simétrico al radio dado respecto del eje real, es decir, del radio correspondiente al ángulo $-\alpha$. Pero no sería justo decir que toda la rama de la hipérbola que pasa por el primero y cuarto cuadrantes es la imagen del par de radios indicados. En efecto, el vértice de la hipérbola $u = a$, $v = 0$ no pertenece a esta imagen (no olvidemos que nuestros radios se toman sin sus puntos extremos y que el vértice de la hipérbola es la imagen de cada uno de estos puntos: $t = 1$).

Luego obtenemos que las imágenes de los radios que corresponden a los ángulos $\pi - \alpha$ y $\alpha + \pi$ (o $\alpha - \pi$), son las cuartas partes de la misma hipérbola, situadas en el tercero y segundo cuadrantes.

La hipérbola completa, a excepción de sus dos vértices, es la imagen de la cuaterna de radios: $\pm\alpha$, $\pi \pm \alpha$. Obsérvese que la imagen de cada uno de los diámetros formados por estos radios será la parte de la hipérbola formada por los pares de sus cuartas partes que son simétricas respecto del origen de coordenadas y que están ligadas entre sí en el punto del infinito.

Resumiendo, *la función* $w = \lambda(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ *transforma biunívocamente tanto el interior como el exterior del círculo unidad en el exterior del segmento* $-1 \leqslant u \leqslant +1$ *(del eje real).*

En este caso, las circunferencias $|z| = r$ *se transforman en elipses con los focos* ± 1 *y semiejes:* $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{r} \pm r\right|$, *y los pares de diámetros simé-*

tricos respecto de los ejes coordenados (formados por los radios $z = \pm re^{+i\alpha}$ $(0 \leqslant r < 1)$ *se transforman en hipérbolas con los focos* ± 1 *y semiejes* $|\cos\alpha|$, $|\operatorname{sen}\alpha|$, *a excepción de los vértices de estas hipérbolas.*

Como la derivada de nuestra función

$$w = \lambda'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

es diferente de cero para $z \neq \pm 1$, la transformación es conforme en todos los puntos de los recintos considerados (el interior y el exterior del círculo unidad). De aquí se deduce que las hipérbolas se cortan con las elipses bajo ángulos iguales a los formados en las intersecciones de los radios y las circunferencias, es decir, bajo ángulos rectos. Esta deducción ya se hizo antes (ap. 3.7).

Consideremos también las imágenes de las circunferencias que pasan por los puntos ± 1. De la igualdad

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \lambda(z)$$

obtenemos:

$$w - 1 = \frac{z^2 - 2z + 1}{2z} = \frac{(z-1)^2}{2z}, \qquad w + 1 = \frac{z^2 + 2z + 1}{2z} = \frac{(z+1)^2}{2z},$$

de donde

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

Fácilmente se observa que esta ecuación es equivalente a la dada. Haciendo $\frac{z-1}{z+1} = z'$ y $\frac{w-1}{w+1} = w'$, hallaremos que la transformación $w = \lambda(z)$ puede sustituirse por las siguientes:

$$z' = \frac{z-1}{z+1}, \qquad w' = z'^2 \quad \text{y} \quad \frac{w-1}{w+1} = w'. \qquad (4.9{:}5)$$

La primera transforma las circunferencias que pasan por los puntos ± 1 en rectas que pasan por el origen de coordenadas. la segunda transforma cada una de estas rectas en un rayo que parte del origen de coordenadas, y, finalmente, la última transforma cada uno de estos rayos en el arco de la circunferencia que une los puntos ± 1. De las fórmulas (4.9:5) se ve fácilmente que, si el ángulo entre la circunferencia y la dirección positiva del eje real en el punto $z = 1$ era igual a θ, entonces el ángulo en el punto $w = 1$ entre su imagen (el arco de la circunferencia) y la dirección positiva del eje real será igual a 2θ (fig. 34).

Así, pues, la función $w = \lambda(z)$ transforma cada circunferencia γ, que pase por los puntos ± 1 y que forme en el punto 1 el ángulo θ con

la dirección positiva del eje real, en un arco δ de circunferencia que pasa por los puntos ± 1 y forma el ángulo 2θ con la dirección positiva del eje real. Las mismas fórmulas (4.9:5) muestran que en este caso cada uno de los arcos de γ por separado, con los extremos ± 1, se transforma en el mismo arco δ.

Obsérvese que en la primera de las transformaciones (4.9:5) el exterior de la circunferencia γ se transforma en un semiplano, en la segunda obtenemos un recinto limitado por un rayo rectilíneo que parte del origen de coordenadas, y, finalmente, en la tercera,

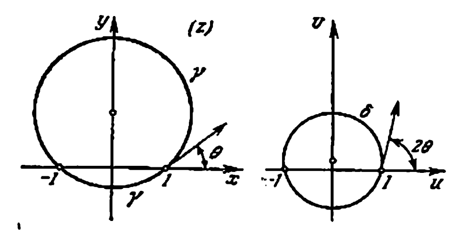


FIG. 34

un recinto cuya frontera es el arco δ. Como todas estas transformaciones son biunívocas en los recintos correspondientes, la función $w = \lambda(z)$ realiza una transformación biunívoca y conforme del exterior de la circunferencia γ (y también del interior de esta circunferencia) en el recinto cuya frontera es el arco de la circunferencia δ que une los puntos ± 1.

Conviene señalar que la función $w = \lambda(z)$ transforma el semicírculo k_1: $|z| < 1$, situado en el semiplano superior, en el semiplano inferior w, y el semicírculo k_2 situado en el semiplano inferior, en el semiplano superior w. Pero, en virtud de la relación $\lambda(z) = \lambda\left(\frac{1}{z}\right)$, la función toma en los puntos del semicírculo k_2 los mismos valores que en los puntos del semiplano superior que son exteriores al semicírculo k_1. Designando el conjunto de estos últimos puntos mediante K_2 (fig. 35), se puede afirmar que la imagen del recinto K_2 también es el semiplano superior. Tengamos en cuenta, finalmente, que la imagen de la semicircunferencia que separa k_1 y K_2 es el intervalo $-1 < u < 1$, recorrido una sola vez. De aquí se deduce que la imagen del semiplano superior en la transformación $w = \lambda(z)$ consta de los semiplanos superior e inferior y del intervalo del eje real: $-1 < u < 1$, es decir, es todo el plano, a excepción del segmento infinito del eje real que une los puntos -1 y $+1$ mediante el punto del infinito.

Como aplicación de las observaciones hechas aquí, proponemos al lector estudiar la transformación de la franja $0 < x < \pi$ mediante la función $w = \cos z$, considerando esta transformación como el resultado de las transformaciones

$$z_1 = iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad w = z_3 = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right),$$

efectuadas sucesivamente, una tras otra. El lector tiene que demostrar que $w = \cos z$ transforma biunívoca y conformemente la

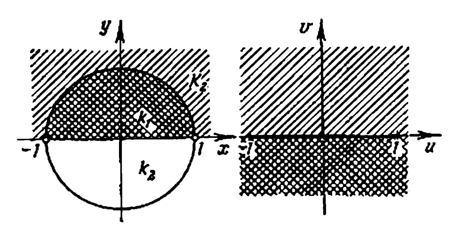


FIG. 35

franja indicada en el recinto del plano w limitado por el segmento infinito del eje real que une los puntos -1 y 1 mediante el punto del infinito.

4.10. Aquí nos detendremos brevemente en las *funciones meromorfas trascendentes* elementales (es decir, funciones meromorfas no racionales). Entre las más elementales (a excepción de las funciones enteras) figuran, por ejemplo, las funciones

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

Que éstas no son racionales, se deduce inmediatamente de que cada una de estas funciones posee un conjunto infinito de polos, es decir, de puntos en los cuales la función se hace infinita, mientras que la función racional posee solamente un número finito de polos.

Las funciones indicadas, así como las funciones enteras $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$, figuran en la clase de las funciones trigonométricas. Esta última se define como la clase de funciones meromorfas $f(z)$ que admiten la representación

$$w = f(z) = \frac{P(e^{iz})}{Q(e^{iz})} = \frac{a_0 + a_1 e^{iz} + a_2 e^{2iz} + \ldots + a_n e^{niz}}{b_0 + b_1 e^{iz} + b_2 e^{2iz} + \ldots + b_m e^{miz}}. \qquad (4.10:1)$$

Está claro que obtenemos la misma clase al considerar las funciones expresables en la forma

$$F(z)=\frac{\sum_{-n}^{n} a_j e^{ijz}}{\sum_{-m}^{m} b_k e^{ikz}}. \tag{4.10:2}$$

Esta última expresión puede escribirse así:

$$F(z)=\frac{a_0+\sum_{1}^{n}[(a_j-a_{-j})\cos jz+i\,(a_j-a_{-j})\,\mathrm{sen}\,jz]}{b_0+\sum_{1}^{m}[(b_k+b_{-k})\cos kz+i\,(b_k-b_{-k})\,\mathrm{sen}\,kz]}=$$

$$=\frac{a_0+\sum_{1}^{n}(A_j'\cos jz+A_j''\,\mathrm{sen}\,jz)}{b_0+\sum_{1}^{m}(B_k'\cos kz+B_k''\,\mathrm{sen}\,kz)}. \tag{4.10:3}$$

En el caso particular, cuando el denominador es constante (entonces se puede suponer que b_0 es igual a 1), obtenemos un p o l i n o m i o t r i g o n o m é t r i c o:

$$F(z)=a_0+\sum_{1}^{n}(A_j'\cos jz+A_j''\,\mathrm{sen}\,jz).$$

Si al menos uno de los números A_n' o A_n'' es diferente de cero, se dice que $F(z)$ es un polinomio trigonométrico de orden n.

Volvamos a considerar de nuevo la fórmula (4.10:1) y hagamos $e^{iz}=t$; entonces obtenemos:

$$w=\frac{P(t)}{Q(t)}=S(t), \quad t=e^{iz},$$

es decir, una función trigonométrica arbitraria es una función racional de la exponencial. Evidentemente, toda función trigonométrica es periódica, de período 2π. Por lo tanto, es suficiente estudiarla en una franja cualquiera g: $x_0\leqslant x<x_0+2\pi$. En cada una de las franjas

$$g_h: x_0+2k\pi\leqslant x<x_0+(2k+1)\pi$$

esta función, debido a la periodicidad, tendrá un mismo comportamiento. Supongamos que z describe la franja g (incluyendo en ella la recta $x=x_0$); entonces $z_1=iz$ describirá una franja $x_0\leqslant y_1<$ $<x_0+2\pi$ de la misma anchura 2π, paralela al eje real. Por consi-

guiente, $t = e^{iz}$ describirá un ángulo de medida 2π con el vértice en el origen de coordenadas. Los lados de este ángulo se confunden en una semirrecta $\operatorname{Arg} t = x_0 + 2k\pi$, que también es recorrida por el punto t, precisamente cuando z describe la recta $\operatorname{Re} z = x_0$. Al fin y al cabo, cuando z describe la franja g, t describe todo el plano, a excepción de los puntos $t = 0$ y $t = \infty$.

Si N es el orden de la función racional $w = S(t)$, ésta, como ya se sabe por el ap. 4.1, toma cada uno de sus valores, por lo general, en N puntos del plano ampliado t. Como en nuestro caso se han excluido los valores $t = 0$ y $t = \infty$, solamente se puede afirmar que w tomará todos los valores, a excepción, posiblemente, de los valores $S(0)$ y $S(\infty)$, para N valores de t (entre los cuales algunos pueden ser iguales entre sí para valores especiales de w).

Pero la correspondencia entre t y z es biunívoca dentro de los límites de la franja g; debido a esto la función trigonométrica $w = S(e^{iz})$ toma cada valor complejo (a excepción, posiblemente, de los números $S(0)$ y $S(\infty)$) en N puntos de la franja g y, por consiguiente, de cada franja g_k. Entre estos N puntos puede haber algunos coincidentes; pero esto último es posible solamente para algunos valores de w (la cantidad de éstos no es mayor que $n + m$, donde n y m son los grados de $P(t)$ y $Q(t)$; véase el ap. 4.1).

De lo expuesto se deduce que *cada ecuación de la forma*

$$f(z) = S(e^{iz}) = A,$$

donde $f(z)$ es una función trigonométrica ($\neq$ const) *y A es un número complejo cualquiera, posee un conjunto infinito de raíces* (N raíces en cada franja g_k), *a excepción, posiblemente, de dos valores especiales de A: $A = S(0)$ y $A = S(\infty)$, para los cuales la ecuación puede no poseer ninguna raíz.*

Ejemplos.

1) $$f(z) = e^{inz} = t^n, \quad t = e^{iz}.$$

Aquí $S(t) = t^n$, $S(0) = 0$, $S(\infty) = \infty$ y la función $S(t)$ no toma los valores 0 y ∞ cuando $t \neq 0$, $t \neq \infty$; debido a esto, $f(z)$ no toma los valores 0 y ∞ para ningún valor de z,

2) $$f(z) = \sec z = \frac{2e^{iz}}{1+e^{2iz}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t = e^{iz}.$$

Aquí $S(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, $S(0) = S(\infty) = 0$ y $S(t)$ no se anula cuando $t \neq 0$, $t \neq \infty$. Por lo tanto, $f(z) = \sec z$ no se anula para ningún valor de z.

3) $$f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = \frac{1}{i}\,\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad t = e^{iz}.$$

Aquí $S(t)=\frac{1}{i}\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $S(0)=i$, $S(\infty)=-i$ y $S(t)$ no toma los valores i y $-i$ cuando $t\neq 0$, $t\neq\infty$. Por lo tanto, $f(z)=\operatorname{tg} z$ no toma los valores i y $-i$ para ningún valor de z.

4) $$f(z)=\frac{\cos z}{\cos 2z}=\frac{e^{3iz}+e^{iz}}{e^{4iz}+1}=\frac{t^3+t}{t^4+1},\quad t=e^{iz}.$$

Aquí $S(t)=\frac{t^3+t}{t^4+1}$, $S(0)=S(\infty)=0$. Sin embargo, $S(t)$ se anula también en puntos distintos de 0 y ∞, precisamente, cuando

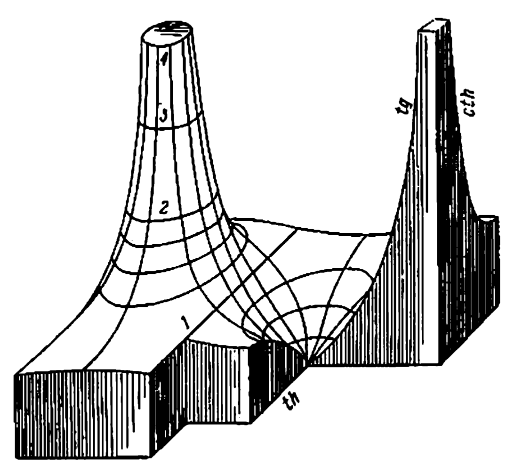


FIG. 36

$t=\pm i$. Por lo tanto, $f(z)=\frac{\cos z}{\cos 2z}$ toma todos los valores complejos sin excepción (y cada uno de ellos en un conjunto infinito de puntos).

Examinemos más detalladamente la función $\operatorname{tg} z=\frac{1}{i}\frac{t^2-1}{t^2+1}$ $(t=e^{iz})$. En la fig. 36 está representada la superficie $u=|\operatorname{tg} z|$, es decir, el relieve de la tangente *). Para obtener la transformación $w=\operatorname{tg} z$, representémosla en forma de las siguientes transformaciones, realizadas sucesivamente una tras otra:

$$\zeta=iz,\quad t=e^{\zeta},\quad t_1=t^2,\quad w=t_2=\frac{1}{i}\frac{t_1-1}{t_1+1}.$$

---

*) El dibujo se ha copiado de las «Tablas de funciones» de Jahnke y Emde.

Si g es la franja $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, donde $0 < h \leqslant \pi$, entonces $\zeta = iz$ transforma a ésta en la franja $x_0 \leqslant \eta \leqslant x_0 + h$, $t = e^{\zeta}$ transforma esta última franja en un ángulo de magnitud h con el vértice en el origen de coordenadas y con los lados $\operatorname{Arg} t = x_0 + 2k\pi$ y $\operatorname{Arg} t = x_0 + h + 2n\pi$; por otra parte, la transformación $t_1 = t^2$ nos da un ángulo de magnitud $2h$ con los lados $\operatorname{Arg} t_1 = 2x_0 + 2k\pi$ y $\operatorname{Arg} t_1 = 2x_0 + 2h + 2h\pi$ y, finalmente, $w = \frac{1}{i}\frac{t_1-1}{t_1+1}$, como transformación homográfica, transforma los

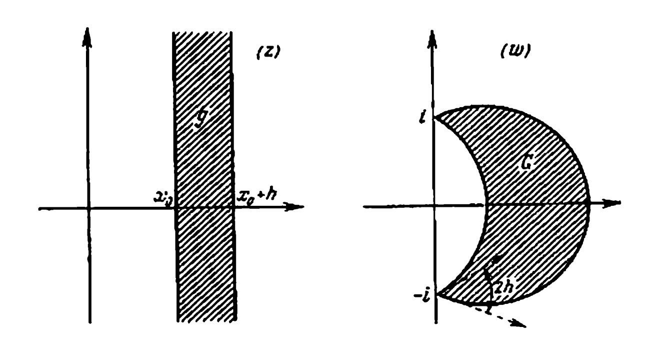


FIG. 37

lados del ángulo en arcos de circunferencias que unen los puntos $w = i$ $(t_1 = 0)$ y $w = -i$ $(t_1 = \infty)$, y el mismo ángulo, en una lúnula circular (biángulo) con los mismos ángulos $2h$. Como la derivada $\left.\frac{dw}{dt_1}\right|_{t_1=0} = -2i$ y $\operatorname{Arg}(-2i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, las tangentes a las curvas que parten del punto $t_1 = 0$ giran en la transformación $w = \frac{1}{i}\frac{t_1-1}{t_1+1}$ el ángulo $-\frac{\pi}{2}$; por esto, las tangentes a los arcos de las circunferencias que limitan el biángulo tienen que formar con la dirección positiva del eje real, en el punto $w = i$, los ángulos $2x_0 - \frac{\pi}{2}$ y $2x_0 + 2h - \frac{\pi}{2}$. Con estas condiciones, el biángulo con los vértices i y $-i$ queda completamente determinado (fig. 37).

Cada una de las transformaciones consideradas por separado es biunívoca y conforme. Debido a esto, *la transformación resultante* $w = \operatorname{tg} z$ *transforma biunívoca y conformemente la franja* $x_0 \leqslant x = \operatorname{Re} z \leqslant x_0 + h$ *de anchura* h $(h \leqslant \pi)$ *en un biángulo circular de ángulos iguales a* $2h$, *con los vértices en los puntos* $-i$ *y* i.

En particular, si $h = \frac{\pi}{2}$, los ángulos del biángulo se convierten en π, y el biángulo mismo, en un círculo o en un semiplano. De aquí se deduce que la *función* $w = \operatorname{tg} z$ *transforma cada franja* $x_0 < x < x_0 + \frac{\pi}{2}$ *de anchura* $\frac{\pi}{2}$ *en un círculo o en un semiplano.*

§ 5. FUNCIONES MULTIFORMES ELEMENTALES

5.1. Las funciones enteras y meromorfas $w = f(z)$, estudiadas en los apartados anteriores, toman por lo general un mismo valor w en unos cuantos (dos o más) puntos del plano z. Forma una excepción solamente la función homográfica, que realiza una transformación biunívoca del plano ampliado sobre sí mismo. Dejando de un lado esta excepción, en todos los demás casos la transformación inversa $z = f^{-1}(w)$ no es unívoca. Esto significa que las funciones inversas a las consideradas son multiformes.

Para que sea posible aplicar a las funciones multiformes los conceptos y resultados obtenidos para las funciones uniformes, es necesario saber separar las r a m a s (o d e t e r m i n a c i o n e s) u n i f o r m e s d e e s t a s f u n c i o n e s.

He aquí cómo se consigue esto ordinariamente.

Sea $z = f(w)$ una función definida, uniforme y continua (en sentido generalizado) en un recinto G del plano ampliado. Supongamos que se ha conseguido dividir de algún modo el recinto G en un conjunto finito o numerable de recintos $g_1, g_2, \ldots$, que carecen de puntos comunes dos a dos, de modo que cualquier punto del recinto G sea interior para un solo recinto g_k o sea punto frontera común al menos para dos recintos g_j o g_k, y que en cada uno de estos recintos la transformación $z = f(w)$ sea biunívoca. Entonces la imagen de cada g_k será también un recinto $f(g_k) = G_k$ (en el cap. V esta afirmación fue demostrada con la condición de que $f(w)$ sea analítica) y toda la imagen $f(G)$ se cubrirá por los recintos G_k y también por las imágenes de las partes comunes de las fronteras de los recintos g_k.

Consideremos la función inversa $w = F(z)$ en cada uno de los recintos G_k definiéndola por la condición complementaria de que sus valores pertenezcan a g_k, que es la preimagen del recinto G_k. Entonces la función $F(z)$, generalmente multiforme, se expresará mediante unas cuantas, posiblemente infinitas, funciones $F_k(z)$ uniformes y continuas (en sentido generalizado). A cada una de éstas llamaremos r a m a (o d e t e r m i n a c i ó n) u n i f o r m e de la función $F(z)$ en el recinto correspondiente G_k. Es importante tener en cuenta en esta definición que el carácter de los recintos G_k, y también el de las ramas uniformes $F_k(z)$ de la función, depende esencialmente de la forma en que se ha dividido el recinto G

en recintos g_k. En los casos más elementales, el recinto G admite una división en recintos g_k tal, que los recintos correspondientes G_k coinciden entre sí. Supongamos, por ejemplo, que G_{k_1}, G_{k_2}, . . . coinciden con un mismo recinto G'. Entonces la función multiforme $w = F(z)$ posee muchas, posiblemente infinitas, ramas uniformes en el recinto G', precisamente: $F_{k_1}(z)$, $F_{k_2}(z)$, . . .

A todo lo dicho anteriormente hay que añadir que para una función continua arbitraria $z = f(w)$ la división del recinto G en recintos g_k, que satisfagan a las condiciones indicadas anteriormente, es generalmente imposible. Sin embargo, cuando la función $z = f(w)$ es analítica en el recinto G (a excepción de puntos aislados en los cuales ella puede ser igual a ∞), en el ap. 3.4 del octavo capítulo se demostrará que semejante división siempre es posible y además de infinitos modos.

A una función $z = f(w)$, analítica en cierto recinto g (a excepción, posiblemente, de los puntos en los cuales ella es igual a ∞) y que tome en distintos puntos del recinto diferentes valores ($f(w_1) \neq f(w_2)$) si $w_1 \neq w_2$ y w_1, $w_2 \in g$), llamaremos u n i v a l e n t e e n e l r e c i n t o g. Si existe en el recinto al menos un par de puntos distintos en los cuales $f(w)$ toma un mismo valor: $f(w_1) = f(w_2)$, $w_1 \neq w_2$, diremos que la función es m u l t i v a l e n t e en este recinto.

El hecho al que alegábamos anteriormente, se puede enunciar así: si una función analítica $z = f(w)$ es multivalente en un recinto G, éste puede dividirse en un conjunto finito o numerable de recintos en cada uno de los cuales $f(w)$ es univalente. Los recintos correspondientes g_k se llaman r e c i n t o s d e u n i v a l e n c i a de la función $f(w)$.

Por lo tanto, el método descrito anteriormente de separación de ramas uniformes siempre es aplicable a las funciones que son inversas respecto de las multivalentes.

En este párrafo se ilustrará el método indicado para el caso de funciones elementales; mas no tendremos que basarnos en el teorema que se ha señalado sin demostración, puesto que la división del recinto G en recintos de univalencia se obtendrá cada vez aplicando las propiedades conocidas de las funciones elementales.

Además de las funciones inversas a las elementales, estudiaremos también aquí otras funciones multiformes, obtenidas como funciones compuestas de la forma $\varphi\psi(z)$ (donde $\varphi(z)$ o $\psi(z)$ son funciones inversas de las elementales), o como combinaciones racionales de tales funciones.

5.2. Consideremos el radical $w = \sqrt[n]{z}$, que representa una función inversa a la función potencial $z = w^n$ (n es un número natural, mayor que la unidad).

Para cada z, distinto de cero e infinito, el radical posee n valores distintos, dados por la fórmula

$$w = \sqrt[n]{+|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right). \qquad (5.2:1)$$

Cuando $z = 0$ o $z = \infty$ se obtiene cada vez un solo valor de la función, $w = 0$ o $w = \infty$, respectivamente. Los n valores (5.2:1), que representan aquellos puntos del plano w en los cuales w^n toma un mismo valor z, se sitúan en los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia $|w| = \sqrt[n]{+|z|}$.

Recíprocamente: los vértices de cualquier polígono regular de n lados con el centro en el origen de coordenadas se pueden considerar como n valores de $\sqrt[n]{z}$. Debido a esto, un recinto g del plano w será un recinto de univalencia para $z = w^n$ cuando, y sólo cuando, de los n vértices de cualquier polígono regular con el centro $w = 0$ éste contiene no más de un vértice.

Evidentemente, a esta condición satisface cada ángulo de medida $\frac{2\pi}{n}$ con el vértice en el origen de coordenadas. Tracemos desde el origen de coordenadas n rayos rectilíneos que formen entre sí ángulos iguales. Entonces hallaremos que todo el plano, en el cual está definida la función multivalente $z = w^n$, se dividirá en n recintos de univalencia de esta función: $g_1, g_2, \ldots, g_n$. La imagen de cada uno de éstos será un mismo recinto G' del plano z cuya frontera es un rayo rectilíneo L que parte del origen de coordenadas. Si el recinto g_k está limitado por los rayos que forman los ángulos $\varphi_0 + \frac{2k\pi}{n}$ y $\varphi_0 + \frac{2(k+1)\pi}{n}$ con la parte positiva del eje real, entonces el rayo L formará con la parte positiva del eje real el ángulo $n\varphi_0$.

De acuerdo con lo dicho en el ap. 5.1, obtendremos en el recinto G' n ramas uniformes de la función $\sqrt[n]{z}$. Cada una de ellas: $\sqrt[n]{z}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ se determina completamente por la condición de que sus valores $w = \sqrt[n]{z}_k$ pertenecen al recinto g_k. Como $z = w^n$ posee derivada diferente de cero en todos los puntos del recinto g_k: $z' = nw^{n-1}$, las ramas $\sqrt[n]{z}_k$ también poseerán derivadas diferentes de cero:

$$(\sqrt[n]{{}_kz})' = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{{}_kz})^{n-1}}.$$

Tomemos ahora un sistema de rayos rectilíneos que partan del origen de coordenadas, y que se obtiene del anterior mediante una rotación alrededor del origen de coordenadas en un ángulo α, $0 <$

$< \alpha < \frac{2\pi}{n}$. Entonces el nuevo sistema dividirá el plano w en n recintos $d_1, \ldots, d_n$, cada uno de los cuales d_k tendrá partes comunes con dos recintos vecinos g_k y g_{k+1} (si $k = n$, entonces g_{n+1} debe sustituirse por g_1) (fig. 38).

La imagen de cada uno de los recintos d_k del plano w será un mismo recinto D', limitado por el rayo rectilíneo M que parte del origen de coordenadas y forma con la parte positiva del eje real

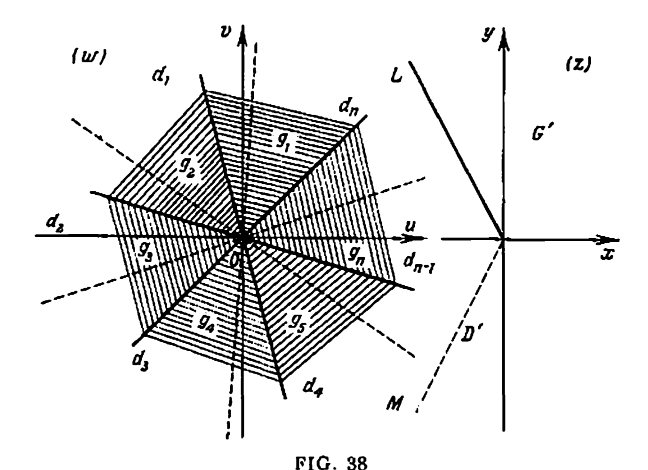


FIG. 38

el ángulo $n\varphi_0 + n\alpha$. En este recinto también obtendremos n ramas uniformes de la función $\sqrt[n]{z}$, cada una de las cuales se determina porque sus valores pertenecen al recinto correspondiente d_k. Designemos estas ramas mediante $(\sqrt[n]{z})_k$. Estas son diferenciables en D' y para sus derivadas se tiene:

$$(\sqrt[n]{z})'_k = 1 : n\,(\sqrt[n]{z})_k^{n-1}.$$

Comparémoslas con las ramas $\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$; como parte de la preimagen d_k del recinto D' en el plano w pertenece al recinto g_k y parte al recinto g_{k+1}, la rama $(\sqrt[n]{z})_k$ en la parte del recinto D' que representa la imagen de la parte común de los recintos d_k y g_k, coincidirá con $\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$, mientras que en la otra parte del recinto D' (que representa

la imagen de la parte común de los recintos d_k y g_{k+1}) coincidirá con $\underset{k+1}{\sqrt[n]{z}}$.

Vemos, pues, que al sustituir unos recintos de univalencia por otros cada nueva rama uniforme se obtiene mediante la unión de la parte de definición de una de sus ramas anteriores con la parte de definición de otra rama anterior.

Si el ángulo de rotación $\alpha = 0$, entonces d_k coincide con g_k, D' coincide con G' y cada rama $(\sqrt[n]{z})_k$ coincide con $\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$. Cuando el ángulo α, aumentando continuamente, se aproxima a $\frac{2\pi}{n}$, el recinto d_k se aproxima a g_{k+1}, el recinto correspondiente D' se aproxima a G' y la rama $(\sqrt[n]{z})_k$ en mayor y mayor parte del recinto D' coincide con la rama $\underset{k+1}{\sqrt[n]{z}}$ (en lugar de g_{n+1} y $\underset{n+1}{\sqrt[n]{z}}$ se debe tomar g_1 y $\underset{1}{\sqrt[n]{z}}$).

Cuando $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, d_k coincide con g_{k+1}, D' coincide con G' y la rama $(\sqrt[n]{z})_k$ se convierte en la rama $\underset{k+1}{\sqrt[n]{z}}$.

También se puede observar el paso de una rama $\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$ a otra $\underset{k+1}{\sqrt[n]{z}}$ haciendo describir al punto z una circunferencia completa con el centro en el origen de coordenadas. Si el valor de $\sqrt[n]{z}$ en el punto z_0 se suponía perteneciente a la rama $\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$ y se representaba por el punto w_0 del recinto g_k:

$$w_0 = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\varphi_0}{n}\right),$$

al moverse continuamente el punto z por la circunferencia $|z| = |z_0|$ en la dirección positiva, el valor correspondiente del radical

$$w = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{n}\right)$$

variará continuamente junto con φ, y después de un recorrido completo al volver el punto z a la posición inicial z_0, el valor del radical se convertirá en

$$w_1 = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\varphi_0 + 2\pi}{n}\right).$$

Este último se obtiene de w_0 mediante una rotación alrededor del origen de coordenadas en el ángulo $\frac{2\pi}{n}$; por consiguiente, el

punto w_1 pertenece al recinto g_{k+1}, vecino de g_k, y w_1 es el valor de la rama $\underset{k+1}{\sqrt[n]{z}}$ en el punto z_0.

Esta conclusión se puede aplicar a cualquier punto del recinto G', de donde se deduce que al recorrer el punto z una circunferencia de cualquier radio con el centro en el origen de coordenadas, los valores de $\sqrt[n]{z}$, variando continuamente, pasan de la rama $\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$ a la rama $\underset{k+1}{\sqrt[n]{z}}$.

Se necesita un recorrido n-múltiple del punto z alrededor del punto $z = 0$ en la dirección positiva para que las ramas del radical $\sqrt[n]{z}$, sustituyéndose una por otra ($\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$ por $\underset{k+1}{\sqrt[n]{z}}$, $\underset{k+1}{\sqrt[n]{z}}$ por $\underset{k+2}{\sqrt[n]{z}}$, ..., $\underset{n}{\sqrt[n]{z}}$ por $\underset{1}{\sqrt[n]{z}}$, . . ., $\underset{k-1}{\sqrt[n]{z}}$ por $\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$), vuelvan a las ramas iniciales.

El punto que posee la propiedad de que un recorrido completo (de una vuelta) por una curva cerrada de Jordan alrededor del punto, en cualquier entorno del mismo, sustituye una rama continuamente variable de la función multiforme por otra rama de esta función, se llama *punto de ramificación de la función.*

El hecho de que después de dar n vueltas en una misma dirección obtenemos la rama inicial, se expresa diciendo que el punto dado de ramificación es de orden finito, precisamente de *orden* $n - 1$, llamándose *punto algebraico de ramificación* *).

Resumiendo, el punto $z = 0$ es un punto algebraico de ramificación de orden $n - 1$ para la función $\sqrt[n]{z}$.

Evidentemente, el punto $z = \infty$ también se puede considerar como punto algebraico de ramificación de orden $n - 1$ de la función $\sqrt[n]{z}$, puesto que cada recorrido alrededor del mismo a lo largo de una circunferencia de radio arbitrariamente grande con el centro en el origen de coordenadas es a la vez un recorrido alrededor del origen de coordenadas. Por esto, la función multiforme $w = \sqrt[n]{z}$ posee dos puntos de ramificación en el plano z: $z = 0$ y $z = \infty$, ambos de orden $n - 1$.

Las ramas uniformes de esta función descritas anteriormente fueron construidas para los recintos del tipo G' o D', cuyas fronteras representaban un rayo rectilíneo que unía ambos puntos de ramificación. Se obtiene un tipo más general de un recinto semejante si en lugar de un rayo rectilíneo se traza una curva de Jordan arbitraria del plano ampliado que una los puntos 0 y ∞. Sea Γ esta curva

---

*) El último concepto supone también que en el punto dado existe el límite de la función (finito o infinito).

y G, el recinto limitado por ella. Si z describe la curva Γ desde el punto inicial (0) hasta el final (∞), entonces los n puntos $w = \sqrt[n]{z}$ que le corresponden describen n curvas de Jordan γ_k que unen el punto 0 con el punto ∞. Estas curvas no tienen otros puntos comunes, además de 0 y ∞, y forman a pares (γ_k con γ_{k+1}) curvas de Jordan cerradas del plano ampliado.

Sea g_k' aquel de los dos recintos limitados por las curvas γ_k y γ_{k+1} que no contiene a las curvas $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n$. Al girar el plano z alrededor del origen de coordenadas el ángulo $\frac{2\pi}{n}$, la curva γ_k, debido a su construcción, pasa a γ_{k+1}', la curva γ_{k+1} a γ_{k+2} y el recinto g_k' al recinto g_{k+1}'. Como g_k' y g_{k+1}' no tienen puntos comunes, ninguno de estos recintos contendrá un par de puntos que pasen uno a otro como resultado de tal giro. Por esta razón, todos los recintos g_k' ($k = 1, 2, \ldots, n$) son recintos de univalencia para $z = w^n$, y obtenemos n ramas uniformes de la función $\sqrt[n]{z}$ en el recinto G, exigiendo que los valores de cada rama pertenezcan al recinto correspondiente g_k'. Para fijar una rama es suficiente señalar el valor de $\sqrt[n]{z}$ en un punto cualquiera z_0 del recinto G; si este valor es w_0, existirá un recinto único g_k' que contendrá el punto w_0, y junto con él una rama única $\sqrt[n]{z}$ en el recinto G, que tomará el valor w_0 en el punto z_0. Se obra de este modo, precisamente, cuando se desea fijar una rama determinada $\sqrt[n]{z}$ en un recinto del tipo G.

Sean $\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$ y $\underset{l}{\sqrt[n]{z}}$ dos ramas de $\sqrt[n]{z}$ en el recinto G y supongamos que sus valores en cierto punto z_0 son iguales a w_0' y w_0'', respectivamente. Como

$$w_0' = \sqrt[n]{{}_k z} = \sqrt[n]{{}_+|z|}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2m'\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi_0 + 2m'\pi}{n}\right),$$

$$w_0'' = \sqrt[n]{{}_l z} = \sqrt[n]{{}_+|z|}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2m''\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi_0 + 2m''\pi}{n}\right),$$

donde m' y m'' son números enteros, el valor w_0'' puede obtenerse de w_0' multiplicándolo por

$$\eta = \cos\frac{2(m'' - m')\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2(m'' - m')\pi}{n},$$

es decir, por uno de los valores de $\sqrt[n]{1}$. Pero, al multiplicar la función $\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$ por el número η se obtiene, evidentemente, una función $\eta\underset{k}{\sqrt[n]{z}}$, uniforme y continua en el recinto G, cuyos valores representan $\sqrt[n]{z}$ y pertenecen al mismo recinto al cual pertenece el punto $\eta\underset{k}{\sqrt[n]{z_0}} = \underset{l}{\sqrt[n]{z_0}}$. Por consiguiente, $\eta\underset{k}{\sqrt[n]{z}} = \underset{l}{\sqrt[n]{z}}$ en todo el recin-

to G. Vemos, pues, que las dos ramas de $\sqrt[n]{z}$ en un mismo recinto G pueden obtenerse una de otra multiplicando por cierto valor de $\sqrt[n]{1}$.

Todas las conclusiones de este apartado se extienden, con las evidentes variaciones correspondientes, a las funciones de una forma más general:

$$w = \sqrt[n]{z-a} \quad \text{o bien} \quad w = \sqrt[n]{\frac{z-a}{z-b}}.$$

Recomendamos al lector estudiar estos ejemplos, observando que estas funciones son inversas a las funciones $z = a + w^n$ y $z = \frac{bw^n - a}{w^n - 1}$, para las cuales los recintos de univalencia son los mismos que para la función $z = w^n$. Hay que observar en este caso que los puntos de ramificación de la función $w = \sqrt[n]{z-a}$ son a y ∞, y los puntos de ramificación de la función $w = \sqrt[n]{\frac{z-a}{z-b}}$ son a y b, y que la separación de una rama uniforme de la función es posible en cualquier recinto cuya frontera sea un arco de Jordan que una los puntos de ramificación.

5.3. Para aclarar mejor el concepto de punto de ramificación, consideremos la función multiforme

$$w = f(z) = \sqrt[n]{P(z)}, \tag{5.3:1}$$

donde $P(z)$ es un polinomio arbitrario. Sea N el grado de este polinomio, $a_1, a_2, \ldots, a_m$, todos sus ceros distintos y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots \alpha_m$, sus órdenes de multiplicidad ($\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = N$). Entonces $P(z)$ puede expresarse en la forma

$$P(z) = A(z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z-a_m)^{\alpha_m},$$

de donde

$$f(z) = \sqrt[n]{A(z-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z-a_m)^{\alpha_m}}. \tag{5.3:2}$$

Consideremos una curva de Jordan cerrada arbitraria γ (por ejemplo, una circunferencia) que no pase por ninguno de los puntos a_k ($k = 1, \ldots, m$). Supongamos que z recorre una vez esta curva en una dirección determinada. Fijemos los valores de los argumentos para $z - a_1, \ldots, z - a_m$ en algún punto z_0 de la curva γ. Sean estos valores $\varphi_1^{(0)}, \ldots, \varphi_m^{(0)}$. Al recorrer el punto z la curva γ, el ángulo φ_k entre el vector $z - a_k$ y la dirección positiva del eje real variará continuamente, partiendo del valor inicial $\varphi_k^{(0)}$, y como resultado de recorrer una vez la curva γ éste volverá a tomar el valor inicial $\varphi_k^{(0)}$ (si el punto a_k estaba situado en el exterior de γ) o bien adquirirá un incremento $\pm 2\pi$ (si el punto a_k estaba situado en el

interior de γ_k) *) (fig. 39). El signo + o — del incremento depende solamente de la dirección del recorrido de la curva γ; llamaremos positiva la dirección según la cual los ángulos correspondientes adquieren un incremento positivo 2π. Supongamos, para fijar ideas, que el punto z describe γ en la dirección positiva. Si ninguno de los puntos a_k está situado en el interior de γ, entonces todos los ángulos φ_k, después del recorrido, volverán a sus valores iniciales $\varphi_k^{(0)}$, y la función $f(z)$ (5.3:2) volverá a tomar su valor inicial. De aquí se deduce que ninguno de los puntos finitos ζ del plano, distintos de a_k, puede ser punto de ramificación para esta función. En efecto,

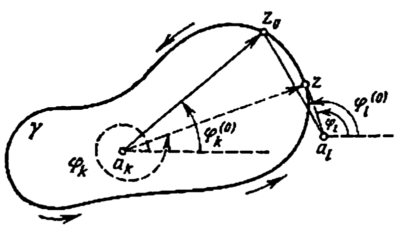


FIG. 39

para tal punto se puede señalar un entorno del mismo que no contenga ningún punto a_k; entonces el recorrido a lo largo de cualquier curva de Jordan cerrada γ, que pertenezca a este entorno y contenga en su interior al punto ζ, conservará la rama elegida de nuestra función.

Así, pues, *ningún punto finito ζ, distinto de todos los puntos a_k, puede ser punto de ramificación para la función $f(z)$.*

Consideremos ahora un entorno tan pequeño de algún punto a_k que en él no estén contenidos otros puntos: $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_m$. Entonces, al recorrer una curva γ que pertenezca a este entorno y contenga a_k en su interior, el ángulo φ_k variará en 2π, mientras que los demás ángulos $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_m$, volverán a tomar sus valores anteriores. De aquí se deduce que, como resultado del recorrido de la curva γ, el argumento de la expresión subradical que figura en la fórmula (5.3:2) variará en $2\pi\alpha_1$, y por consiguiente, el radical (5.3:2) adquirirá el factor $\cos\frac{2\pi\alpha_k}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi\alpha_k}{n}$, que, evidentemente, es diferente de la unidad cuando, y sólo cuando, α_k no es múltiplo de n. Así, pues, cada cero a_k del polinomio $P(z)$, cuyo orden de multiplicidad α_k no sea un número entero múltiplo de n, es un punto de ramificación de la

*) Todo esto se comprueba fácilmente en los casos más simples (por ejemplo, cuando γ es una circunferencia, una elipse o un polígono), y puede demostrarse en el caso más general.

función $\sqrt[n]{P(z)}$. Para determinar el orden de este punto, supongamos que δ_k ($\delta_k < n$) es el máximo común divisor de α_k y n. Entonces, haciendo $\alpha_k = \delta_k \alpha'_k$ y $n = \delta_k \nu_k$ ($\nu_k > 1$), escribimos el binomio $\cos \frac{2\pi\alpha_k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi\alpha_k}{n}$ en la forma $\cos \frac{2\pi\alpha'_k}{\nu_k} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi\alpha'_k}{\nu_k}$.

Como resultado de un recorrido p-múltiple de la curva γ en una misma dirección, la función $f(z)$ adquirirá el factor $\cos \frac{2\pi\alpha'_k p}{\nu_k} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi\alpha'_k p}{\nu_k}$ que, evidentemente, será igual a la unidad cuando, y sólo cuando, p es múltiplo de ν_k. El menor valor correspondiente de p es ν_k. De aquí que el orden del punto de ramificación a_k es $\nu_k - 1$.

Consideremos, finalmente, un entorno del punto del infinito que no contenga ningún punto a_k, y en este entorno, una curva de Jordan γ que contenga en su interior todos los puntos a_k. Entonces el exterior de γ contendrá al punto ∞ y no contendrá a ninguno de los puntos a_k. Hagamos un recorrido simple (una vuelta) de la curva γ. Todos los ángulos φ adquirirán el incremento 2π, por consiguiente, el argumento de la expresión subradical en la fórmula (5.3:2) variará en $2\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)$ y toda la función $f(z)$ adquirirá el factor

$$\cos \frac{2\pi(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)}{n} = \cos \frac{2\pi N}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi N}{n}.$$

Este será igual a la unidad o distinto de la unidad según que N sea múltiplo de n o no lo sea. En el primer caso, ∞ no será, y, en el segundo caso, será un punto de ramificación de la función $f(z)$. Si δ es el máximo común divisor de N y n ($\delta < n$) y $n = \delta\nu$, entonces el orden del punto del infinito, considerado como punto de ramificación, séra igual a $\nu - 1$.

Hemos observado que, cuando α_k es múltiplo de n, el recorrido de la curva de Jordan γ, que contiene en su interior al punto a_k y no contiene a ninguno de los demás puntos a_j, no altera el valor de $f(z)$. Del mismo modo, si N es múltiplo de n, el recorrido de una curva γ que contenga en su interior a todos los puntos a_k, no altera los valores de $f(z)$.

Supongamos que, en general, $a_{k_1}, \ldots, a_{k_q}$, es un grupo tal de puntos de ramificación, para los cuales la suma $\alpha_{k_1} + \ldots + \alpha_{k_q}$ es múltiplo de n; entonces el recorrido de cualquier curva de Jordan cerrada γ, que contenga en su interior a los puntos indicados y no contenga ningún punto a_k distinto de ellos, no puede alterar los valores de $f(z)$. Por esta razón, en cualquier recinto G que contenga solamente a aquellas curvas de Jordan cerradas que no abarcan en su interior a ningún punto de ramificación a_k, o bien, que abarcan

un grupo de puntos de ramificación, para los cuales la suma de sus números respectivos α_k es múltiplo de n, es posible separar ramas uniformes de la función $f(z)$.

Para esto es suficiente fijar un valor w_0 de la función $f(z)$ en uno de los puntos z_0 de este recinto. Entre las n imágenes $f(G)$ del recinto G en el plano w, una contendrá al punto w_0; supongamos que esta imagen es g_k. Entonces, la rama uniforme de la funcion $f(z)$ en el recinto G quedará completamente determinada si se exige que todos sus valores pertenezcan a g_k. El valor de esta rama en cualquier punto z_1 del recinto G se puede obtener también del siguiente modo: Unamos el punto z_0 con el punto z_1 mediante alguna curva continua γ_1 perteneciente al recinto G, y recorramos esta curva desde el punto z_0 hasta el punto z_1, atendiendo a que el valor correspondiente de $f(z)$ varíe continuamente comenzando desde el valor w_0. Entonces llegaremos al punto z_1 con uno de los n valores de $f(z)$, que designaremos con w_1. Este valor depende solamente del valor w_0 elegido en el punto z_0 y del mismo punto z_1 y no depende de cómo se haya elegido el camino que una z_0 con z_1, y, por consiguiente, representa una función uniforme de z_1 en el recinto G. En efecto, si γ_2 es otra curva que una z_0 y z_1 en el recinto G, entonces al recorrer la curva cerrada γ, formada por γ_1 y γ_2, obtendremos primero, moviéndose desde z_0 hasta z_1 a lo largo de γ_1, el valor w_1 en el punto z_1, y después, moviéndose a lo largo de γ_2 desde z_1 hasta z_0, tendremos que volver al valor inicial w_0 (puesto que, según la condición el recorrido por una curva cerrada en el recinto G no puede conducir a la variación de los valores de la función $f(z)$). De aquí se deduce que, moviéndose a lo largo de γ_2 desde z_0 hacia z_1, obtendremos en el punto z_1 al mismo valor w_1 que se obtenía al moverse a lo largo de γ_1.

Aclaremos lo dicho con ejemplos:

1. $w = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$, donde $0 < k < 1$. Esta es una función biforme con cuatro puntos de ramificación: ± 1, $\pm \frac{1}{k}$. Aquí $N = 4$ es múltiplo de $n = 2$, por lo cual ∞ no es un punto de ramificación.

Como todos los números α_k son iguales a 1 (± 1, $\pm \frac{1}{k}$ son ceros simples de la expresión subradical), el recorrido a lo largo de cualquier curva cerrada γ que contenga en su interior solamente a dos puntos de ramificación, no altera los valores de la función. Por esta razón, es posible separar sus ramas uniformes, por ejemplo, en el recinto G cuya frontera consta de los dos segmentos: $-\frac{1}{k} \leqslant x \leqslant -1$ y $1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{k}$, o en el recinto G' cuya frontera consta

de los segmentos: $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y el segmento infinito del eje real que une los puntos $-\frac{1}{k}$ y $\frac{1}{k}$ mediante el punto del inifinito (fig. 40).

En el primero de ellos, las ramas $f_1(z)$ y $f_2(z)$ pueden distinguirse por el valor que toman éstas en el origen de coordenadas. Por ejemplo, $f_1(0) = 1$ y $f_2(0) = -1$.

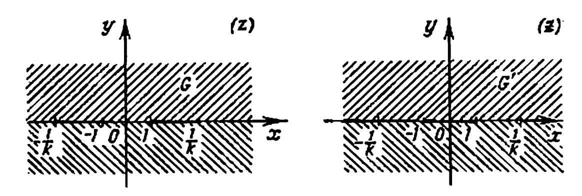


FIG. 40

2. $w = \sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}$, donde g_2 y g_3 son unos números complejos que satisfacen a la condición $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, lo cual significa que el discriminante del polinomio $4z^3 - g_2z - g_3$ es diferente de cero y, por consiguiente, son distintos los ceros l_1, l_2 y l_3 de este polinomio. Como en este ejemplo $N = 3$ no es divisible por $n = 2$, el

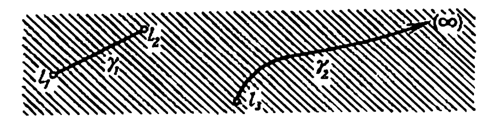


FIG. 41

punto ∞ también es un punto de ramificación. De nuevo el recorrido a lo largo de una curva de Jordan cerrada en torno de cualquier par de puntos de ramificación no hace variar los valores de la función. Por esto, uniendo con curvas de Jordan γ_1 y γ_2 el punto l_1 con l_2 y l_3 con ∞, obtenemos un recinto G con la frontera compuesta por γ_1 y γ_2, en el cual es posible separar las funciones uniformes de la función dada (fig. 41).

3. Consideremos la función inversa respecto de la función $z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$, es decir, $w = \varphi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$. Esta es una función biforme, que posee los mismos puntos de ramificación que la función $\sqrt{z^2 - 1}$, o sea, ± 1.

Para obtener el recinto G en el cual se pueden separar las ramas uniformes de la función considerada, unamos los puntos -1 y 1 mediante un segmento finito del eje real. Se obtiene un recinto que se transforma biunívocamente mediante la función $w = z + \sqrt{z^2-1}$ en cada uno de los dos recintos: el interior del círculo unidad (g_1) y su exterior (g_2) (véase el ap. 4.9). Se puede separar cualquiera de ellas fijando uno de los dos valores de w en un punto cualquiera del recinto G, por ejemplo, en el punto del infinito. Como se ve en la fórmula $z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$, z toma el valor ∞ cuando $w = 0$ o cuando $w = \infty$. Por esta razón, una de las ramas de la función $\varphi(z)$ se caracteriza porque, para ella, $\varphi(\infty) = 0$; ésta transforma G en el interior del círculo unidad. La otra rama se caracteriza porque, para ella, $\varphi(\infty) = \infty$; ésta transforma el recinto G en el exterior del círculo unidad.

Podríamos haber tomado en lugar del recinto G, por ejemplo, el recinto G' cuya frontera consta del segmento infinito del eje real que une los puntos -1 y 1, o los recintos G'' y G''' cuyas fronteras son las semicircunferecias unidad superior e inferior, respectivamente.

Dejamos a cuenta del lector aclarar, basándose en los resultados del ap. 4.9, en qué género de recintos del plano w transforman las ramas uniformes respectivas de la función $\varphi(z)$ los recintos G', G'' o G'''.

Todo el contenido del presente apartado se refería a las funciones multiformes de la forma $\sqrt[n]{P(z)}$, donde $P(z)$ es un polinomio.

El lector extenderá sin dificultad alguna los resultados obtenidos al caso más general de la función $\sqrt[n]{R(z)}$, donde $R(z)$ es una función racional arbitraria. Para hallar los puntos de ramificación de la función $\sqrt[n]{R(z)}$ habrá que considerar no sólo los ceros sino también los polos de la función racional $R(z)$.

5.4. La función inversa respecto de la función

$$z = e^w = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v),$$

está definida para cualquier z diferente de 0 y ∞, y se expresa por la fórmula (véase la fórmula (3.5:2)).

$$w = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Esta función que, evidentemente, es multiforme e incluso de infinitas determinaciones, se llama logaritmo, y se designa por $\operatorname{Ln} z$.

Así, pues, según la definición

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z. \qquad (5.4:1)$$

Denominando valor principal (determinación principal) al valor del logaritmo igual a $\ln|z|+i\arg z$, y designándole mediante $\ln z$, para el $\operatorname{Ln} z$ tendremos:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \qquad (5.4:2)$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

De aquí se deduce que *cada número complejo, diferente de cero y del infinito, posee un conjunto infinito de logaritmos* (es decir, de valores de la función logarítmica); *dos valores cualesquiera de éstos se diferencian en un entero múltiplo de* $2\pi i$. Si z es un número real positivo, el valor principal del logaritmo coincide con $\ln|z|$ y, por consiguiente, es aquel número real que conocíamos en el curso de análisis matemático cuando considerábamos el logaritmo como una función real de variable real. Así, obtenemos: $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln 2 = 0{,}69314718\ldots$, etc.

Pero, además de estos valores reales, los logaritmos de los números positivos poseen también un conjunto infinito de valores imaginarios que se obtienen por la fórmula (5.4:2). Así, por ejemplo, $\operatorname{Ln} 1 = 2k\pi i$, $\operatorname{Ln} e = 1 + 2k\pi i$, $\operatorname{Ln} 2 = 0{,}69314718\ldots + 2k\pi i$, etc.

Para los números negativos y para los números imaginarios, el valor principal del logaritmo es un número imaginario

$$\ln|z| + i\arg z \qquad (\arg z \neq 0, \quad |\arg z| \leqslant \pi).$$

Todos los demás valores del logaritmo también son números imaginarios, y se calculan por la fórmula (5.4:2).

Por ejemplo,

$$\operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i, \quad \operatorname{Ln}(-2) = 0{,}69314718\ldots + (2k+1)\pi i,$$

$$\operatorname{Ln}(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) =$$

$$= 0{,}34657359\ldots + (8k-1)\frac{\pi i}{4} \text{ etc.}$$

Las reglas conocidas del logaritmo del producto y del cociente conservan su valor también para el logaritmo multiforme del número complejo, precisando:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 z_2) =$$

$$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \qquad (5.4:3)$$

$$\operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \ln|z_1| - \ln|z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2) =$$

$$= \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2. \qquad (5.4:4)$$

Aquí z_1 *y* z_2 son unos números complejos arbitrarios, diferentes de 0 y ∞. En cada una de estas igualdades el primero y segundo miem-

bros, para valores dados de z_1 y z_2, representan conjuntos infinitos de números complejos. Las igualdades deben entenderse en el sentido de que estos conjuntos son iguales, es decir, constan de unos mismos números. El olvido de esta circunstancia puede conducir a errores.

Veamos, por ejemplo, el siguiente sofisma, perteneciente a J. Bernoulli.

Se afirma que $\operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z$ para cualquier $z \neq 0$.

Para la demostración se considera la siguiente cadena de igualdades:

1) $\operatorname{Ln}[(-z)^2] = \operatorname{Ln}(z^2)$, 2) $\operatorname{Ln}(-z) + \operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z$,

3) $2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z$ y 4) $\operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z$.

Pero esta conclusión es errónea, puesto que

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i,$$

$$\operatorname{Ln}(-z) = \ln|-z| + i\operatorname{Arg}(-z) = \ln|z| + i\arg z + (2k+1)\pi i$$

y, evidentemente, ninguno de los números que son valores de $\operatorname{Ln} z$ puede coincidir con alguno de los números que son valores de $\operatorname{Ln}(-z)$.

El error en la demostración expuesta anteriormente fue cometido al pasar de la igualdad 2) a la igualdad 3). Claro, la primera de éstas, obtenida sobre la base de la fórmula (5.4:3), es justa. Pero la suma $\operatorname{Ln}(-z) + \operatorname{Ln}(-z)$ no puede sustituirse por $2\operatorname{Ln}(-z)$, puesto que la suma indicada se obtiene del conjunto de números $\operatorname{Ln}(-z)$ sumando cualquiera de estos números al mismo o a otro número d i s t i n t o del mismo conjunto, mientras que el conjunto $2\operatorname{Ln}(-z)$ se obtiene duplicando cada uno de los números $\operatorname{Ln}(-z)$, es decir, sumando tal número s o l o c o n s i g o m i s m o. Así, pues, $\operatorname{Ln}(-z) + \operatorname{Ln}(-z) \neq 2\operatorname{Ln}(-z)$; por la misma razón

$$\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z \neq 2\operatorname{Ln} z.$$

El lector acabará de entender el sentido de esta objeción examinando el sencillo ejemplo. Designemos con A el conjunto que consta de dos números: 0 y 1. Entonces $A + A$ designa el conjunto que consta de tres números: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$ y $1 + 1 = 2$, mientras que el conjunto $2A$ consta solamente de dos números: $2\cdot 0 = 0$ y $2\cdot 1 = 2$.

Obsérvese también que, haciendo en la relación (5.4:4) $z_1 = z_2 = z \neq 0$, obtenemos:

$$\operatorname{Ln} 1 = \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z.$$

Esta es una relación justa; pero aquí no se puede sustituir el segundo miembro por cero, puesto que se trata del conjunto de todas las

diferencias entre los pares de valores del logaritmo de un mismo número. Este conjunto consta de todos los enteros posibles que son múltiplos del número $2\pi i$, o sea que, de acuerdo a la verdad, se tiene:

$$\mathrm{Ln}\, 1 = 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Pasando a considerar las ramas uniformes del logaritmo, hallemos primero los recintos de univalencia de la función $z = e^w$, para la cual el logaritmo es la función inversa.

Como todos los valores de w, en los cuales e^w toma un valor dado z ($z \neq 0$ y $z \neq \infty$), vienen dados por la fórmula (3.5:2).

$$w = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

y estos valores se obtienen de cualquiera de ellos mediante un traslado en la magnitud $2k\pi i$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$), el recinto de univalencia de la función exponencial no tiene que contener ningún par de puntos de los cuales uno pueda obtenerse del otro mediante una traslación semejante.

Lo más sencillo para satisfacer a estas condiciones es tomar alguna franja rectilínea g_0, paralela al eje real, que tenga la anchura 2π: $v_0 < v < v_0 + 2\pi$.

Además de ésta, obtenemos también un conjunto infinito de recintos de univalencia g_k: $v_0 + 2k\pi < v < v_0 + (2k + 2)\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Evidentemente, cada punto del plano w o bien es interior para uno de los recintos g_k o bien es punto frontera común de dos recintos g_k y g_{k+1} (fig. 42). La imagen de cada franja g_k en el plano z es un mismo recinto G; es precisamente un ángulo de magnitud 2π con el vértice en el origen de coordenadas. La frontera del recinto G es un rayo rectilíneo que parte del origen de coordenadas formando el ángulo v_0 con el eje real.

En el recinto G obtenemos un conjunto infinito numerable de ramas uniformes distintas de la función $\mathrm{Ln}\, z$. Cada una de estas ramas $\mathrm{Ln}_k\, z$ se caracteriza completamente en que sus valores tienen que pertenecer a una franja determinada g_k. Por cierto, es suficiente fijar el valor w_0 de la función $\mathrm{Ln}\, z$ en un punto z_0 del recinto G, puesto que entre todos los recintos g_k uno, y sólo uno de los recintos g_{k_0} contendrá al punto w_0.

Consideremos una rama cualquiera del logaritmo:

$$\mathrm{Ln}_k\, z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}_k z,$$

donde $\operatorname{Arg}_k z$ es el valor del argumento que satisface a la condición

$$v_0 + 2k\pi < \operatorname{Arg}_k z < v_0 + (2k + 2)\pi.$$

(Precisamente esta condición significa que los valores $\mathrm{Ln}_k z$ pertenecen a la franja g_k).

Como la función $w = \mathrm{Ln}_k z$ realiza una transformación biunívoca y continua del recinto G en la franja g_k y su función inversa $z = e^w$

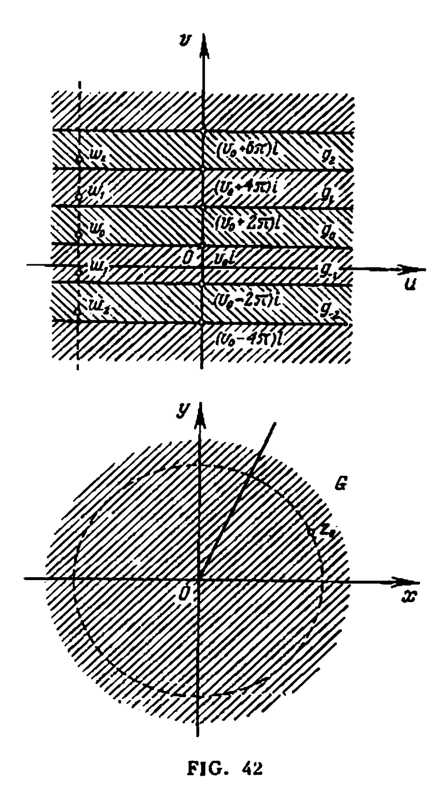


FIG. 42

posee derivada diferente de cero en todos los puntos del recinto g_k, según la regla de derivación de las funciones inversas la función $\mathrm{Ln}_k z$ también posee derivada, la cual se calcula por la fórmula

$$(\mathrm{Ln}_k z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Los puntos de ramificación de la función Ln z son el cero y el punto del infinito. En efecto, cuando z describe una vez alguna circunferencia con el centro en el origen de coordenadas (de radio arbitrariamente pequeño o arbitrariamente grande), el valor Arg z, variando continuamente, partiendo de cierto valor inicial $\mathrm{Arg}_k\, z_0$, al volver al punto inicial, obtiene un incremento $\pm 2\pi$ (en dependencia del sentido del recorrido de la circunferencia) y, por consiguiente, la rama

$$\mathrm{Ln}_k\, z = \ln|z| + i\, \mathrm{Arg}_k\, z$$

se convierte en otra rama:

$$\mathrm{Ln}_{k\pm 1}\, z = \ln|z| + i\,(\mathrm{Arg}_k\, z \pm 2\pi) = \ln|z| + i\, \mathrm{Arg}_{k\pm 1}\, z.$$

Evidentemente, describiendo la circunferencia cuantas veces se quiera en una misma dirección (por ejemplo, en la dirección positiva), obtendremos cada vez nuevas ramas:

$$\mathrm{Ln}_{k+1}\, z,\ \mathrm{Ln}_{k+2}\, z,\ \mathrm{Ln}_{k+3}\, z,\ \ldots$$

y, por consiguiente, nunca volveremos a la rama inicial $\mathrm{Ln}_k z$. Por esta razón, los puntos de ramificación 0 y ∞ se llaman aquí p u n t o s d e r a m i f i c a c i ó n d e o r d e n i n f i n i t o, o p u n t o s d e r a m i f i c a c i ó n l o g a r í t m i c o s.

Trazando en el plano z, por ejemplo, una curva de Jordan Γ' que una el punto $z = 0$ con el punto $z = \infty$, se obtiene un recinto de un tipo más general que G, en el cual es posible separar las ramas uniformes de Ln z. Las imágenes de esta curva en el plano w, en la transformación $w = \mathrm{Ln}\, z$, serán las curvas de Jordan γ'_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), que dividen el plano w en un conjunto infinito de franjas curvilíneas g'_k cuyas fronteras están formadas por los pares de curvas γ'_k y $\gamma'_{k+1}\ldots$ En el recinto G' cuya frontera es la curva Γ', obtenemos un conjunto numerable de ramas uniformes de Ln z: $(\mathrm{Ln}\, z)_k$, cada una de las cuales transforma G' biunívocamente en el recinto correspondiente g'_k.

Cualquiera de las funciones $(\mathrm{Ln}\, z)_k$ se puede obtener de cualquiera otra de las funciones $(\mathrm{Ln}\, z)_m$ agregando un entero respectivo, múltiplo de $2\pi i$.

Para la derivada de $(\mathrm{Ln}\, z_k)$ se tiene la fórmula anterior:

$$(\mathrm{Ln}\, z)'_k = \frac{1}{z}.$$

La independencia del último resultado de la elección de la rama de Ln z permite escribir en general:

$$(\mathrm{Ln}\, z)' = \frac{1}{z},$$

entendiendo el primer miembro como la derivada de una rama uniforme arbitraria de $\operatorname{Ln} z$, elegida en el recinto que contiene al punto dado z.

5.5. En este apartado consideraremos la función potencial general y la función exponencial general, y también el logaritmo de base arbitraria. Previamente tenemos que definir el concepto de potencia de exponente arbitrario.

Sea a un número arbitrario diferente de cero. Si n es un número entero, entonces, como ya sabemos, a^n se define por la relación

$$a^n = |a|^n [\cos(n \operatorname{Arg} a) + i \operatorname{sen}(n \operatorname{Arg} a)].$$

Si n es un número racional arbitrario, igual a $\frac{p}{q}$, donde q es un número natural y la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible, entonces $a^{\frac{p}{q}}$ posee q valores distintos, obtenidos por la fórmula (véase el ap. 2.3 del primer cap.):

$$a^{\frac{p}{q}} = |a|_+^{\frac{p}{q}} \left[\cos\left(\frac{p}{q} \operatorname{Arg} a\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{p}{q} \operatorname{Arg} a\right)\right].$$

Esta fórmula abarca también el caso de un exponente entero.

Supongamos ahora que ρ es un número real irracional. Fijemos un valor arbitrario $\varphi = \operatorname{Arg} a$ y consideremos una sucesión de números racionales r_n convergente hacia ρ. La sucesión de valores determinados de a^{r_n}:

$$|a|_+^{r_n} [\cos(r_n \operatorname{Arg} a) + i \operatorname{sen}(r_n \operatorname{Arg} a)],$$

converge, evidentemente, hacia el límite

$$|a|_+^{\rho} [\cos(\rho \operatorname{Arg} a) + i \operatorname{sen}(\rho \operatorname{Arg} a)],$$

que tomaremos por uno de los valores de a^ρ. Para obtener todos los valores de la potencia a^ρ de exponente irracional ρ, asignamos a $\operatorname{Arg} a$ en la expresión obtenida todos los valores posibles.

Como dos valores distintos de $\rho \operatorname{Arg} a$ se diferencian en un número de la forma $2k\rho\pi$, que no puede ser entero múltiplo de 2π (k es un número entero, distinto de cero, y ρ es un número irracional), todos los valores de a^ρ, correspondientes a distintos valores de $\operatorname{Arg} a$, son diferentes entre sí.

Así, pues, hemos definido la potencia a^α para el caso en que α es un número real arbitrario. Todos los valores de la potencia están comprendidos en la fórmula

$$a^\alpha = |a|_+^{\alpha} [\cos(\alpha \operatorname{Arg} a) + i \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{Arg} a)]. \qquad (5.5:1)$$

Si α es un número entero, se obtiene un valor de la potencia; si α es un número racional que se expresa por la fracción irreducible $\frac{p}{q}$,

se obtienen unos cuantos valores, precisamente q valores distintos, y, finalmente, si α es un número irracional, resulta un conjunto infinito (numerable) de valores distintos.

Para definir el concepto de potencia a^α en el caso de un exponente complejo cualquiera α, observemos que la fórmula (5.5:1) puede expresarse en la forma

$$a^\alpha = e^{\alpha \ln |a|} [\cos (\alpha \operatorname{Arg} a) + i \operatorname{sen} (\alpha \operatorname{Arg} a)] =$$
$$= \exp (\alpha \ln |a| + i\alpha \operatorname{Arg} a) = \exp (\alpha \operatorname{Ln} a).$$

El segundo miembro de esta fórmula tiene sentido no sólo cuando α es real, sino que para cualquier α complejo. De acuerdo a esto, hagamos por definición para cualquier α complejo:

$$a^\alpha = \exp (\alpha \operatorname{Ln} a). \tag{5.5:2}$$

Evidentemente, si α es imaginario, todos los valores de a^α que corresponden a distintos valores de $\operatorname{Ln} a$, o lo que es lo mismo, que corresponden a distintos valores de $\operatorname{Arg} a$, también son distintos entre sí. En efecto, dos valores distintos de $\alpha \operatorname{Ln} a$ se diferencian en un número de la forma $2\pi l\alpha$, que siendo α imaginario no puede ser entero múltiplo de $2\pi i$.

Comparando las expresiones

$$a^\alpha a^\beta = \exp (\alpha \operatorname{Ln} a) \cdot \exp (\beta \operatorname{Ln} a) = \exp (\alpha \operatorname{Ln} a + \beta \operatorname{Ln} a) =$$
$$= \exp [(\alpha + \beta) \ln a + 2\pi i (k\alpha + l\beta)]$$

y

$$a^{\alpha+\beta} = \exp [(\alpha + \beta) \operatorname{Ln} a] = \exp [(\alpha + \beta) \ln a + 2\pi i m (\alpha + \beta)],$$

donde k, l y m son números enteros arbitrarios, sacamos la conclusión de que entre los valores del producto $a^\alpha a^\beta$ están comprendidos todos los valores de la potencia $a^{\alpha+\beta}$, pero, en el caso general, existen también otros valores. Para que se cumpla la igualdad

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta},$$

es necesario y suficiente que para cualesquiera enteros k y l existan unos enteros m y n, tales que

$$k\alpha + l\beta = m (\alpha + \beta) + n.$$

Puede no cumplirse esta condición incluso cuando α y β sean números racionales; por cierto, es suficiente la condición $\alpha = m (\alpha + \beta) + n$ $\left(\text{por ejemplo, } \beta = i,\ \alpha = \frac{n+mi}{1-m}\right)$.

Análogamente, comparando las expresiones

$$(a^\alpha)^\beta = [\exp (\alpha \operatorname{Ln} a)]^\beta = \exp [\beta (\alpha \operatorname{Ln} a + 2l\pi i)] =$$
$$= \exp [\alpha\beta \ln a + 2\pi i\beta (k\alpha + l)]$$

y

$$a^{\alpha\beta} = \exp(\alpha\beta \operatorname{Ln} a) = \exp(\alpha\beta \ln a + 2m\pi i\alpha\beta),$$

donde k, l y m son números enteros arbitrarios, sacamos la conclusión de que entre los valores $(a^{\alpha})^{\beta}$ están contenidos todos los valores de $a^{\alpha\beta}$, pero en el caso general hay también otros valores. Para que se cumpla la igualdad

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta},$$

es necesario y suficiente que para cualesquiera enteros k y l existan unos enteros m y n tales, que

$$k\alpha\beta + l\beta = m\alpha\beta + n.$$

Puede no cumplirse esta condición incluso cuando α y β son números racionales; por cierto, es suficiente la condición $\beta = m\alpha\beta + n$ $\left(\text{por ejemplo, } \beta = i,\ \alpha = \frac{1-ni}{m}\right)$.

Aclaremos con ejemplos la definición de potencia:

1) $$1^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1) = \exp(2k\pi i \sqrt{2}) = \\ = \cos(2k\pi\sqrt{2}) + i \operatorname{sen}(2k\pi\sqrt{2}) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

2) $$e^{z} = \exp(z \operatorname{Ln} e) = \exp[z(1 + 2k\pi i)] = \exp z \exp(2k\pi iz) \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Vemos, pues, que solamente uno de los valores de la potencia e^{z} coincide con $\exp z$. Los otros valores son: $\exp z \exp 2\pi iz$, $\exp z \exp(-2\pi iz)$, etc. En particular, solamente uno de los valores de e^{x} (x es un número real) coincide con el número real positivo $\exp x$. Los otros valores son: $\exp x \exp 2\pi ix$, $\exp x \exp(-2\pi ix)$, ... Habrá un número finito de valores distintos si x es racional y un conjunto infinito si x es irracional.

A pesar de esto, en nuestro curso utilizamos el símbolo e^{z} así como estamos acostumbrados a entenderlo en el curso de análisis, donde éste coincide con $\exp z$. Este uso del símbolo multiforme es completamente análogo a como ordinariamente se entiende el símbolo $\sqrt[n]{a}$ en el análisis (a es un número real positivo), es decir, como el único valor positivo («aritmético») del radical.

3) $$i^{i} = \exp(i \operatorname{Ln} i) = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}i - 2k\pi i\right)\right] = \\ = \exp\left[(4k-1)\frac{\pi}{2}\right] = e^{(4k-1)\frac{\pi}{2}} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Por lo tanto, todos los valores de la potencia i^i son números reales positivos, entre los cuales hay arbitrariamente pequeños y arbitrariamente grandes.

Basándose en la definición de la potencia, se pueden considerar las dos siguientes funciones multiformes:

$$z^a \text{ y } a^z.$$

La primera de éstas —la potencia de exponente arbitrario— está definida, por lo general, solamente para $z \neq 0$.

Si α es un número real entero, z^α representa una función racional de forma particular. Entonces ésta está definida también para $z = 0$, donde tiene un cero (si $\alpha > 0$) o un polo (si $\alpha < 0$). Cuando α es un número real racional no entero: $\alpha = \frac{p}{q}$ (q es un número natural y la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible), z^α puede expresarse en la forma

$$z^\alpha = \sqrt[q]{z^p}.$$

Esta es una función multiforme; es precisamente q-forme. Para ella, los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ son puntos de ramificación de orden $q - 1$. En cualquier recinto G, obtenido del plano ampliado después de haber trazado una curva de Jordan que una los puntos de ramificación, se pueden separar q ramas uniformes diferenciables distintas de la función. Estas ramas se convierten continuamente una en otra al recorrer el punto z por curvas que encierren al origen de coordenadas (o al punto del infinito).

Si, finalmente, α no es un número real racional (o sea, α es real irracional o es un número imaginario), la función z^α es de infinitas determinaciones. Todos sus valores están contenidos en la fórmula

$$z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z).$$

Para ésta los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ también son puntos de ramificación. Pero ahora estos puntos son de orden infinito.

En efecto, al dar una vuelta en torno del punto $z = 0$, por ejemplo, en la dirección positiva, el valor del Arg z, variando continuamente, aumenta en 2π; debido a esto, el valor $\alpha \operatorname{Ln} z$ varía en $2\pi i\alpha$, y el valor de la función adquiere un factor $\exp(2\pi i\alpha) \neq 1$.

Veamos ahora la función exponencial general a^z ($a \neq 0$). Esta se define para cualquier valor de z por la fórmula

$$a^z = \exp(z \operatorname{Ln} a).$$

Para obtener una rama uniforme determinada es suficiente fijar uno de los valores $\operatorname{Ln} a = b$.

Suponiendo que esto ya se ha hecho, obtenemos una función $\exp(bz)$, uniforme y diferenciable en cualquier punto. Tomando

todos los valores posibles de Ln a, obtenemos todas las ramas uniformes posibles de la función a^z. Como dos valores de Ln a se diferencian en un sumando de la forma $2k\pi i$, las dos ramas de la función a^z se diferenciarán en un factor de la forma exp $(2k\pi iz)$, el cual representa también una función uniforme que es diferenciable en todos los sitios y que toma el valor 1 solamente para valores reales enteros de z. No obstante, en el caso considerado, las ramas de la función uniforme se diferenciarán esencialmente por su carácter de las ramas de todas las funciones multiformes consideradas anteriormente. Precisando, en todos los ejemplos anteriores existían tales puntos del plano ampliado (puntos de ramificación), que moviéndose en torno de los mismos por curvas de Jordan cerradas y haciendo variar continuamente los valores de la función (de una rama determinada), teníamos la posibilidad de convertir continuamente una rama en otra.

Aquí queda excluida tal posibilidad, precisamente porque cada rama representa una función continua y uniforme en todo el plano finito. Independientemente de la curva cerrada por la que nos movamos al volver al punto inicial obtendremos el mismo punto inicial z (no importa que resulte otro valor del argumento), y por consiguiente, el mismo valor de la funcion exp (bz) (b es un valor fijado de Ln a).

Por lo tanto, la función multiforme a^z no tiene ningún punto de ramificación y sus ramas uniformes continuas no pueden convertirse continuamente una en otra. Todo esto permite considerar a estas ramas como funciones independientes entre sí que son uniformes y diferenciables en todos los sitios, y por consiguiente, enteras:

$$\exp(z \ln a), \quad \exp[z(\ln a + 2\pi i)], \qquad \exp[z(\ln a - 2\pi i)], \ \ldots$$

El hecho de que todas estas funciones enteras distintas puedan expresarse como ramas de una función a^z de infinitas determinaciones, no tiene para nosotros más importancia que, por ejemplo, el hecho de que las funciones sen z y —sen z puedan considerarse como ramas de la función biforme $\sqrt{1-\cos^2 z}$, o que las funciones hiperbólicas sh z y ch z se consideren como dos ramas de la función biforme $\frac{1}{2}[\exp z + \sqrt{\exp(-2z)}]$. (Advertimos al lector que las funciones $\sqrt{1-\cos^2 z}$ y $\frac{1}{2}[\exp z + \sqrt{\exp(-2z)}]$, igual que la función a^z, no poseen puntos de ramificación).

Fijando una de las ramas de la función $z = a^w = \exp(bw)$, donde b es uno de los valores de Ln a, podemos considerar la función inversa respecto de esta rama. Obtenemos, evidentemente:

$$w = \frac{1}{b} \operatorname{Ln} z \qquad (b = \ln a + 2k_0\pi i). \tag{5.5:3}$$

Esta función se diferencia de la función $\operatorname{Ln} z$ solamente en el factor constante $\frac{1}{b}$. Como de las relaciones (5.5:3) se deduce que

$$z = \exp(bw) = a^{w} \quad (\text{uno de los valores de } a^{w}),$$

se puede considerar que w es el l o g a r i t m o d e z d e b a s e a.

Así, pues, definimos el logaritmo de un número complejo arbitrario respecto de la base a (a es un número complejo, diferente de cero) mediante la fórmula

$$\operatorname{Log}_a z = \frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} a}, \tag{5.5:3'}$$

donde en el denominador está fijado uno de los infinitos valores de $\operatorname{Ln} a$ (un mismo valor b para todos los z).

Por lo tanto, esta definición no sólo exige que esté indicada la base a del sistema de logaritmos, sino también que esté fijado uno de los valores de $\operatorname{Ln} a$.

Aclaremos lo dicho con ejemplos.

1) $a = e$. Si se fija el valor de $\operatorname{Ln} e$, igual a 1, se obtiene:

$$\operatorname{Log}_a z = \operatorname{Ln} z.$$

Esta es la definición ordinaria del logaritmo natural. Pero podría tomarse el valor de $\operatorname{Ln} e$, igual, por ejemplo, a $1 + 2\pi i$. Entonces tendríamos:

$$\operatorname{Log}_e z = \frac{\operatorname{Ln} z}{1 + 2\pi i}.$$

El lector comprobará fácilmente que, con tal definición, entre todos los números positivos, solamente los de la forma e^{k} (k es un número entero) tendrían, cada uno de ellos, un valor real del logaritmo natural.

2) $a = 10$. Tomando el valor de $\operatorname{Ln} 10$ igual a $2{,}302585 \ldots = \frac{1}{0{,}43429 \ldots} = \frac{1}{M}$, tendremos:

$$\operatorname{Log}_{10} z = M \operatorname{Ln} z = 0{,}43429 \ldots \operatorname{Ln} z.$$

Esta definición del logaritmo decimal de un número complejo arbitrario z ($z \neq 0$) concuerda con la definición ordinaria de los logaritmos decimales de los números reales positivos, pues, si $z = x > 0$, tomando los valores principales de los logaritmos, tendremos:

$$\lg x = 0{,}43429 \ldots \ln x.$$

3) $a = 1$. En este caso, para la definición del valor principal del logaritmo de base 1 no se puede utilizar el valor principal del $\operatorname{Ln} 1$, igual a cero. Tomemos el valor de $\operatorname{Ln} 1$, igual a $2\pi i$. Entonces,

según la definición, tendremos:

$$\operatorname{Log}_1 z = \frac{\operatorname{Ln} z}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} z - \frac{i}{2\pi} \ln |z|.$$

De aquí se deduce que todos los valores de $\operatorname{Log}_1 z$, son reales si $|z| = 1$, y son imaginarios si $|z| \neq 1$. Por consiguiente, poseen logaritmos reales de base 1 aquellos números, y sólo aquéllos, que se representan por puntos de la circunferencia unidad. Para estos números los valores del logaritmo coinciden con los valores de sus argumentos (medidos en fracciones de 2π). En resumen, $\frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} z$ coincide con el logaritmo de z de base 1 para los números complejos cuyos módulos son iguales a uno.

5.6. En este apartado nos detendremos en las funciones trigonométricas inversas $\operatorname{Arc} \cos z$ y $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z$. La función $w = \operatorname{Arc} \cos z$ se define mediante la ecuación

$$z = \cos w. \tag{5.6:1}$$

Sustituyendo $\cos w$ mediante $\frac{\exp(iw) + \exp(-iw)}{2}$ y poniendo, para abreviar, $\exp(iw) = t$, escribimos la ecuación (5.6:1) en la forma

$$z = \frac{t + t^{-1}}{2}, \tag{5.6:2}$$

de donde

$$t^2 - 2zt + 1 = 0 \tag{5.6:3}$$

y

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1}. \tag{5.6:4}$$

Como ambas raíces de la ecuación cuadrada (5.6:3) son diferentes de cero (su producto es igual a 1), la ecuación

$$\exp(iw) = t$$

posee raíces (respecto de la incógnita w). Obtenemos:

$$w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} t = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}). \tag{5.6:5}$$

En resumen, la función multiforme $w = \operatorname{Arc} \cos z$ se expresa mediante el logaritmo y la raíz cuadrada

$$w = \operatorname{Arc} \cos z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}). \tag{5.6:6}$$

Sus puntos de ramificación son, ante todo, $z = \pm 1$. En efecto, al dar una vuelta el punto z a lo largo de alguna curva de Jordan cerrada que encierre en su interior solamente uno de estos puntos, uno

de los valores de $\sqrt{z^2-1}$ se sustituye por el otro, el cual se diferencia del primero en el signo. El valor $z+\sqrt{z^2-1}=t$, que es la raíz de la ecuación cuadrática (5.6:3), se sustituye por la otra raíz de la misma ecuación, igual a $\frac{1}{t}$ (ya se indicó que el producto de ambas raíces es igual a 1). Por consiguiente, de los valores $w = \frac{1}{i}$ Ln t pasamos a los valores $\frac{1}{i}$ Ln $\frac{1}{t}$, que son distintos de los iniciales, si $t \neq \frac{1}{t}$. Pero t puede ser igual a $\frac{1}{t}$ sólo cuando $t=\pm 1$; como se ve en (5.6:3) o en (5.6:4), esto es posible solamente cuando $z=\pm 1$. Como las curvas de Jordan recorridas no pasan por los puntos $z=\pm 1$, el caso indicado no puede aparecer y verdaderamente se puede afirmar que, como resultado de los recorridos señalados varían los valores de w = Arc cos z. Por lo tanto, los puntos ± 1 son puntos de ramificación para Arc cos z. Estos deben su existencia a la presencia del radical cuadrático en la fórmula (5.6:6). Mas la fórmula (5.6:6) posee la forma $w=\frac{1}{i}$ Ln t $(t=z+\sqrt{z^2+1})$, y podemos esperar también puntos de ramificación correspondientes a los dos puntos de ramificación de Ln t: $t=0$ y $t=\infty$.

Ya se sabe por el ap. 4.9 de este capítulo, que a cada recorrido de una vuelta del punto t, a lo largo de una circunferencia con centro en el origen de coordenadas, corresponde en el plano z un recorrido de una vuelta del punto z a lo largo de una elipse con los focos ± 1 y viceversa.

En resumen, a un recorrido de una vuelta del punto z, a lo largo de una elipse con los focos ± 1, corresponde una variación del Arg t en $\pm 2\pi$ y una variación de $\frac{1}{i}$ Ln t en $\pm 2\pi$. Como tal elipse puede pertenecer a cualquier entorno del punto $z=\infty$ previamente asignado, éste es un punto de ramificación de Arc cos z de orden infinito.

Claro, el recorrido de cualquier elipse con los focos en los puntos ± 1 se puede considerar también como un recorrido alrededor del punto $z=0$. Pero ninguna de estas elipses puede estar situada completamente en el entorno $|z| \leqslant \rho$, si $\rho \leqslant 1$.

Demostremos que ni el punto $z=0$ ni, en general, ningún punto z_0 del plano ampliado, a excepción de los indicados anteriormente ($z=\pm 1$ y $z=\infty$), puede ser punto de ramificación para Arc cos z En efecto, la fórmula (5.6:4) para $z=z_0$ nos da dos valores distintos: t_0' y t_0'', diferentes de 0, ± 1 y ∞, que satisfacen a la condición $t_0't_0''=1$. Se pueden tomar unos entornos U' y U'' de estos puntos tan pequeños que no contengan a los puntos 0 y ∞ y que ninguno de ellos contengan dos puntos t_1, t_2 que cumplan la condición $t_1t_2=1$.

En efecto, si el punto t'_0 no está situado en la circunferencia unidad, por ejemplo $|t'_0| < 1$, entonces t''_0 tampoco estará situado en esta circunferencia y $|t''_0| > 1$. En este caso, es suficiente tomar los entornos de modo que uno de ellos (U') esté situado en el interior de la circunferencia unidad, y el otro (U''), fuera de la circunferencia (fig. 43). Si t'_0 está situado en la circunferencia unidad y está, por ejemplo, en el semiplano superior, entonces $t''_0 = \frac{1}{t'_0}$, estará situado

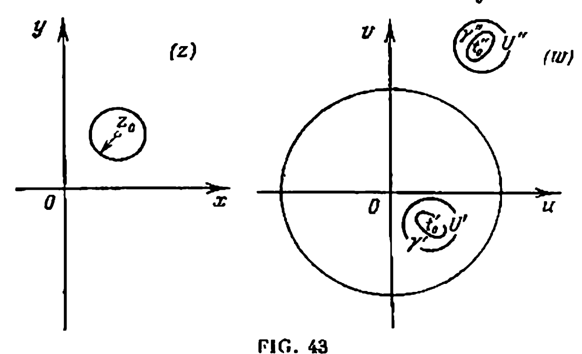


FIG. 43

también en la circunferencia unidad, y además, en el semiplano inferior. En este caso, es suficiente tomar un entorno (U') en el semiplano superior y otro (U''), en el semiplano inferior. En cada uno de los entornos U' y U'', la función $z = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ será univalente (ésta toma un mismo valor solamente en los pares de puntos que están ligados por la relación $t' \cdot t'' = 1$) y, por consiguiente, transformará biunívocamente U' y U'' en unos recintos g' y g'' del plano z que contienen en sus interiores al punto z_0 (la imagen de los centros t'_0 y t''_0 de los entornos U' y U'').

Tomemos las circunferencias $|z - z_0| = \rho$ con centro en z_0 tan pequeñas, que estén contenidas tanto en el recinto g' como en el recinto g''. Evidentemente, todas las circunferencias de radio suficientemente pequeño satisfacen a estas condiciones. Entonces, debido a la transformación (5.6:2), a cada una de estas circunferencias corresponderán unas curvas de Jordan cerradas γ' y γ'' situadas cada una de ellas en uno de los entornos U' y U'', respectivamente. Ninguna de estas curvas contendrá en su interior al punto O. Por esto, cuando z recorre la circunferencia $|z - z_0| = \rho$, t recorrerá o la curva γ' (que corresponde a una de las ramas de la función (5.6:4)), o la curva γ'' (que corresponde a la otra rama de la función (5.6:4))

Si antes del recorrido se fija un valor de Arg t en algún punto de γ' (o de γ''), entonces, después del recorrido éste, variando continuamente, volverá a tomar el valor anterior (debido, precisamente, a que ni γ' ni γ'' contienen en su interior al punto $t = 0$). Por esta razón, como resultado del recorrido volverá también a tomar su valor inicial el valor de $\frac{1}{i}$ Ln t = Arccos z.

En resumen, un punto z_0, distinto de ± 1 y ∞, no puede ser un punto de ramificación para Arccos z.

Para obtener algún recinto del plano z en el cual sea posible separar ramas uniformes continuas de Arccos z, hay que unir entre sí los puntos de ramificación de esta función mediante curvas de Jordan. Tomemos, por ejemplo, el segmento infinito Δ del eje real que une los puntos -1 y $+1$ mediante el punto del infinito. Este segmento Δ es la frontera de un recinto G.

De lo que ya se sabe de la función (5.6:2), se deduce que esta función transforma biunívocamente en el recinto G tanto el semiplano superior t como el inferior. A su vez, la función $w = \frac{1}{i}$ Ln t transforma cada uno de éstos en franjas del plano w paralelas al eje y, de anchura π; precisamente, el semiplano superior se transforma en las franjas g_{2k-1}:

$$(2k-1)\pi < u < 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

y el semiplano inferior, en las franjas g_{2k}:

$$2k\pi < u < (2k+1)\pi.$$

En resumen, las imágenes del recinto G en el plano w son las franjas g_n indicadas.

Para fijar alguna rama uniforme de Arccos z en el recinto G, es suficiente indicar a qué franja g_n pertenecen sus valores. Así, obtenemos las ramas: $\text{Arccos}_0\, z$, $\text{Arccos}_1\, z$, $\text{Arccos}_{-1}\, z$, . . . Por cierto, es suficiente fijar el valor de Arccos z en un punto cualquiera del recinto G, por ejemplo, en el origen de coordenadas. Entonces, la franja g_n, donde caiga este valor, determinará toda la rama de Arccos z.

Claro, se pueden definir también las ramas uniformes de Arccos z en muchos otros recintos del plano z. Señalemos, por ejemplo, el recinto G' cuya frontera consta del segmento finito δ del eje real que une los puntos -1 y $+1$, y de la parte positiva del eje imaginario, o bien, el recinto G'' cuya frontera consta del mismo segmento δ y de la parte negativa del eje imaginario.

Proponemos al lector averiguar a qué recintos del plano w transforman G' y G'' las ramas uniformes de la función Arccos z que corresponden a estos últimos recintos.

Consideremos ahora la función $w = \operatorname{Arctg} z$, inversa de la función $z = \operatorname{tg} w$. Expresando $\operatorname{tg} w$ mediante sen w y cos w, y luego mediante la función exponencial, obtenemos:

$$z=\frac{1}{i}\,\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}\,. \tag{5.6:7}$$

o bien, haciendo $e^{2iw}=\tau$:

$$z=\frac{1}{i}\,\frac{\tau-1}{\tau+1}\,,$$

de donde

$$\tau=\frac{1+iz}{1-iz}\,,$$

y, finalmente,

$$w=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}\,.$$

Así, pues, $\operatorname{Arctg} z$ se expresa mediante el logaritmo de la función homográfica

$$w=\operatorname{Arctg} z=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}\,. \tag{5.6:8}$$

Proponemos al lector verificar que $\operatorname{Arctg} z$ posee solamente dos puntos de ramificación: $\pm i$. Los recintos más simples en los cuales se pueden separar las ramas uniformes de $\operatorname{Arctg} z$, son: el recinto D cuya frontera es el segmento infinito Δ del eje imaginario que une los puntos de ramificación $-i$ y $+i$, y el recinto d cuya frontera es el segmento finito δ que une los mismos puntos.

El lector verificará luego que las ramas uniformes de $\operatorname{Arctg} z$. en el recinto D transforman este recinto biunívoca y conformemente en las franjas de anchura π, paralelas al eje imaginario:

$$k\pi-\frac{\pi}{2}<u<k\pi+\frac{\pi}{2} \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots),$$

y las ramas uniformes de esta función en el recinto d transforman d en las franjas semejantes $k\pi < u < (k+1)\,\pi$.

5.7. A continuación necesitaremos la transformación realizada por la función $w = z + \operatorname{Ln} z$, o más exactamente, por su rama uniforme en el semiplano superior

$$w=z+\ln z. \tag{5.7:1}$$

Haciendo $z=re^{i\theta}$, obtenemos:

$$u=r\cos\theta+\ln r, \qquad v=r\operatorname{sen}\theta+\theta \qquad (0<\theta<\pi). \tag{5.7:2}$$

Consideremos las imágenes de los rayos θ = const. Las ecuaciones (5.7:2) determinan estas imágenes, donde r desempeña el papel de parámetro, que varía desde 0 hasta ∞.

Si $\theta = 0$, entonces $u = r + \ln r$, $v = 0$ y como $r + \ln r$ crece desde $-\infty$ hasta ∞, cuando r varía desde 0 hasta ∞, la imagen del rayo $\theta = 0$ es todo el eje real en el plano w. Si $\theta = \pi$, entonces $u = -r + \ln r$, $v = \pi$, y resulta una semirrecta paralela al eje real $-\infty < u \leqslant -1$, $v = \pi$, doblemente recorrida por el punto w cuando z recorre una sola vez el rayo $\theta = \pi$. Sea, finalmente, $0 < \theta < \pi$. La segunda de las ecuaciones (5.7:2) muestra que v crece

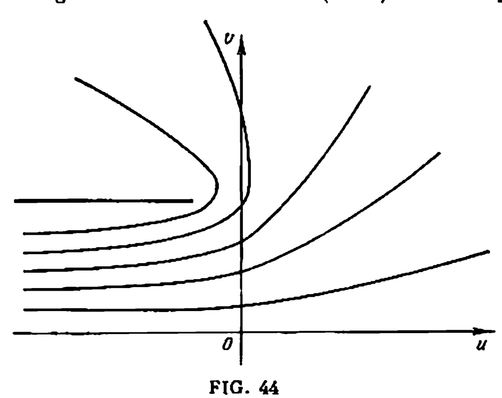


FIG. 44

desde el valor θ hasta ∞, cuando r varía desde 0 hasta ∞. Expresando r mediante v y θ de esta ecuación y poniéndolo en la primera de las ecuaciones (5.7:2), obtenemos la ecuación de la imagen del rayo θ = const en la forma siguiente:

$$u = (v - \theta)\operatorname{cotg}\theta + \ln\frac{v-\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad 0 < v < \infty. \qquad (5.7:3)$$

El lector se cerciorará fácilmente de que la ecuación (5.7:3) representa una curva, que posee la asíntota $v = \theta$, que toda la curva está situada por encima de la asíntota. Si $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, entonces u crece desde $-\infty$ hasta ∞, cuando v crece desde 0 hasta ∞, y si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, entonces u crece desde $-\infty$ hasta el valor máximo de $\ln\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right) - 1$, que se alcanza para $v = \theta - \operatorname{tg}\theta$, y después decrece hasta $-\infty$. En todos los casos estas curvas tienen dirigida la convexidad hacia la derecha (fig. 44).

Consideremos a u en la ecuación (5.7:3) como función de θ para un valor fijado de $v = v_0$ $(0 < \theta < \min(v_0, \pi))$. Aplicando la

derivada observamos que u es monótona decreciente *); por esta razón, dos puntos distintos z' y z'', situados en distintos rayos $\theta = \theta'$ y $\theta = \theta''$, no pueden tener una misma imagen $w_0 = u_0 + iv_0$. Pero dos puntos z' y z'', situados en un mismo rayo, tampoco pueden tener imágenes iguales; en efecto, como ya se vio, el punto $w = u + iv$ recorre de un modo monótono la curva (5.7:3), que carece de puntos múltiples, cuando $r = |z|$ crece desde 0 hasta ∞. De aquí se deduce que la función $w = z + \ln z$ es univalente en el semiplano superior; ésta transforma conformemente el semiplano en el recinto D que se obtiene del semiplano superior w excluyendo la semirrecta $-\infty < u \leqslant -1$, $v = \pi$.

Haciendo $z = e^t$, se obtiene la función:

$$w = e^t + t, \tag{5.7:4}$$

la cual, como fácilmente verificará el lector, transforma conformemente la franja $0 < \operatorname{Im} t < \pi$ en el mismo recinto D.

Observando que la función (5.7:4) en puntos simétricos respecto del eje real toma valores conjugados, sacamos la conclusión de que ésta transforma la franja $-\pi < \operatorname{Im} t < 0$ en el recinto D^*, simétrico con D respecto del eje real. Como esta función transforma biunívocamente el eje real, la misma realiza una transformación biunívoca de la franja $-\pi < \operatorname{Im} t < \pi$ en el recinto que se obtiene del plano w excluyendo dos rayos: $-\infty < \operatorname{Re} w < -1$, $\operatorname{Im} w = \pi$ y $-\infty < \operatorname{Re} w < -1$, $\operatorname{Im} w = -\pi$.

---

*) $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -(v - \theta) - \dfrac{[1 + (v - \theta)\operatorname{cotg}\theta]^2}{v - \theta} < 0$ para $0 < \theta < \min(v, \pi)$.
Como muestra la fórmula (5.7:3), al crecer θ en el intervalo indicado, u decrece desde $+\infty$ hasta $-\infty$, si $v \neq \pi$, y desde $+\infty$ hasta -1, si $v = \pi$.

CAPITULO

TERCERO

INTEGRALES Y SERIES DE POTENCIAS

§ 1. CURVAS RECTIFICABLES. INTEGRALES

1.1. Sea L: $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ una curva continua. A cada partición del segmento $[\alpha, \beta]$ en segmentos parciales $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$; $\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \beta$) corresponde una partición de la curva L en arcos parciales σ_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), con los puntos iniciales $z_k = \lambda(\alpha_k)$ y los puntos finales $z_{k+1} = \lambda(\alpha_{k+1})$; el punto final de cada arco (a excepción del último) coincide con el punto inicial del arco que le sigue. Uniendo los puntos $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ en su orden mediante segmentos rectilíneos, obtenemos una poligonal Λ inscrita en la curva L. Los lados de esta poligonal son las cuerdas de los arcos σ_k. Evidentemente, la longitud de la poligonal Λ es igual a $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$. Si esta magnitud, independientemente de la partición considerada, queda acotada:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leqslant C < \infty,$$

la curva L se llama r e c t i f i c a b l e, y el extremo superior de las sumas indicadas se llama l o n g i t u d d e l a c u r v a. Si existen particiones del segmento $[\alpha, \beta]$ para las cuales las sumas correspondientes, es decir, las longitudes de las poligonales inscritas en la curva, son arbitrariamente grandes, se dice que la curva n o e s r e c t i f i c a b l e. En este caso, a ella no se le atribuye ninguna longitud, o bien, se supone que la longitud de la curva L es infinita.

Es fácil verificar que la longitud de una curva rectificable es el límite de las longitudes de cualquier sucesión de poligonales inscri-

tas, cuando la longitud máxima de los segmentos que corresponden a la partición del segmento $[\alpha, \beta]$, tiende a cero.

Una clase particular de curvas rectificables son las curvas l i s a s (arcos e l e m e n t a l e s). Una curva continua L se llama l i s a, si entre sus distintas representaciones paramétricas existe al menos una $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, para la cual $\lambda(t)$ posee derivada continua y diferente de cero en todo el segmento $[\alpha, \beta]$.

El significado geométrico de la curva lisa queda claro del ap. 2.1 del segundo capítulo.

Precisamente allí se demostró que la existencia de la derivada $\lambda'(t_0) \neq 0$ significa que la curva posee tangente en el punto $z_0 = \lambda(t_0)$, la cual forma con el eje real un ángulo igual a $\operatorname{Arg} \lambda'(t_0)$. Por lo tanto, una curva lisa posee tangente en cada punto. Si t varía continuamente desde α hasta β, entonces z describe una curva desde el punto inicial hasta el final, variando también $\lambda'(t)$ continuamente, sin anularse, por lo cual varía también continuamente $\operatorname{Arg} \lambda'(t)$*). Esto significa que la pendiente de la tangente a una curva lisa varía continuamente cuando el punto de contacto se desplaza continuamente a lo largo del arco.

Para la longitud l de una curva lisa L, en el cálculo integral se deduce la conocida fórmula

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}\, dt.$$

Esta fórmula puede escribirse en una forma más compacta observando que

$$\lambda'(t) = x'(t) + iy'(t) \quad \text{y} \quad |\lambda'(t)|^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2;$$

entonces obtenemos:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} |\lambda'(t)|\, dt.$$

Una clase más general que las curvas rectificables son las curvas l i s a s a t r o z o s (curvas elementales).

Una curva continua L se llama lisa a trozos si está formada por un número finito de curvas lisas, o, expresándose con más precisión, si para una representación paramétrica suya $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, el segmento $[\alpha, \beta]$ posee una subdivisión en un número finito de segmentos $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ $(\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m = \beta)$, en cada

*) $\operatorname{Arg} \lambda'(t) = \operatorname{Im} \{\operatorname{Ln} [\lambda'(t)]\}$, y como $\lambda'(t)$ varía continuamente, sin anularse, $\operatorname{Ln} [\lambda'(t)]$ y, por consiguiente, también $\operatorname{Im} \{\operatorname{Ln} [\lambda'(t)]\}$ varían continuamente.

uno de los cuales $\lambda(t)$ posee derivada continua y diferente de cero. De esta definición se deduce que una curva lisa a trozos puede no poseer tangente en los puntos $z_k = \lambda(\alpha_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$, pero en cada uno de estos puntos existen las tangentes «a la izquierda» y «a la derecha», de modo que los puntos indicados son puntos angulares de la curva lisa a trozos.

Para la longitud l de la curva lisa a trozos sigue siendo válida la fórmula anterior

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} |\lambda'(t)|\, dt.$$

Claro que con las curvas lisas a trozos no se agota toda la clase de las curvas rectificables. Por cierto el lector que no conozca las curvas rectificables en toda su amplitud puede sustituir para sí en la exposición ulterior, el concepto de curva rectificable por el concepto más estrecho de curva lisa a trozos.

Sea L alguna curva rectificable $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, y $P(z) = P(x, y)$, $Q(z) = Q(x, y)$, dos funciones reales definidas y continuas en esta curva. Dada una partición arbitraria del segmento $[\alpha, \beta]$ en segmentos $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, tomemos en los arcos σ_k con los extremos $z_k = x_k + iy_k$ y $z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1}$ sendos puntos: $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k = \lambda(\tau_k)$ $(\alpha_k \leqslant \tau_k \leqslant \alpha_{k+1})$ y formemos para las funciones P y Q la suma integral respectiva

$$\sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) + Q(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k)].$$

En el cálculo integral se demuestra *) que para cualquier sucesión de particiones del segmento $[\alpha, \beta]$ en segmentos cuya longitud máxima tienda a cero, las sucesiones de las sumas integrales respectivas tienden a un mismo límite. Este último se designa así:

$$\int_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

y se llama integral (curvilínea) de $P\, dx + Q\, dy$ a lo largo de la curva L.

Basándose en este hecho, en el siguiente apartado introduciremos el concepto de integral de una función compleja a lo largo de una curva rectificable.

En particular, si L es una curva lisa a trozos, la integral curvilínea se puede expresar mediante la integral definida de una función

*) Véase, por ejemplo, Ch. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale, Vol. I.

de parámetro t del modo siguiente:

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)]\,x'(t) + Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt.$$

1.2. Sea L: $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, una curva rectificable y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, una función definida y continua en L. Consideremos alguna partición de la curva L en arcos σ_k (aquí se conservan las designaciones del precedente apartado) y formemos para la función $f(z)$ la suma integral correspondiente:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Cada término de esta suma es el producto del valor de $f(z)$ en cierto punto ζ_k del arco σ_k por la diferencia de los afijos de los puntos inicial y final de este arco. Introduzcamos para abreviar las siguientes designaciones:

$$u(\xi_k, \eta_k) = u_k, \quad v(\xi_k, \eta_k) = v_k, \quad x_{k+1} - x_k = \Delta x_k, \quad y_{k+1} - y_k = \Delta y_k.$$

Entonces tendremos:

$$f(\zeta_k) = u_k + iv_k, \quad z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

y, por consiguiente,

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{n-1} (v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k).$$

De aquí se ve que las partes real e imaginaria de la suma integral S son sumas integrales formadas para la misma partición de la curva L y para los siguientes pares de funciones reales: la primera, para $u(x, y)$ y $-v(x, y)$, y la segunda, para $v(x, y)$ y $u(x, y)$. Como las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas (debido a que $f(z)$ es continua), y la curva L es rectificable, las sumas integrales indicadas tenderán hacia unos límites determinados al disminuir indefinidamente las particiones de la curva (es decir, cuando la máxima diferencia de los valores contiguos del parámetro t tiende

a cero); tenderán precisamente a

$$\int_L u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy \quad \text{y} \quad \int_L v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy.$$

De aquí se deduce que, en las mismas condiciones, la suma integral de la función compleja $f(z)$ también tiende a un límite determinado y este límite es

$$\int_L u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i \int_L v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy.$$

El límite indicado se designa mediante $\int_L f(z)\,dz$ y se llama **integral de la función** $f(z)$, **tomada a lo largo de (o sobre) la curva** L.

Así, pues,

$$\int_L f(z)\,dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) =$$

$$= \int_L u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i \int_L v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy. \qquad (1.2:1)$$

Vemos, que el cálculo de la integral de una función compleja puede reducirse al cálculo de dos integrales curvilíneas de funciones reales.

En el caso particular, cuando L es un segmento del eje real $a \leqslant x \leqslant b$, $z = x$ y $f(z) = f(x)$, donde $f(x)$ es una función real, obtenemos según la definición admitida:

$$\int_L f(x)\,dx = \lim \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Pero, precisamente así se expresa la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$.

Por consiguiente,

$$\int_L f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1.2:2)$$

y la integral definida de una función real de variable real resulta ser un caso particular de la integral de una funcion compleja a lo largo de la recta. Cuando L es, como anteriormente, un segmento

del eje real, pero la función $f(x)$ es compleja: $f(x) = u(x) + iv(x)$, obtenemos:

$$\int_L f(x)\,dx = \lim \sum_{h=0}^{n-1} [u(\xi_h) + iv(\xi_h)](x_{h+1} - x_h) =$$

$$= \lim \sum_{h=0}^{n-1} u(\xi_h)(x_{h+1} - x_h) + i \lim \sum_{h=0}^{n-1} v(\xi_h)(x_{h+1} - x_h) =$$

$$= \int_a^b u(x)\,dx + i \int_a^b v(x)\,dx. \qquad (1.2:3)$$

Considerando el caso más general, cuando L es alguna curva lisa a trozos, podemos sustituir cada una de las integrales curvilíneas en el segundo miembro de la fórmula (1.2:1) por su integral definida correspondiente de la función de la variable real t; entonces obtenemos:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \{u[x(t),\ y(t)]\,x'(t) - v[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\}\,dt +$$

$$+ i \int_\alpha^\beta \{v[x(t),\ y(t)]\,x'(t) + u[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\}\,dt. \qquad (1.2:4)$$

Comparando el segundo miembro de esta fórmula con el segundo miembro de la fórmula (1.2:3), podemos considerarlo como la integral de la función compleja:

$$\{u[x(t),\ y(t)]\,x'(t) - v[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\} +$$
$$+ i\{v[x(t),\ y(t)]\,x'(t) + u[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\} =$$
$$= \{u[x(t),\ y(t)] + iv[x(t),\ y(t)]\}\cdot[x'(t) + iy'(t)] = f[\lambda(t)]\cdot\lambda'(t)$$

a lo largo del segmento del eje real δ: $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Por consiguiente, la fórmula (1.2:4) puede expresarse en la forma

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\delta f[\lambda(t)]\cdot\lambda'(t)\,dt. \qquad (1.2:5)$$

Aquí, el segundo miembro se obtiene del primero sustituyendo: primero, la curva L por el segmento δ del eje real y, segundo, z por $\lambda(t)$ y dz por $\lambda'(t)\,dt$. Su prioridad ante el primer miembro consiste en que, después de separar las partes real e imaginaria bajo el signo de la integral, ésta se escribe inmediatamente en forma de dos integrales definidas de funciones reales del parámetro t (véase el segundo miembro de la fórmula (1.2:4)).

1.3. Enumeremos las propiedades elementales de las integrales de las funciones complejas:

a)
$$\int_L f(z)\,dz = -\int_{L_-} f(z)\,dz. \qquad (1.3:1)$$

Aquí, se designa con L_- la curva que se diferencia de L solamente en el sentido del recorrido.

b)
$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{L_m} f(z)\,dz. \qquad (1.3:2)$$

Aquí, $L_1, L_2, \ldots, L_m$ son arcos que se obtienen al hacer alguna partición de la curva L en partes; el origen del arco L_1 coincide con el origen de la curva L, el origen del arco L_{k+1} con el extremo del arco L_k ($k = 1, 2, \ldots, m-1$) y el extremo del arco L_m con el extremo de la curva L.

c)
$$\int_L \sum_{j=1}^{m} C_j f_j(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m} C_j \int_L f_j(z)\,dz. \qquad (1.3:3)$$

Aquí, $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ son funciones definidas y continuas en L, mientras que $C_1, \ldots, C_m$, son constantes complejas.

Cada una de estas tres propiedades se verifica fácilmente, bien pasando a las integrales curvilíneas según la fórmula (1.2:1) o bien, inmediatamente, basándose en la definición de la integral $\int_L f(z)\,dz$ como el límite de la suma integral.

Frecuentemente suele ser necesario acotar superiormente el módulo de la integral. Con este fin, ante todo se usa la desigualdad

d)
$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leqslant \int_L |f(z)|\,ds. \qquad (1.3:4)$$

Aquí $\int_L |f(z)|\,ds$ es la integral curvilínea de la función real (no negativa) continua $|f(z)|$, tomada a lo largo de la curva L, es decir, es el límite: $\lim \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)|\, l_k$, donde l_k es la longitud del arco σ_k, y ζ_k es, como anteriormente, un punto de este arco.

Para demostrar la desigualdad (1.3:4), acotemos el módulo de la suma integral $\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)$. Se tiene:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)|\,|z_{k+1} - z_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)|\, l_k.$$

Pasando a límite en ambos miembros de esta desigualdad, suponiendo que la partición disminuye indefinidamente, resulta:

$$\left| \int_L f(z)\,dz \right| \leqslant \int_L |f(z)|\,ds,$$

como se quería demostrar.

Ordinariamente, la integral que figura en el segundo miembro suele escribirse en la forma $\int_L |f(z)|\,|dz|$. La desigualdad (1.3:4) toma entonces la forma

d′) $$\left| \int_L f(z)\,dz \right| \leqslant \int_L |f(z)|\,|dz|. \qquad (1.3:4')$$

Con más frecuencia que la desigualdad (1.3:4) o (1.3:4′), suele usarse otra acotación más grosera. Supongamos, para esto, que en todos los puntos de la curva L la función $f(z)$ satisface a la desigualdad

$$|f(z)| \leqslant M$$

(aquí se puede tomar por M, por ejemplo, $\max\limits_L |f(z)|$). Entonces, para el módulo de la integral de $f(z)$ obtenemos:

e) $$\left| \int_L f(z)\,dz \right| \leqslant Ml, \qquad (1.3:5)$$

donde l es la longitud de la curva L. Para obtener esta desigualdad es suficiente observar que

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)|\,|z_{k+1} - z_k| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leqslant Ml,$$

y pasar a límites.

Todas las propiedades enumeradas son exactamente análogas a las propiedades correspondientes de las integrales de las funciones reales.

Es necesario señalar una de las propiedades importantes de las integrales de las funciones reales que no se verifica inmediatamente para las integrales de las funciones complejas. Se trata del teorema del valor medio (primer teorema del valor medio), según el cual, en el caso más simple

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(\tau) \int_a^b dt = f(\tau)(b-a),$$

donde $a < \tau < b$ (la función $f(t)$ es continua en el segmento $[a, b]$). De éste, en particular, se deduce que la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ no puede anularse si la función continua $f(t)$ no se anula en ningún punto del intervalo (a, b). Pero esta última conclusión no puede aplicarse a las integrales de las funciones complejas, incluso cuando se limita la integración a un segmento del eje real.

Examinemos, por ejemplo, la integral $\int_L \exp(2\pi i x)\,dx$, tomada a lo largo del segmento del eje real L: $0 \leqslant x \leqslant 1$. Como $\exp(2\pi i x) = \cos 2\pi x + i \operatorname{sen} 2\pi x$, según la fórmula (1.2:3), se tiene:

$$\int_L \exp(2\pi i x)\,dx = \int_0^1 \cos 2\pi x\,dx + i\int_0^1 \operatorname{sen} 2\pi x\,dx = 0.$$

Sin embargo, $\exp(2\pi i x)$ no se anula en ningún punto del segmento L. Por lo tanto, la consecuencia indicada anteriormente del teorema del valor medio no es aplicable a las integrales de las funciones complejas; por esta razón, el mismo teorema del valor medio tampoco es aplicable generalmente a las mismas.

He aquí unos cuantos ejemplos de cálculo de las integrales elementales de las funciones complejas.

1) $$\int_L dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = \lim (z_n - z_0) = Z - z_0,$$

donde z_0 es el punto inicial y Z, el punto final de la curva L.

En particular, si la curva L es cerrada, entonces $Z = z_0$ y la integral se anula:

$$\int_L dz = 0.$$

2) $$\int_L z\,dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_k (z_{k+1} - z_k) = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} (z_{k+1} - z_k).$$

Aquí, para una misma partición de la curva L suponemos una vez que el punto ζ_k coincide con el punto inicial z_k del arco σ_k, y la otra vez, con el punto final z_{k+1} del mismo arco. Como los límites de una y otra sumas integrales son iguales, su media aritmética tendrá el mismo límite:

$$\int_L z\,dz = \frac{1}{2} \lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} + z_k)(z_{k+1} - z_k) = \frac{1}{2} \lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1}^2 - z_k^2) =$$
$$= \frac{1}{2} \lim (z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2} (Z^2 - z_0^2).$$

En particular, si L es una curva cerrada, de nuevo obtenemos que se anula la integral:

$$\int_L f(z)\, dz = 0.$$

3)
$$\int_L \frac{dz}{z-a},$$

donde L: $z = a + r\exp(it)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, es una circunferencia con el centro en a y de radio r, recorrida una vez en dirección positiva.

Hagamos el cálculo por dos métodos distintos.

Para obtener una suma integral que sea lo más simple posible, dividamos L en n arcos iguales por los puntos:

$$z_0 = a + r, \quad z_1 = a + r\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$z_2 = a + r\exp\left(i\frac{4\pi}{n}\right), \quad \ldots, \quad z_{n-1} = a + r\exp\left[i\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$$

y pongamos también

$$z_n = z_0 = a + r.$$

Finalmente, tomemos por puntos ζ_k en los arcos $\widehat{z_k z_{k+1}}$ los puntos medios de estos arcos:

$$\zeta_k = a + r\exp\left[i\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Entonces

$$f(\zeta_k) = \frac{1}{\zeta_k - a} = \frac{1}{r}\exp\left[-i\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

y

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left[-i\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]\left\{\exp\left[i\frac{2(k+1)\pi}{n}\right] - \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\exp\frac{\pi i}{n} - \exp\left(-\frac{\pi i}{n}\right)\right\} = 2i\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = 2in\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.$$

Por consiguiente,

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = \lim_{n\to\infty} 2in\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = 2\pi i \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi i$$

Este mismo resultado puede obtenerse aplicando la fórmula (1.2:5). Se tiene:

$$z=\lambda(t)=a+re^{it}, \quad \lambda'(t)=ire^{it}$$

y, por consiguiente,

$$\int_L \frac{dz}{z-a}=\int_\delta \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt=i\int_\delta dt.$$

Aquí δ designa el segmento del eje real desde 0 hasta 2π. Por lo tanto, $\int_\delta dt=\int_0^{2\pi} dt=2\pi$ y, finalmente,

$$\int_L \frac{dz}{z-a}=2\pi i.$$

§ 2. TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY

2.1. El teorema, cuyo enunciado y demostración daremos ahora, es uno de los fundamentales en la teoría de las funciones analíticas.

Teorema integral de Cauchy. *Si G es un recinto simplemente conexo del plano finito y $f(z)$ es una función uniforme y analítica en este recinto, entonces para cualquier curva rectificable y cerrada L, perteneciente a G, la integral $\int_L f(z)\,dz$ es igual a cero.*

Con ciertas restricciones complementarias, este teorema puede obtenerse fácilmente de la conocida fórmula de Green. Esta fórmula tiene la forma

$$\int_L P(x, y)\,dx-Q(x, y)\,dy=\iint_g \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

donde g es el interior de la curva elemental de Jordan cerrada L, $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones continuas en L y en su interior junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$, y, finalmente, la integral curvilínea en el primer miembro se toma en sentido positivo, es decir, en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.

Escribamos la integral $\int_L f(z)\,dz$ según la fórmula (1.2:1):

$$\int_L f(z)\,dz=\int_L u\,dx-v\,dy+i\int_L v\,dx+u\,dy.$$

Para aplicar a las integrales del segundo miembro la fórmula de Green, exijamos que la curva L sea de Jordan y lisa a trozos, y luego, que las derivadas parciales de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ sean continuas en el recinto G. Como

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y},$$

lo último que se exige equivale a que $f'(z)$ sea continua en el recinto G. Como el recinto G es simplemente conexo y la curva de Jordan cerrada L pertenece a G, el interior de la curva L, es decir, el recinto g, también pertenece a G. Por consiguiente, las derivadas parciales de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ existen y son continuas en todos los puntos de la curva L y en su interior. Según la fórmula de Green, obtenemos:

$$\int_L u\,dx-v\,dy=\iint_g\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

$$\int_L v\,dx+u\,dy=\iint_g\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

y como las expresiones que figuran bajo los signos de las integrales dobles, en virtud de las ecuaciones de D'Alembert-Euler, se anulan, las integrales curvilíneas examinadas también son iguales a cero. Por esta razón es también igual a cero la integral $\int_L f(z)\,dz$.

No obstante, no nos quedaremos satisfechos con el resultado obtenido y nos dedicaremos a demostrar el teorema de Cauchy en la forma que se enunció anteriormente, es decir, sin exigir ni que la derivada de $f(z)$ sea continua, ni que la curva L sea de Jordan y lisa a trozos.

2.2. L e m a. *Si $F(z)$ es una función continua en un recinto G, y Γ es alguna curva rectificable situada en este recinto, entonces para cualquier $\varepsilon>0$ puede asignarse un δ tal, que para cada partición de la curva Γ en arcos de longitud menor que δ, la poligonal respectiva inscrita γ estará contenida en el recinto G, y la diferencia entre las integrales $\int_\Gamma F(z)\,dz$ y $\int_\gamma F(z)\,dz$ será en su valor absoluto menor que ε:*

$$\left|\int_\Gamma F(z)\,dz-\int_\gamma F(z)\,dz\right|<\varepsilon.$$

D e m o s t r a c i ó n. En virtud de la proposición b) del ap. 4.5 del primer capítulo, en el recinto G se puede señalar un conjunto acotado y cerrado E, para el cual todos los puntos de la curva Γ

son interiores; además, existirá un número positivo ρ tal, que cada círculo de radio ρ con el centro en un punto cualquiera de la curva Γ pertenecerá a este conjunto E. Fijando el conjunto E y tomando un número positivo arbitrario ε, determinemos (en virtud de la continuidad uniforme de la función $F(z)$ en el conjunto cerrado E) un $\delta_1 > 0$, tal, que para cualquiera par de puntos z' y z'', que pertenezcan a E y satisfagan a la condición $|z' - z''| < \delta_1$, se cumpla la desigualdad

$$|F(z') - F(z'')| < \frac{\varepsilon}{2l}, \tag{2.2:1}$$

donde l es la longitud de la curva Γ.

Tomemos ahora un número positivo δ tan pequeño, que se cumpla la condición $\delta < \min(\delta, \rho)$. Fijemos una partición cualquiera de la curva Γ cuya máxima longitud de los arcos σ_k ($k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$) sea menor que el δ indicado, y sean ζ_k los puntos que realizan la partición, y γ_k, las cuerdas de los arcos σ_k (ζ_k es el origen y ζ_{k+1}, el extremo de γ_k). Designando con γ la poligonal cuyos lados sucesivos son γ_k, tendremos:

$$\left|\int_\Gamma F(z)\,dz - \int_\gamma F(z)\,dz\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{\sigma_k} F(z)\,dz - \int_{\gamma_k} F(z)\,dz\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\sigma_k} F(z)\,dz - \int_{\gamma_k} F(z)\,dz\right|. \tag{2.2:2}$$

Observando que $\int_{\sigma_k} F(\zeta_k)\,dz = \int_{\gamma_k} F(\zeta_k)\,dz = F(\zeta_k)(\zeta_{k+1} - \zeta_k)$ (véase el ejemplo 1) ap. 1.3), hallaremos:

$$\left|\int_{\sigma_k} F(z)\,dz - \int_{\gamma_k} F(z)\,dz\right| =$$

$$= \left|\int_{\sigma_k} [F(z) - F(\zeta_k)]\,dz - \int_{\gamma_k} [F(z) - F(\zeta_k)]\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{\sigma_k} [F(z) - F(\zeta_k)]\,dz\right| + \left|\int_{\gamma_k} [F(z) - F(\zeta_k)]\,dz\right|. \tag{2.2:3}$$

Las diferencias bajo los signos de las integrales pueden acotarse según la fórmula (2.2:1), puesto que la distancia entre cualquier punto de σ_k o de γ_k y el punto ζ_k es menor que δ_1. Por esta razón,

$$\left|\int_{\sigma_k} F(z)\,dz - \int_{\gamma_k} F(z)\,dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2l}\cdot \text{long. } \sigma_k + \frac{\varepsilon}{2l}\cdot \text{long. } \gamma_k < \frac{\varepsilon}{l}\cdot \text{long. } \sigma_k, \tag{2.2:4}$$

y, por consiguiente, la desigualdad (2.2:2) nos da:

$$\left| \int_{\Gamma} F(z)\, dz - \int_{\gamma} F(z)\, dz \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{l} \cdot \text{long. } \sigma_k = \varepsilon. \qquad (2.2:5)$$

Con esto se termina la demostración del lema.

2.3. Hagamos ahora la propia demostración del teorema integral de Cauchy. Primero lo demostraremos para las líneas poligonales y después, aplicando el lema del ap. 2.2, estudiaremos el caso

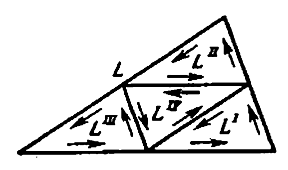


FIG. 45

más general. La demostración misma del teorema para las poligonales cerradas la dividiremos en etapas separadas.

a) B i á n g u l o. Sea L un segmento rectilíneo γ, recorrido dos veces en direcciones opuestas. Entonces

$$\int_{L} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz + \int_{\gamma^-} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz - \int_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

En este caso elemental no tuvimos que recurrir siquiera a la derivabilidad de la función $f(z)$.

b) T r i á n g u l o. Como ya se verá en el proceso de la demostración, este caso es el fundamental, y en él tendremos que basarnos esencialmente en el hecho de que la función $f(z)$ es derivable. Así, pues, sea L el contorno de un triángulo situado en el recinto G, recorrido una vez en una dirección determinada (por ejemplo, en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj). Hagamos:

$$\left| \int_{L} f(z)\, dz \right| = M \ (\geqslant 0).$$

Queremos demostrar que $M = 0$. Dividamos el triángulo, mediante segmentos rectilíneos que unan los puntos medios de sus lados, en cuatro triángulos iguales con los contornos L', L'', L''' y L^{IV} (fig. 45), y formemos la suma de las integrales tomadas sobre L', L'', L''' y L^{IV} en las direcciones señaladas en el dibujo con flechas

(cada una en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj). Obtenemos:

$$\int_{L'} f(z)\,dz + \int_{L''} f(z)\,dz + \int_{L'''} f(z)\,dz + \int_{L^{IV}} f(z)\,dz. \qquad (2.3:1)$$

Cada una de estas cuatro integrales puede sustituirse por la suma de tres integrales, tomadas a lo largo de los lados de los triángulos considerados. Seis de estas integrales, tomadas sobre los segmentos situados sobre L, darán al sumarlas la integral $\int_L f(z)\,dz$. Las otras seis se dividirán en tres pares de integrales, cada par de las cuales se toman sobre un mismo segmento, pero recorridos en direcciones opuestas (estos segmentos no están situados sobre L). Evidentemente, la suma de cada par de éstas es igual a cero. De aquí se deduce que toda la suma (2.3:1) es igual a una sola integral, y como el módulo de la suma no supera a la suma de los módulos de los términos, se tiene:

$$M = \left| \int_L f(z)\,dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{L'} f(z)\,dz \right| + \left| \int_{L''} f(z)\,dz \right| + \left| \int_{L'''} f(z)\,dz \right| + \left| \int_{L^{IV}} f(z)\,dz \right|. \qquad (2.3:2)$$

De la última desigualdad sacamos la conclusión de que al menos uno de los términos del segundo miembro tiene que ser no menor que $\frac{M}{4}$. Designando el circuito correspondiente mediante L_1 (L_1 coincide con L', L'', L''' o L^{IV}), obtenemos:

$$\left| \int_{L_1} f(z)\,dz \right| \geqslant \frac{M}{4}.$$

Hagamos ahora con el triángulo L_1 lo mismo que se hizo anteriormente con el triángulo L, es decir, dividámoslo en cuatro triángulos iguales: L_1', L_1'', L_1''' y L_1^{IV}; observemos que la integral sobre L_1 es igual a la suma de las cuatro integrales sobre L_1', L_1'', L_1''' y L_1^{IV} (tomadas en un mismo sentido: en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj), y, finalmente, saquemos la conclusión de que el módulo de una de estas últimas será no menor que $\frac{1}{4}\frac{M}{4} = \frac{M}{4^2}$. Sea ésta la integral a lo largo de L_2 (L_2 coincide con L_1', L_1'', L_1''' o L_1^{IV}). Entonces, tendremos:

$$\left| \int_{L_2} f(z)\,dz \right| \geqslant \frac{M}{4^2}.$$

Continuando estos razonamientos, obtendremos una sucesión de triángulos con los contornos L_1, L_2, . . ., L_n, . . ., que satisfacen a las siguientes condiciones:

1) Cada triángulo siguiente está contenido en el anterior y se obtiene de éste uniendo con segmentos rectilíneos los puntos medios de dos de sus lados; en particular, de aquí se deduce que la longitud del circuito L_n — designémosla con l_n — es dos veces menor que l_{n-1} y, por consiguiente, $l_n = \frac{l}{2^n}$, donde l es la longitud del circuito L.

2) Cada uno de los triángulos está contenido en el recinto G; esto se debe a que L está contenido en G, por lo cual (como el recinto G es simplemente conexo) el interior de L también tiene que pertenecer a G.

3) La integral de $f(z)$ a lo largo de L_n satisface a la desigualdad

$$\left| \int_{L_n} f(z)\,dz \right| \geqslant \frac{M}{4^n} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.3:3}$$

De la propiedad 1) se deduce que los triángulos considerados «ciñen» a un punto ζ, perteneciente a cada uno de los triángulos (éste puede estar situado en el interior de L_n o sobre L_n)

En virtud de la propiedad 2), el punto ζ pertenece al recinto G. Por consiguiente, según la hipótesis del teorema, la función $f(z)$ posee derivada $f'(\zeta)$ en el punto ζ, y para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un δ tal, que cuando sea $|z - \zeta| < \delta$, se cumpla la desigualdad:

$$\left| \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} - f'(\zeta) \right| < \varepsilon. \tag{2.3:4}$$

Como el punto ζ pertenece a cualquiera de los triángulos considerados y éstos «ciñen» a este punto (las longitudes de los circuitos L_n tienden a cero) resulta que, comenzando desde cierto $n > N$, estos triángulos estarán contenidos por completo en el círculo $|z - \zeta| < \delta$, y, por consiguiente, para todos los puntos z, pertenecientes a L_n, se cumplirá la desigualdad (2.3:4).

Escribámosla en la forma:

$$|f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)| < \varepsilon |z-\zeta|.$$

Observando que la distancia $|z-\zeta|$ entre dos puntos de un mismo triángulo es menor que el perímetro de este triángulo, es decir, es menor que $\frac{l}{2^n}$, obtenemos:

$$|f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)| < \varepsilon \frac{l}{2^n}, \quad z \in L_n, \ n > N. \tag{2.3:5}$$

Hallando ahora la integral de la función $f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)$ a lo largo de la línea cerrada L_n, resulta:

$$\int_{L_n} [f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)]\,dz=$$
$$=\int_{L_n} f(z)\,dz-f(\zeta)\int_{L_n} dz-f'(\zeta)\int_{L_n} z\,dz-\zeta f'(\zeta)\int_{L_n} dz=\int_{L_n} f(z)\,dz. \tag{2.3:6}$$

Aquí hemos aplicado el hecho de que las integrales $\int_{L_n} dz$ y $\int_{L_n} z\,dz$ son iguales a cero (véase los ejemplos 1) y 2) del ap. 1.3). Por consiguiente, en virtud de (2.3:6), (2.3:5) y de la de igualdad (1.3:5), obtenemos:

$$\left|\int_{L_n} f(z)\,dz\right|=\left|\int_{L_n} [f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)]\,dz\right|<\varepsilon\frac{l}{2^n}l_n=$$
$$=\varepsilon\frac{l}{2^n}\frac{l}{2^n}=\varepsilon\frac{l^2}{4^n}. \tag{2.3:7}$$

Como complemento a la desigualdad (2.3:3), donde los números $\frac{M}{4^n}$ se acotaban superiormente por el módulo de la integral sobre L_n, hemos conseguido obtener la desigualdad (2.3:7), donde este módulo se acota superiormente por los números $\varepsilon\frac{l^2}{4^n}$. Confrontando las desigualdades (2.3:3) y (2.3:7), deducimos que

$$M<\varepsilon l^2,$$

o bien, haciendo a ε tender a cero:

$$M\leqslant 0.$$

Pero M no puede ser menor que cero. Por consiguiente,

$$M=\left|\int_L f(z)\,dz\right|=0,$$

con lo cual se termina la demostración del teorema integral de Cauchy para el caso de un triángulo.

c) Ahora estamos en condiciones de considerar el caso en que L sea una poligonal cerrada arbitraria situada en el recinto G. El problema consiste en saber descomponer tal poligonal en triángulos (para los cuales ya está demostrado el teorema).

Comencemos con el caso en que L sea el contorno de un polígono convexo de n lados ($n\geqslant 4$) $A_0A_1\ldots A_{n-1}A_0$, recorrido una vez

en una dirección determinada. Descompongamos el polígono en $n-2$ triángulos mediante diagonales trazadas por el vértice A_0 (fig. 46). Cada uno de estos triángulos pertenece al polígono dado y, por lo tanto, también al recinto G (de nuevo empleamos que el recinto G es simplemente conexo). Por consiguiente, para los triángulos obtenidos es válido el teorema que se demuestra.

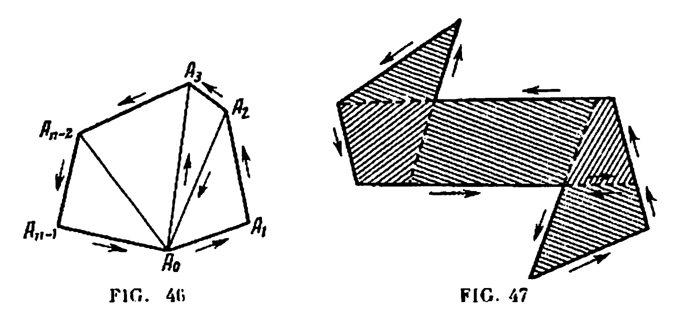


FIG. 46 FIG. 47

Escribamos la integral de $f(z)$ a lo largo de L en la forma siguiente:

$$\int_L = \left(\int_{A_0A_1A_2} + \int_{A_2A_0}\right) + \left(\int_{A_0A_2} + \int_{A_2A_3\ldots A_{n-1}A_0}\right) =$$
$$= \int_{A_0A_1A_2A_0} - \int_{A_0A_2A_3\ldots A_{n-1}A_0} = \int_{A_0A_2A_3\ldots A_{n-1}A_0}$$

(ya que, por lo demostrado, $\int_{A_0A_1A_2A_0} = 0$). Vemos, pues, que la integral sobre el contorno de un polígono convexo de n lados resulta ser igual a la integral sobre el contorno de un polígono convexo de $n-1$ lados. De aquí, reiterando este razonamiento unas cuantas veces, sacamos la conclusión de que esta integral es igual a la integral sobre el contorno del triángulo $A_0A_{n-2}A_{n-1}$, es decir, es igual a cero. Por lo tanto, el teorema queda demostrado también para un polígono convexo arbitrario.

Examinemos el caso en que L sea una poligonal cerrada arbitraria, que no se corte consigo misma y sea recorrida una sola vez. De las hipótesis hechas se deduce que ésta es una curva de Jordan; por esta razón se puede hablar de su interior que, como el recinto G es simplemente conexo, tiene que pertenecer a G. Demostremos que el interior de la poligonal L puede descomponerse en polígonos convexos. Con este fin, observemos que un polígono convexo se

caracteriza por completo con que cada uno de sus lados puede prolongarse en línea recta por cualquiera de sus dos vértices respectivos, sin caer en esta prolongación en el interior del polígono. Por el contrario, entre los lados de un polígono no convexo tiene que haber alguno cuya prolongación caiga en el interior del polígono. Prolonguemos cada uno de tales lados de uno o de los dos métodos posibles dentro de L hasta que nos encontremos de nuevo con L (fig. 47). De esta manera, el polígono inicial quedará descompuesto en un número finito de polígonos, cada uno de los cuales será convexo

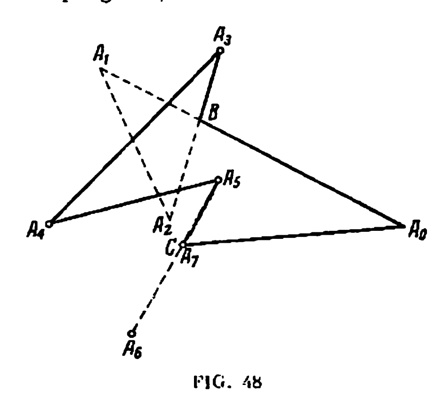


FIG. 48

(puesto que, en virtud de la construcción hecha, ninguno de los lados puede prolongarse dentro del nuevo polígono). Pero la integral sobre cada polígono convexo es igual a cero; por consiguiente, éstos pueden desprenderse uno a uno de todo el polígono sin cambiar el valor de la integral $\int_L f(z)\,dz$. En definitiva obtendremos que en este caso también es igual a cero la integral sobre L.

Supongamos, finalmente, que L es una poligonal cerrada arbitraria. Según la definición, ésta consta de un número finito de lados $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, dados en un orden determinado, de modo que el extremo de cada uno es el origen del siguiente y el extremo del último lado coincide con el origen del primero (ap. 4.1 del capítulo primero). Algunos de los lados pueden tener puntos comunes además de los indicados, es decir, la poligonal puede cortarse consigo misma; además, algunos de los segmentos rectilíneos Δ_k pueden ser partes de otros segmentos o incluso pueden coincidir con ellos. Esto significa que al recorrer la poligonal L, algunos de

los segmentos que la pertenecen pueden describirse parcial o completamente unas cuantas veces (fig. 48).

Para facilitar los razonamientos, los haremos respecto de nuestro dibujo, donde está representada una poligonal compuesta de ocho lados: $\Delta_k = A_kA_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; $A_8 = A_0$), en la cual el lado A_6A_7 forma parte del lado A_5A_6. Empecemos el movimiento sobre L, comenzando desde A_0, hasta que un nuevo lado se encuentre p o r p r i m e r a v e z con uno de los lados ya recorrido. En nuestro caso, tal lado es A_2A_3, que se corta con A_0A_1 en el punto B. Entonces, la poligonal cerrada que se obtiene al recorrer L, comenzando desde el punto B hasta el primer regreso a este punto (en nuestro caso, el triángulo BA_1A_2), representará una curva de Jordan cerrada situada en el recinto G. Por consiguiente, la integral sobre ésta será igual a cero y al excluir de L la poligonal indicada, el valor de la integral a lo largo de L no variará.

Resulta una poligonal L', formada por los lados, escritos por orden, A_0B, BA_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7, A_7A_0. El número de sus vértices y, por consiguiente, de sus lados, es al menos una unidad menor que la cantidad inicial, puesto que la parte despreciada de la poligonal L era por lo menos un triángulo, de modo que fueron despreciados no menos de dos vértices, y en su lugar ha aparecido no más de un nuevo vértice (B).

Podríamos limitarnos a estos razonamientos, si el caso examinado fuese el único posible. Pero existe otra posibilidad más, que se observa en el caso de la poligonal L'. Hagamos de nuevo un recorrido comenzando desde A_0, a lo largo de los lados A_0B, BA_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6. Hasta aquí no encontramos ninguna autointersección. Pero el siguiente lado A_6A_7 va dirigido por el lado A_5A_6, de modo que nos encontramos con puntos interiores de los lados ya recorridos antes, es decir, con puntos de autointersección; sin embargo, ninguno de éstos es el primero (el punto A_6, que es común para dos lados consecutivos A_5A_6 y A_6A_7, no es un punto de autointersección para L').

Debido a esto volvemos hacia atrás por el lado A_5A_6, hasta que nos encontremos con el punto más próximo a A_6 de los dos vértices contiguos A_5 y A_7. En nuestro caso, éste será $C = A_7$. La poligonal cerrada, compuesta de la parte del lado A_5A_6, comenzando desde el punto C hasta el vértice A_6, y de la parte del lado A_6A_7 desde A_6 de nuevo hasta el punto C, representa un biángulo, la integral sobre el cual es igual a cero. Por esta razón se puede excluir esta poligonal de L' sin variar el valor de la integral a lo largo de L'. Resulta una poligonal cerrada L'', formada por los lados, en su orden, A_0B, BA_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5C, CA_0. La cantidad de sus vértices y, por consiguiente, de sus lados, es una unidad menor que para la poligonal L', puesto que junto con el biángulo hemos despreciado un vér-

tice (A_6), sin introducir en su lugar nuevos vértices (C coincide con A_7 o, en otro caso posible, con A_5).

Nuestro razonamiento es de un carácter totalmente general. Después de repetirlo un número finito de veces obtenemos o una poligonal cerrada $L^{(k)}$, que es una curva de Jordan (en nuestro caso, tal es la poligonal L''), o sino un biángulo. En cada uno de estos casos sacamos la conclusión de que la integral a lo largo de la poligonal inicial L es igual a cero.

Así, pues, queda demostrado el teorema para una poligonal cerrada arbitraria. Obsérvese que, extendiendo el teorema desde el caso de un triángulo hasta este último caso, nosotros no empleábamos ningún razonamiento de carácter teórico-funcional. Todos nuestros razonamientos eran exclusivamente de carácter geométrico elemental.

d) Consideremos, finalmente, el caso más general de una curva rectificable y cerrada arbitraria L, perteneciente a un recinto G. En virtud del lema del ap. 2.2, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar una poligonal cerrada γ, inscrita en L y perteneciente al recinto G, tal que las integrales $\int_L f(z)\,dz$ y $\int_\gamma f(z)\,dz$ satisfacen a la condición

$$\left|\int_L f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

Pero, según lo demostrado anteriormente, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$; por consiguiente,

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| < \varepsilon,$$

y como aquí ε es un número positivo arbitrariamente pequeño, se tiene

$$\int_L f(z)\,dz = 0,$$

con lo cual se termina toda la demostración.

En el teorema demostrado el circuito de integración L pertenecía al recinto G en el cual la función $f(z)$ era analítica. Sin embargo, este teorema puede extenderse también al caso en que L represente la frontera de este recinto. Precisamente, se verifica la siguiente proposición.

Si G es el interior de una curva de Jordan cerrada rectificable L y $f(z)$ es una función continua en el recinto cerrado $\overline{G}$, y analítica en

el recinto G, entonces la integral de $f(z)$ sobre L es igual a cero: $\int_L f(z)\,dz = 0.$

En todo su volumen este teorema se demostrará en el quinto capítulo. Aquí nos limitaremos a demostrar un caso particular del mismo, que es suficiente para la mayoría de las aplicaciones. Sea L una curva rectificable tal, que cada rayo que parta de cierto punto z_0 del recinto G se encuentre con ella en un solo punto.

Supongamos que la ecuación de la curva L puede representarse en la forma

$$z = z_0 + \lambda(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

donde θ es el ángulo polar respecto de un sistema polar de coordenadas con el polo en el punto z_0. Entonces, para cualquier ρ, $0 < \rho < 1$, la curva L_ρ: $z = z_0 + \rho\lambda(\theta)$, que es semejante a L respecto del punto z_0, pertenece a G. Debido a esto, en virtud del teorema integral de Cauchy,

$$\int_{L_\rho} f(z)\,dz = 0, \quad 0 < \rho < 1.$$

Si

$$\sum_0^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_0^n f[z_0 + \lambda(\theta_k)][\lambda(\theta_{k+1}) - \lambda(\theta_k)]$$

es la suma integral para la integral $\int_L f(z)\,dz$, entonces, debido a la semejanza de las curvas L_ρ y L, la expresión

$$\sum_0^n f[z_0 + \rho\lambda(\theta_k)]\cdot[\rho\lambda(\theta_{k+1}) - \rho\lambda(\theta_k)]$$

será una suma integral para $\int_{L_\rho} f(z)\,dz$. Por esto, esta última integral puede expresarse también en forma de la integral a lo largo de L:

$$\int_L \rho f[z_0 + \rho\lambda(\theta)]\,dz = 0.$$

Transformemos ahora la integral $\int_L f(z)\,dz$ del modo siguiente:

$$\int_L f[z_0 + \lambda(\theta)]\,dz = \int_L \{f[z_0 + \lambda(\theta)] - \rho f[z_0 + \rho\lambda(\theta)]\}\,dz =$$

$$= \int_L \{(1-\rho) f[z_0 + \lambda(\theta)] + \rho(f[z_0 + \lambda(\theta)] - f[z_0 + \rho\lambda(\theta)])\}\,dz.$$

Hagamos las notaciones: $M = \max_{\bar{G}} |f(z)|$ y $m = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\lambda(\theta)|$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ puede señalarse un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal, que se cumpla la desigualdad

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

para cada par de puntos z', z'' del recinto G que satisfagan a la condición $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$. Por lo tanto, tomando $1 - \rho < \frac{\delta(\varepsilon)}{m}$, tendremos:

$$|f[z_0 + \lambda(\theta)] - f[z_0 + \rho\lambda(\theta)]| < \varepsilon$$

y, por consiguiente,

$$\left| \int_L f(z)\, dz \right| < [(1 - \rho) M + \rho\varepsilon] \cdot \text{long. } L.$$

Tomando aquí $\rho \to 1$, obtenemos:

$$\left| \int_L f(z)\, dz \right| \leq \varepsilon \cdot \text{long. } L,$$

y, finalmente, haciendo $\varepsilon \to 0$, sacamos la conclusión de que

$$\int_L f(z)\, dz = 0,$$

como se quería demostrar.

En particular, se puede tomar por L una circunferencia o cualquier polígono convexo.

Obsérvese que del hecho de que nuestra proposición es justa para cualquier triángulo se deduce, por el método que ya conocemos, que es justa también para cualquier circuito poligonal cerrado sin autointersecciones (no necesariamente convexo).

No obstante, no podemos basarnos en el lema del ap. 2.2 y extender esta proposición al caso de una curva arbitraria de Jordan cerrada y rectificable L, puesto que las poligonales Δ inscritas en ella pueden salir parcialmente fuera de los márgenes del recinto cerrado $\bar{G}$, limitado por la curva L, y, por consiguiente, las integrales $\int_\Delta f(z)\, dz$ carecerían de sentido.

Como ya se ha advertido, la demostración del teorema en todo su volumen se dará más tarde (basándose en otras ideas).

2.4. En los primeros trabajos de Cauchy su teorema servía como un medio para calcular distintas integrales definidas de las funciones de variable real (fundamentalmente integrales impropias).

Para dar una idea de estas aplicaciones del teorema de Cauchy, que dieron vida al mismo teorema, expongamos tres ejemplos.

1. Integrales de Fresnel:

$$\int_0^\infty \cos \xi^2\, d\xi \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} \xi^2\, d\xi.$$

Para calcular estas integrales, que aparecen en la teoría de la difracción, consideremos una función auxiliar de variable compleja $F(z) = e^{iz^2}$. Esta puede considerarse como una función compuesta

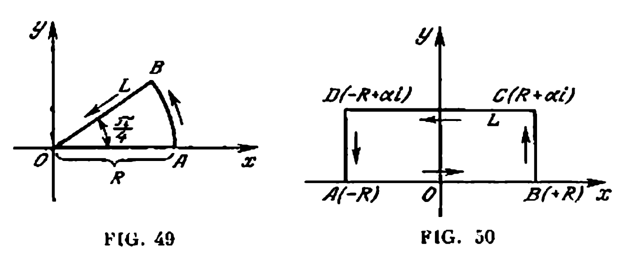


FIG. 49 FIG. 50

$F(z) = \varphi[f(z)]$, donde $f(z) = iz^2$ y $\varphi(\zeta) = e^{\zeta}$. De aquí, según las reglas de derivación de una función compuesta, se deduce que $F(z)$ es derivable en todo el plano y $\frac{dF(z)}{dz} = 2ize^{iz^2}$. Por consiguiente, puede aplicarse el teorema integral de Cauchy.

Tomemos por circuito de integración la línea L de la fig. 49. Esta consta del segmento OA del semieje positivo, de longitud R (R es un número positivo arbitrario), del arco AB de la circunferencia de radio R con el centro en el origen de coordenadas y del segmento BO de la bisectriz del primer ángulo coordenado. Por lo tanto, el ángulo AOB es igual a $\frac{\pi}{4}$. Debido al teorema integral de Cauchy, la integral $\int_L e^{i\zeta^2} d\zeta$ es igual a cero:

$$\int_L e^{i\zeta^2} d\zeta = \int_{OA} e^{i\zeta^2} d\zeta + \int_{AB} e^{i\zeta^2} d\zeta + \int_{BO} e^{i\zeta^2} d\zeta = 0.$$

Pero ζ en OA es igual al número real ξ, por lo cual, $d\zeta = d\xi$ y

$$J_1(R) = \int_{OA} e^{i\zeta^2} d\zeta = \int_0^R e^{i\xi^2} d\xi.$$

En AB, $\zeta = R(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, donde φ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{4}$, por lo cual

$$\zeta^2 = R^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi) \quad \left(0 \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

$$d\zeta = R(-\operatorname{sen}\varphi + i\cos\varphi)\, d\varphi = iR(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi$$

y

$$J_2(R) = \int_{AB} e^{i\zeta^2} d\zeta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left[iR^2(\cos 2\varphi + i\operatorname{sen} 2\varphi)\right] iR(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi.$$

Finalmente, en BO, $\zeta = \rho\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, donde ρ varía desde R hasta 0, por lo cual

$$\zeta^2 = \rho^2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i\rho^2, \quad d\zeta = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) d\rho$$

y

$$J_3(R) = \int_{BO} e^{i\zeta^2} d\zeta = \int_R^0 e^{-\rho^2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) d\rho =$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\int_0^R e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^R e^{-\rho^2} d\rho.$$

Al hacer crecer indefinidamente a R, $J_3(R)$ tenderá al límite

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i), \text{ puesto que } \int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{*)}.$$

---

*) En efecto,

$$\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi\, d\eta = \left(\int_{-R}^{R} e^{-\xi^2} d\xi\right)^2 = 4\left(\int_0^R e^{-\xi^2} d\xi\right)^2. \qquad (\alpha)$$

En el cuadrado con el centro en el origen de coordenadas, cuyos lados, de longitud a $2R$, son paralelos a los ejes de coordenadas, inscribamos un círculo k y circunscribamos un círculo K. Entonces, como la función subintegral es positiva

$$\iint_k e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi\, d\eta < \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi\, d\eta < \iint_K e^{-\xi^2-\eta^2} d\xi\, d\eta,$$

Demostremos que $J_2(R) \to 0$ cuando $R \to \infty$. Para esto, acotemos el módulo $|J_2(R)|$. Se tiene:

$$|J_2(R)| \leqslant R \int_0^{\pi/4} |\exp[iR^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi]| \cdot |\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi| \, d\varphi.$$

Aquí

$$|\exp[iR^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi)]| = \exp(-R^2 \operatorname{sen} 2\varphi)$$

y $|\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi| = 1$; debido a lo cual

$$|J_2(R)| \leqslant R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(-R^2 \operatorname{sen} 2\varphi) \, d\varphi.$$

Pero $\operatorname{sen} 2\varphi \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot 2\varphi$ para $0 \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ *).

---

o bien, sustituyendo las coordenadas cartesianas rectangulares ξ y η por las polares ρ y φ y aplicando la fórmula (α), tendremos:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} e^{-\rho^2}\rho \, d\rho \, d\varphi < 4\left(\int_0^{R} e^{-\xi^2} d\xi\right)^2 < \int_0^{2\pi}\int_0^{R\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho \, d\rho \, d\varphi.$$

Efectuando la integración y extrayendo la raíz cuadrada de todos los miembros de la desigualdad, hallamos:

$$\sqrt{\pi(1-e^{-R^2})} < 2\int_0^{R} e^{-\xi^2} d\xi < \sqrt{\pi(1-e^{-2R^2})},$$

de donde

$$\lim_{R\to\infty} 2\int_0^{R} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \quad \text{o} \quad \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*) En efecto, la función $f(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ decrece en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, puesto que su derivada

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\alpha^2} = \frac{\cos\alpha\,(\alpha - \operatorname{tg}\alpha)}{\alpha^2} < 0$$

cuando $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Por esto mismo $f(\alpha) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, o sea, $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$, o bien

$$\operatorname{sen}\alpha > \frac{2}{\pi}\alpha \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Esta desigualdad se convierte en igualdad para $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Por consiguiente,

$$|J_2(R)| \leqslant R \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{4}{\pi} R^2\varphi\right) d\varphi = R \left.\frac{\exp\left(-\frac{4}{\pi} R^2\varphi\right)}{-\frac{4}{\pi} R^2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{1-e^{-R^2}}{R},$$

de donde se deduce que

$$\lim_{R\to\infty} J_2(R) = 0.$$

Consideremos, finalmente,

$$J_1(R) = \int_0^R e^{i\xi^2} d\xi = \int_0^R \cos \xi^2 \, d\xi + i \int_0^R \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi.$$

Como $J_1(R) + J_2(R) + J_3(R) = 0$ para cualquier R, se tiene que $J_1(R) = -J_2(R) - J_3(R)$ y

$$\lim_{R\to\infty} J_1(R) = -\lim_{R\to\infty} J_2(R) - \lim_{R\to\infty} J_3(R) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i),$$

es decir,

$$\lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R \cos \xi^2 \, d\xi + i \int_0^R \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i).$$

De aquí se deduce, en primer lugar, que existen las integrales

$$\int_0^\infty \cos \xi^2 \, d\xi = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos \xi^2 \, d\xi \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi$$

y, en segundo lugar, que

$$\int_0^\infty \cos \xi^2 \, d\xi = \int_0^\infty \operatorname{sen} \xi^2 \, d\xi = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

2. La integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\alpha x) \, dx \qquad (\lambda > 0, \ \alpha > 0).$$

Para calcularla integraremos la función $f(z)=e^{-\lambda z^2}$ sobre el contorno L del rectángulo representado en la fig. 50. Como esta función es derivable en todo el plano, puede aplicársele el teorema integral. Por consiguiente,

$$\int_L e^{-\lambda\zeta^2}\,d\xi=\int_{AB} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta+\int_{BC} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta+\int_{CD} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta+\int_{DA} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta=0.$$

Sobre AB

$$\zeta=x\ (-R\leqslant x\leqslant R)\ \text{ y }\ d\zeta=dx;$$

por lo tanto,

$$J_1=\int_{AB} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta=\int_{-R}^{+R} e^{-\lambda x^2}\,dx.$$

Sobre BC

$$\zeta=R+iy\quad(0\leqslant y\leqslant\alpha),\quad \zeta^2=R^2+2iRy-y^2\quad\text{y}\quad d\zeta=i\,dy,$$

por lo tanto,

$$J_2=\int_{BC} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta=\int_0^{\alpha}\exp\left[-\lambda\left(R^2+i2Ry-y^2\right)\right]i\,dy=$$

$$=i\int_0^{\alpha}\exp\left[-\lambda\left(R^2-y^2\right)\right]\exp\left(-2Riy\lambda\right)dy.$$

Sobre CD

$$\zeta=x+i\alpha\ (R\geqslant x\geqslant -R),\quad \zeta^2=x^2+2i\alpha x-\alpha^2\quad\text{y}\quad d\zeta=dx,$$

por consiguiente,

$$J_3=\int_{CD} e^{-\lambda\zeta^2}\,d\zeta=\int_{+R}^{-R}\exp\left[-\lambda\left(x^2+2i\alpha x-\alpha^2\right)\right]dx=$$

$$=-e^{\lambda\alpha^2}\int_{-R}^{+R}\exp\left(-\lambda x^2-2i\alpha\lambda x\right)dx=$$

$$=-e^{\lambda\alpha^2}\int_{-R}^{+R} e^{-\lambda x^2}\left[\cos(2\lambda\alpha x)-i\,\mathrm{sen}\,(2\lambda\alpha x)\right]dx.$$

Finalmente, sobre DA

$$\zeta=-R+iy\ (\alpha\geqslant y\geqslant 0),\quad \zeta^2=R^2-2Riy-y^2\quad\text{y}\quad d\zeta=i\,dy;$$

por lo tanto

$$J_4 = \int_{DA} e^{-\lambda\zeta^2}\, d\zeta = \int_{\alpha}^{0} \exp[-\lambda(R^2 - 2Riy - y^2)]\, i\, dy =$$

$$= -i \int_{0}^{\alpha} \exp[-\lambda(R^2 - y^2)] \exp(2Riy\lambda)\, dy.$$

Supongamos ahora que R crece indefinidamente. Entonces las integrales J_2 y J_4 tenderán a cero. En efecto,

$$|J_2| \leqslant \int_{0}^{\alpha} |\exp[-\lambda(R^2 - y^2)]|\, |\exp(-2iR\lambda y)|\, dy = \int_{0}^{\alpha} e^{-\lambda(R^2 - y^2)}\, dy.$$

Cuando $R > \alpha$, obtenemos:

$$|J_2| \leqslant \int_{0}^{\alpha} \exp[-\lambda(R^2 - \alpha^2)]\, dy = \alpha \exp[-\lambda(R^2 - \alpha^2)] \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Del mismo modo

$$|J_4| \leqslant \int_{0}^{\alpha} |\exp[-\lambda(R^2 - y^2)]|\, |\exp 2iR\lambda y|\, dy =$$

$$= \int_{0}^{\alpha} \exp[-\lambda(R^2 - y^2)]\, dy \to 0 \qquad (R \to \infty).$$

La integral J_1, cuando $R \to \infty$, tiende al límite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda x^2)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(\sqrt{\lambda}\, x)^2]\, d(\sqrt{\lambda}\, x) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

$\left(\text{puesto que } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\text{; véase el ejemplo anterior}\right)$.

Finalmente, de la relación

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0$$

obtenemos:

$$e^{\lambda\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} [\cos(2\lambda\alpha x) - i \operatorname{sen}(2\lambda\alpha x)]\, dx =$$

$$= -\lim_{R\to\infty} J_3 = \lim_{R\to\infty} J_1 + \lim_{R\to\infty} J_2 + \lim_{R\to\infty} J_4 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Igualando en esta relación las partes reales, resulta:

$$e^{\lambda a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda a x)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

o sea,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda a x)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,e^{-\lambda a^2}.$$

3. La integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Tomemos la funcion auxiliar $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$. Esta función está definida en el recinto G, formado por todos los puntos del plano,

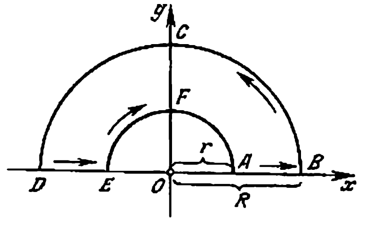


FIG. 51

a excepción del origen de coordenadas, y es derivable en este recinto (nos convencemos de esto último derivando directamente:

$$\left.\frac{df(z)}{dz}=\frac{e^{iz}(iz-1)}{z^2}\right).$$

Tomando el circuito de integración L representado en la fig. 51 (este circuito, así como su interior, está situado en el recinto G), aplicando el teorema integral a la función $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$, hallamos:

$$\int_L\frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta}=\int_{AB}\frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta}+\int_{BCD}\frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta}+\int_{DE}\frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta}+\int_{EFA}\frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta}=0.$$

Sobre AB ζ es igual al número real ξ. Por lo tanto, $d\zeta = d\xi$ y

$$J_1 = \int_{AB} \frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta} = \int_r^R \frac{e^{i\xi}\,d\xi}{\xi} = \int_r^R \frac{\cos\xi\,d\xi}{\xi} + i\int_r^R \frac{\operatorname{sen}\xi\,d\xi}{\xi}.$$

Sobre BCD $\zeta = R(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$, por lo cual $d\zeta = R(-\operatorname{sen}\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi = iR(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi$ y

$$J_2 = \int_{BCD} \frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta} = \int_0^\pi \frac{\exp[iR(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)]\,iR(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi}{R(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} =$$

$$= i\int_0^\pi \exp(iR\cos\varphi - R\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi.$$

Sobre DE ζ es igual al número real ξ; por esta razón, $d\zeta = d\xi$ y

$$J_3 = \int_{DE} \frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta} = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\xi}\,d\xi}{\xi} = \int_{-R}^{-r} \frac{\cos\xi\,d\xi}{\xi} + i\int_{-R}^{-r} \frac{\operatorname{sen}\xi\,d\xi}{\xi}.$$

Sustituyendo aquí la variable de integración ξ por $-\xi$, obtenemos:

$$J_3 = -\int_r^R \frac{\cos\xi\,d\xi}{\xi} + i\int_r^R \frac{\operatorname{sen}\xi\,d\xi}{\xi}.$$

Finalmente, sobre EFA

$$\zeta = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) \quad (\pi \geqslant \varphi \geqslant 0);$$

por lo cual

$$d\zeta = ir(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi$$

y

$$J_4 = \int_{EFA} \frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta} = \int_\pi^0 \frac{\exp[ir(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)]\,ir(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)}{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= -i\int_0^\pi \exp(ir\cos\varphi - r\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi.$$

Supongamos que R crece indefinidamente; entonces

$$J_2 = i\int_0^\pi \exp(iR\cos\varphi - R\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi$$

tenderá a cero. En efecto,

$$|J_2| = \left| \int_0^{\pi} \exp(iR\cos\varphi - R\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} |\exp(iR\cos\varphi - R\,\mathrm{sen}\,\varphi)|\,d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \exp(-R\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi <$$

$$< 2\int_0^{\pi/2} \exp\left(-R\frac{2}{\pi}\varphi\right)d\varphi = \pi\frac{1-e^{-R}}{R} < \frac{\pi}{R},$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{R\to\infty} J_2 = 0$.

Supongamos, finalmente, que r tiende a cero; hallemos el límite de la integral J_4, igual a

$$-i\int_0^{\pi} \exp(ir\cos\varphi - r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi.$$

Como la función $\exp(iz)$ es continua en el punto $z=0$, en el cual toma el valor 1, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal, que para $|z| = r < \delta(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad

$$|\exp(iz) - 1| = |\exp(ir\cos\varphi - r\,\mathrm{sen}\,\varphi) - 1| < \varepsilon.$$

De aquí se deduce que

$$\left| J_4 - \left(-i\int_0^{\pi} 1\cdot d\varphi\right)\right| = \left| \int_0^{\pi} [\exp(ir\cos\varphi - r\,\mathrm{sen}\,\varphi) - 1]\,d\varphi \right| < \pi\varepsilon,$$

o sea,

$$\lim_{r\to 0} J_4 = -i\int_0^{\pi} 1\cdot d\varphi = -\pi i.$$

Volviendo a la relación fundamental

$$\int_L \frac{e^{i\zeta}\,d\zeta}{\zeta} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0,$$

deducimos de ésta que: $J_1 + J_3 = -J_2 - J_4$, o bien, aplicando las expresiones para J_1 y J_3 señalados anteriormente:

$$2i\int_r^R \frac{\mathrm{sen}\,\xi\,d\xi}{\xi} = -J_2 - J_4.$$

Cuando $R \to \infty$ y $r \to 0$, como ya se vio, el segundo miembro tiende al límite: $-\lim_{R\to\infty} J_2 - \lim_{r\to 0} J_4 = \pi i$. Por consiguiente, el primer miembro también tiende al mismo límite:

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} 2i \int_r^R \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} d\xi = \pi i.$$

Designando $\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_r^R \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} d\xi$, cuya existencia hemos demostrado, mediante $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} d\xi$, obtenemos: $2i \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} d\xi = \pi i$, o bien, definitivamente

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

2.5. Hemos demostrado el teorema integral para las funciones analíticas en los recintos simplemente conexos. Fácilmente se observa que este teorema no se extiende sin reserva alguna para los recintos que no son simplemente conexos. Examinemos, por ejemplo, la función $f(z) = \frac{1}{z}$, derivable para cualquier $z \neq 0$. Aquí se puede tomar por recinto G todo el plano finito, excluyendo del mismo el origen de coordenadas. Evidentemente, G no es un recinto simplemente conexo, puesto que el interior de cualquier circunferencia γ con el centro en el origen de coordenadas, perteneciente a G, no pertenece completamente a G. Por otra parte $\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$ (ap. 1.3, ejemplo 3).

Sin embargo, con ciertas restricciones impuestas a las curvas, el teorema integral puede aplicarse también a los recintos G que no son simplemente conexos. Supongamos, en primer lugar, que L es un triángulo perteneciente al recinto G junto con todos sus puntos interiores. Entonces, para cualquier función $f(z)$ uniforme y analítica en el recinto G (que no es simplemente conexo) son aplicables a la integral $\int_L f(z)\, dz$ todos los razonamientos del ap. 2.3, b) y, por consiguiente, $\int_L f(z)\, dz = 0$. Llegaremos a la misma conclusión, con referencias al ap. 2.3, c), cuando L sea una poligonal cerrada arbitraria perteneciente a G tal, que todos los recintos poligonales

limitados por la misma pertenezcan a G. Sea, finalmente, L una curva rectificable cerrada arbitraria, perteneciente a G. Consideremos la integral $\int_L f(z)\,dz$. Según el lema del ap. 2.2, esta integral puede sustituirse por las integrales sobre las poligonales Λ inscritas en Γ y pertenecientes al recinto G, con una precisión $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeña. Si para tales poligonales, de lados suficientemente pequeños, los recintos poligonales limitados por ellas pertenecen

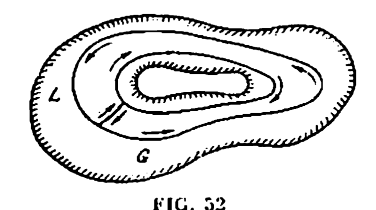


FIG. 52

a G, entonces las integrales correspondientes se anulan y, por consiguiente, también tiene que ser igual a cero la integral a lo largo de L (compárese con el ap. 2.3, d)).

Las condiciones indicadas son suficientes para que la integral de una función analítica $\int_L f(z)\,dz$, tomada a lo largo de una curva rectificable cerrada, perteneciente a un recinto que no es simplemente conexo, sea igual a cero. Estas condiciones se satisfacen cuando L, por ejemplo, pertenece a un recinto g simplemente conexo, que sea un subrecinto respecto de G, y no solamente en este caso. En la fig. 52 está representada una curva L perteneciente a un recinto G biconexo. Evidentemente, no existe un subrecinto simplemente conexo del recinto G que contenga a L. No obstante, para L se cumplen las condiciones expuestas anteriormente y, por consiguiente, $\int_L f(z)\,dz = 0$ para cualquier función $f(z)$ que sea analítica en G.

Teniendo en cuenta las observaciones hechas, no es difícil demostrar que se verifica el siguiente teorema, que aplicaremos a menudo.

T e o r e m a i n t e g r a l p a r a u n s i s t e m a d e c i r c u i t o s. *Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en un recinto arbitrario G y sea Γ, γ_1, γ_2, . . ., γ_n un sistema de curvas de Jordan rectificables y cerradas, que están situadas en el recinto G y satisfacen a las siguientes condiciones:*

a) *las curvas* γ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *pertenecen al interior de* Γ;

b) *para cualquier* k_0 $(k_0 = 1, 2, \ldots, n)$ *las curvas* γ_k *para* $k \neq k_0$ *están situadas en el exterior de* γ_k;

c) *el recinto múltiplemente conexo* g, *limitado por las curvas* $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *(éste se obtiene exluyendo del interior de* Γ *los recintos*

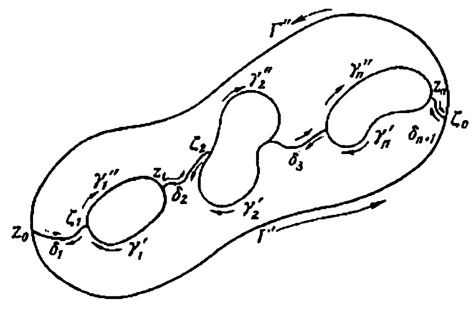


FIG. 53

cerrados limitados por las curvas γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$), *pertenece al recinto* G.

En estas condiciones, se verifica la igualdad

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz, \qquad (2.5:1)$$

donde todas las integrales se toman en un mismo sentido, por ejemplo, de modo que los interiores de las curvas queden a la izquierda del observador que recorre las curvas en dirección de la integración (dirección positiva).

Obsérvese que la tesis del teorema es trivial cuando el recinto G es simplemente conexo, puesto que en este caso todas las integrales en la igualdad (2.5:1) se anulan.

Para demostrar el teorema en el caso general, tracemos en el recinto G unos arcos de Jordan rectificables $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n, \delta'_{n+1}$ que unan consecutivamente un punto z_0 de la curva Γ con un punto ζ_1 de la curva γ_1, luego, un punto $z_1 \neq \zeta_1$ de la curva γ_1 con un punto ζ_2 situado en la curva γ_2, etc, finalmente, un punto z_n de la curva γ_n con un punto $\zeta_0 \neq z_0$ de la curva Γ. Por lo general, estos arcos saldrán parcialmente de los márgenes del recinto g. Pero siempre pueden sustituirse por otros arcos: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n+1}$ que, a excepción de sus extremos, pertenecen por completo al recinto g (fig. 53). Con

este fin, es suficiente, por ejemplo, señalar en el arco δ_1', recorrido en la dirección desde el punto $z_0 \in \Gamma$ hacia el punto ζ_1 situado en γ_1, su último punto de intersección con Γ y su primer punto de intersección con γ_1. La parte del arco δ_1' comprendida entre los puntos indicados será el arco δ_1 que se necesita. Del mismo modo se obtienen también $\delta_2, \ldots, \delta_{n+1}$. Por lo general, arcos distintos δ_k y δ_m $(k \neq m)$ pueden tener puntos de intersección. Pero siempre pueden sustituirse por otros arcos que satisfagan a las condiciones impuestas y carezcan de puntos comunes dos a dos. Aquí no nos detendremos en esto, dejando realizar al lector los razonamientos necesarios. Los puntos iniciales y finales de los arcos $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n+1}$ dividirán a cada una de las curvas $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ en dos partes, que designaremos con la misma letra que la curva entera, pero con una o dos rayitas por encima: $\Gamma', \Gamma'', \gamma_1', \gamma_1'', \ldots, \gamma_n', \gamma_n''$. Consideraremos que el origen de los arcos Γ' y Γ'' es el origen z_0 del arco δ_1 y el extremo, el extremo ζ_0 del arco δ_{n+1}; el origen de los arcos γ_1' y γ_1'' será el extremo ζ_1 del arco δ_1 y el extremo será el origen z_1 del arco δ_2, etc; finalmente, el origen de los arcos γ_n' y γ_n'' será el extremo ζ_n del arco δ_n y el extremo será el origen z_n del arco δ_{n+1}. Los arcos Γ', Γ''; $\gamma_1', \gamma_1''; \ldots; \gamma_n', \gamma_n''$, forman conjuntamente con los arcos $\delta_1, \delta_2, \ldots$ $\ldots, \delta_{n+1}$ dos curvas rectificables de Jordan cerradas. Por ejemplo, una de ellas Λ' estará formada por los arcos Γ', $-\delta_{n+1}$, $-\gamma_n'$, $-\delta_n, \ldots, -\gamma_1', -\delta_1$, mientras que la otra, Λ'' por los arcos $-\Gamma''$, $\delta_1, \gamma_1'', \ldots, \delta_n, \gamma_n''$.

Debido a la construcción, los interiores de las curvas Λ' y Λ'' estarán situados en el recinto g y, por consiguiente, pertenecerán al recinto G. Por lo tanto, puede aplicárseles a éstas el teorema integral de Cauchy:

$$\int_{\Lambda'} f(z)\,dz = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Lambda''} f(z)\,dz = 0.$$

Sumando término a término las igualdades obtenidas y observando que las partes de las integrales sobre los arcos δ_k y $-\delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ se eliminan entre sí, mientras que las partes de las integrales sobre los pares de arcos $\Gamma', -\Gamma'', -\gamma_1', \gamma_1'', \ldots, -\gamma_n', \gamma_n''$ dan las integrales $\int_{\Gamma} f(z)\,dz$, $\int_{-\gamma_1} f(z)\,dz, \ldots, \int_{-\gamma_n} f(z)\,dz$, obtenemos:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{-\gamma_n} f(z)\,dz = 0,$$

o bien,

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

Este es el resultado que se necesitaba.

2.6. Consideremos una función uniforme $f(z)$, analítica en un recinto G simplemente conexo. Sea z_0 un punto fijado del recinto G y L' y L'', dos curvas rectificables situadas en este recinto que unan el punto z_0 con un punto arbitrario z del recinto G. Si se supone que z_0 es el punto inicial y z el punto final de las curvas L' y L'', entonces las curvas L' y $-L''$ formarán conjuntamente una curva rectificable cerrada, sobre la cual la integral de $f(z)$, debido al teorema integral, tendrá que ser igual a cero. Pero esto significa que

$$\int_{L'} f(z)\,dz + \int_{-L''} f(z)\,dz = 0,$$

es decir,

$$\int_{L'} f(z)\,dz = \int_{L''} f(z)\,dz.$$

Así, pues, el valor de la integral de una función analítica $f(z)$ no depende de la curva sobre la cual se efectúe la integración (del camino de integración), sino que depende sólo de los puntos inicial y final de la misma. Por esta razón, para designar la integral se puede emplear la notación

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

omitiendo la indicación del camino de integración y señalando solamente los puntos inicial y final z_0 y z.

Como el punto z_0 está fijado, esta integral representa una función uniforme de z:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

Demostremos que ésta es una función analítica en el recinto G y que su derivada es igual a la función subintegral

$$F'(z) = f(z).$$

Como la función $f(z)$ es continua se puede trazar un entorno U del punto z de modo que, en primer lugar, este entorno pertenezca al recinto G, y, en segundo lugar, para cualquiera de sus puntos ζ se cumpla la desigualdad

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Designemos mediante γ alguna curva rectificable que una z_0 y z por el interior del recinto G, y mediante δ, el segmento rectilíneo que una el punto z con un punto arbitrario ζ del entorno indicado.

Entonces (designando la variable de integración con la letra t), tendremos:

$$F(\zeta)-F(z)=\int_{\gamma+\delta} f(t)\,dt-\int_{\gamma} f(t)\,dt=\int_{\delta} f(t)\,dt$$

y

$$\frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}-f(z)=\frac{\int_{\delta} f(t)\,dt-f(z)(\zeta-z)}{\zeta-z}=$$

$$=\frac{\int_{\delta} f(t)\,dt-f(z)\int_{\delta} dt}{\zeta-z}=\frac{\int_{\delta}[f(t)-f(z)]\,dt}{\zeta-z}.$$

Pero para todos los puntos $t\in\delta$, se tiene:

$$|f(t)-f(z)|<\varepsilon;$$

por consiguiente,

$$\left|\frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}-f(z)\right|=\frac{\left|\int_{\delta}[f(t)-f(z)]\,dt\right|}{|\zeta-z|}\leqslant\frac{\varepsilon\delta}{|\zeta-z|}=\varepsilon\qquad(\zeta\in U)$$

Como ε es arbitrario, de la última desigualdad se deduce que

$$\lim_{\zeta\to z}\frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}=f(z),\text{ es decir } F'(z)=f(z),$$

que es lo que se quería demostrar.

Llamaremos, en general, a una función $\Phi(z)$ primitiva de la función $f(z)$ en el recinto G, si $\Phi(z)$ es analítica en el recinto G y $\Phi'(z)=f(z)$. De lo demostrado se deduce que la integral $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ es una primitiva de $f(z)$.

Demostremos que cualquier primitiva de $f(z)$ puede expresarse en la forma

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz+C,$$

donde C es cierto número complejo (constante arbitraria).

En efecto, sea

$$\Phi(z)-\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz=u(x,y)+iv(x,y)=\varphi(z).$$

Entonces tendremos:

$$\varphi'(z)=\Phi'(z)-f(z)\equiv 0.$$

Por otra parte,

$$\varphi'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

en el recinto G, y como $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones diferenciables de x e y, se tiene:

$$u(x, y)\equiv C_1 \quad \text{y} \quad v(x, y)\equiv C_2,$$

o bien,

$$\varphi(z)\equiv C_1+iC_2=C.$$

Así, pues,

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz+C,$$

como se quería demostrar.

Poniendo aquí $z=z_0$, obtenemos:

$$\Phi(z_0)=C.$$

Por consiguiente,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz=\Phi(z)-\Phi(z_0)$$

Hemos obtenido la expresión de la integral de una función analítica de variable compleja mediante una primitiva arbitraria de $f(z)$. De aquí se deducen numerosas fórmulas para las integrales de las funciones elementales, que tienen la misma forma que las fórmulas correspondientes para las funciones de variable real. Así, por ejemplo, $\int_{z_0}^{z} z^n\,dz=\frac{z^{n+1}-z_0^{n+1}}{n+1}$ (n es un número entero, diferente de -1):

$$\int_{z_0}^{z} \exp z\,dz=\exp z-\exp z_0;$$

$$\int_{z_0}^{z} \cos z\,dz=\operatorname{sen} z-\operatorname{sen} z_0;$$

$$\int_{z_0}^{z} \operatorname{sen} z\,dz=\cos z_0-\cos z,$$

etc.

2.7. Supongamos ahora que G es un recinto que no es simplemente conexo y que $f(z)$ es una función uniforme y analítica en este recinto. Fijando algún punto z_0 de este recinto, consideremos dos curvas rectificables L' y L'' que unan z_0 con un punto arbitrario z del recinto G. Generalmente, no se puede afirmar que las integrales $\int\limits_{L'} f(z)\,dz$ y $\int\limits_{L''} f(z)\,dz$ sean iguales entre sí.

En efecto, tal afirmación sería equivalente a decir que la integral de $f(z)$ sobre la curva cerrada $L' - L''$ es igual a cero, cosa que para las curvas pertenecientes a un recinto múltiplemente conexo, puede no cumplirse.

Designando como anteriormente la integral $\int\limits_{L} f(z)\,dz$, tomada a lo largo de la curva que une los puntos z_0 y z, mediante $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$, podemos considerarla de nuevo como una función del límite superior de integración:

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z). \tag{2.7:1}$$

Pero esta vez la función $F(z)$ será multiforme (puesto que sus valores, por lo general, variarán conjuntamente con el camino de integración). Cerciorémonos de que en cualquier recinto g simplemente conexo, perteneciente a G, se pueden elegir ramas uniformes y continuas de la función (2.7:1), que serán en este recinto diversas primitivas de $f(z)$ y, por consiguiente, se diferenciarán una de otra en constantes aditivas. Con este fin, fijemos uno de los valores de $F(z)$ en cierto punto $z_1 \in g$, es decir, fijemos un camino de integración L que una z_0 y z_1 en el recinto G, e integremos después $f(z)$ sobre todas las curvas rectificables l posibles, que unan dentro del recinto g el punto z_1 con todos los puntos posibles de este recinto. Obtendremos el valor de $F(z)$ en la forma

$$F(z) = \int\limits_{L} f(z)\,dz + \int\limits_{l} f(z)\,dz.$$

El segundo término del segundo miembro de esta fórmula es la integral de la función uniforme y analítica $f(z)$, tomada sobre la curva l, perteneciente al recinto simplemente conexo g que une z_1 y z. Según el ap. 2.6, ésta es una función uniforme de z, que representa una de las primitivas de $f(z)$ en el recinto g.

Hagamos

$$\int_{l} f(z)\,dz = \varphi(z).$$

Entonces tendremos una rama uniforme de la función $F(z)$ en el recinto g de la forma siguiente:

$$F(z) = \int_{L} f(z)\,dz + \varphi(z). \tag{2.7:2}$$

Aquí, el primer sumando representa uno de los valores de $F(z)$ en el punto $z_1 \in g$. Variándolo de todos los modos posibles, obtendremos distintas ramas uniformes de la función $F(z)$ en el recinto g que, por lo tanto, se diferenciarán una de otra en constantes aditivas y serán distintas primitivas de $f(z)$ en el recinto g.

Obsérvese que los valores de las ramas (2.7:2) obtenidas agotan todos los valores posibles de la integral $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ sobre todas las curvas del recinto G que unen el punto z_0 con un punto arbitrario z del recinto g. En efecto, sea Λ una curva rectificable arbitraria del recinto G que una z_0 con z, y sea λ cualquier curva rectificable del recinto g que una z_1 con z. Entonces, tendremos:

$$\int_{\Lambda} f(z)\,dz = \int_{\Lambda} f(z)\,dz - \int_{\lambda} f(z)\,dz + \int_{\lambda} f(z)\,dz = \int_{\Lambda+(-\lambda)} f(z)\,dz + \int_{\lambda} f(z)\,dz.$$

Aquí $\Lambda+(-\lambda)$ es una curva rectificable del recinto G que une z_0 con z_1; designémosla con L. La integral $\int_{\lambda} f(z)\,dz$ es el valor de la función $\varphi(z)$ en el punto z. Por lo tanto,

$$\int_{\Lambda} f(z)\,dz = \int_{L} f(z)\,dz + \varphi(z),$$

es decir, cualquier valor de la integral $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ coincide con el valor en el punto z de una de las ramas uniformes (2.7:2).

Supongamos, por ejemplo, que G es el plano del cual se han excluido los puntos 0 y ∞, y $f(z) = \frac{1}{z}$. Tomemos por recinto simplemente conexo g, por ejemplo, el plano del cual se ha excluido la parte no positiva del eje real: $x \leqslant 0$, $y = 0$; sea, finalmente, $z_1 = z_0 = 1$.

Entonces tendremos:

$$F(z) = \int_L \frac{dz}{z} + \varphi(z), \quad \text{donde} \quad \varphi(z) = \int_1^z \frac{dz}{z}$$

y la integración se efectúa sobre curvas situadas por completo en el recinto g, mientras que L es una curva rectificable cualquiera del recinto G que comienza en el punto z_0 y termina en el punto $z_1 = z_0$, es decir, es una curva rectificable cerrada.

Según el ap. 2.6, $\varphi(z)$ se expresa mediante cualquier primitiva $\Phi(z)$ de la función $\frac{1}{z}$ en el recinto g por la fórmula

$$\varphi(z) = \Phi(z) - \Phi(1).$$

Se puede tomar por primitiva cualquier rama uniforme del logaritmo en el recinto g, por ejemplo, la rama que toma el valor 0 en el punto $z = 1$. Esta rama representa el valor principal del logaritmo:

$$\Phi(z) = \ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Por consiguiente,

$$\varphi(z) = \Phi(z) - \Phi(1) = \ln z$$

y

$$F(z) = \int_L \frac{dz}{z} + \ln z.$$

Tomemos por L la circunferencia unidad γ, recorrida n veces en la dirección positiva o negativa. Como al recorrer una vez en la dirección positiva la integral correspondiente es igual a $2\pi i$ (véase el ejemplo 3 en el ap. 1.3), resulta

$$\int_L \frac{dz}{z} = \int_{\pm n\gamma} \frac{dz}{z} = \pm\left(\int_\gamma \frac{dz}{z} + \ldots + \int_\gamma \frac{dz}{z}\right) = \pm 2n\pi i,$$

y obtenemos:

$$F(z) = \ln z \pm 2n\pi i.$$

Aquí n es diferente de cero; si se toma por L alguna curva rectificable de Jordan cerrada del recinto G que no contenga en su interior al origen de coordenadas, entonces a la integral $\int_L \frac{dz}{z}$ puede aplicársele el teorema integral y obtenemos: $\int_L \frac{dz}{z} = 0$. Así, pues, como valores de la integral $\int_L \frac{dz}{z}$ puede resultar cualquier entero múltiplo

de $2\pi i$, y obtenemos definitivamente las siguientes ramas uniformes de $F(z)$ en el recinto g:

$$F(z) = \ln z + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Como la curva cerrada L del recinto G, que pasa por el punto 1, y la curva l que une el punto 1 con el punto z del recinto g, forman conjuntamente una curva rectificable del recinto G, que une 1 con z, en lugar de $F(z)$ se puede escribir simplemente $\int_1^z \frac{dz}{z}$. El segundo miembro de la fórmula da todos los valores del logaritmo $\operatorname{Ln} z$ en el punto z. Por consiguiente,

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z \qquad (z \in g).$$

Aquí vemos que todos los valores de $\operatorname{Ln} z$ en cualquier punto z del recinto g pueden obtenerse integrando la función $\frac{1}{z}$ a lo largo de las curvas correspondientes del recinto G, que se diferencian entre sí por la cantidad y dirección de recorridos alrededor del origen de coordenadas.

En este ejemplo los puntos de la parte negativa del eje real pertenecían a la frontera del recinto g y por esta razón se excluían. Sin embargo, en lugar del recinto g se podría haber tomado el recinto g' cuya frontera es, por ejemplo, la parte no positiva del eje imaginario: $y \leqslant 0$, $x = 0$, pudiendo repetir los razonamientos precedentes. De nuevo obtendríamos el conjunto de ramas uniformes de la integral $\int_1^z \frac{dz}{z}$, que coincide en g' con todas las ramas uniformes del $\operatorname{Ln} z$. En otras palabras,

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z \qquad (z \in g').$$

En este caso los puntos de la parte negativa del eje real serán puntos interiores del recinto g' y no se excluyen.

Hemos verificado ahora que en cualquier punto finito del plano z, distinto del origen de coordenadas, todos los valores de $\operatorname{Ln} z$ pueden obtenerse en forma de la integral de la función $\frac{1}{z}$, tomada sobre cierto camino rectificable que una los puntos 1 y z. Por lo tanto, la multiplicidad del logaritmo encuentra su significado en la multiplicidad de la integral, que puede tomar diferentes valores a lo largo de distintos caminos que unan 1 con z.

A todo lo dicho hay que agregar aún que todas las ramas uniformes de la integral $\int_1^z \frac{dz}{z}$ (en los recintos del tipo g, g' u otros subrecintos simplemente conexos del recinto G) se agotan con las ramas respectivas de Ln z.

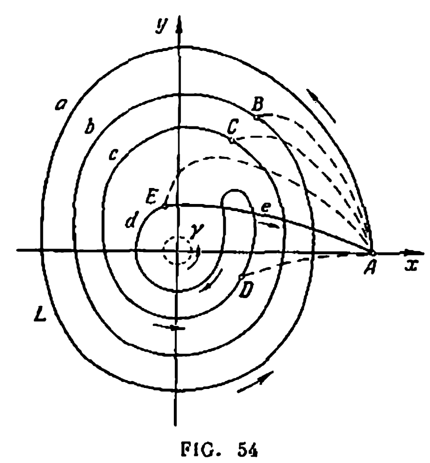


FIG. 54

Para precisar, consideremos el caso del recinto g. Todas las ramas uniformes de $\int_1^z \frac{dz}{z}$ se expresan en este caso por la fórmula (2.7:2), que toma la forma:

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_L \frac{dz}{z} + \ln z,$$

donde L es una curva rectificable cerrada arbitraria del recinto G, que pasa por el punto 1. Para obtener lo que se afirma hay que demostrar que la integral $\int_L \frac{dz}{z}$, para cualquier curva rectificable cerrada L, es igual a un entero múltiplo de $2\pi i$. Limitémonos a estudiar un caso particular, que aclarará suficientemente la esencia del asunto. Sea L la curva cerrada representada en la fig. 54. Agreguemos a L los arcos auxiliares AB, AC, AD y AE, recorridos cada uno

dos veces en direcciones opuestas. Resulta:

$$\int_L \frac{dz}{z} = \int_{AaBA} \frac{dz}{z} + \int_{ABbCA} \frac{dz}{z} + \int_{ACcDA} \frac{dz}{z} + \int_{ADdEA} \frac{dz}{z} + \int_{AEeA} \frac{dz}{z}.$$

Aplicando a cada una de las cuatro curvas cerradas, sobre las cuales se toman las primeras cuatro integrales del segundo miembro, y a la circunferencia γ con el centro en el origen de coordenadas, el teorema integral para el caso de un sistema de curvas (en el caso dado, de un sistema de dos curvas), obtenemos:

$$\int_L \frac{dz}{z} = 2\pi i + 2\pi i + 2\pi i - 2\pi i + \int_{AEeA} \frac{dz}{z}.$$

Obsérvese también que la integral $\int_{AEeA} \frac{dz}{z}$, en virtud del teorema integral de Cauchy, es igual a cero. Por consiguiente,

$$\int_L \frac{dz}{z} = 2 \cdot 2\pi i.$$

Hemos obtenido un entero múltiplo de $2\pi i$. Evidentemente, el razonamiento hecho es de carácter general.

§ 3. INTEGRAL DE CAUCHY. FORMULAS DE Y. SOJOTSKI

3.1. *Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en el recinto G y sea L una curva rectificable de Jordan cerrada, perteneciente a este recinto conjuntamente con su interior g. En estas condiciones se verifica la siguiente fórmula* (que es la fundamental para toda la teoría de las funciones analíticas):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (z \in g). \qquad (3.1:1)$$

Esta se llama fórmula integral de Cauchy, y la integral que figura en el segundo miembro, integral de Cauchy. Para la integral de Cauchy son característicos dos síntomas:

1) ésta se toma sobre una curva rectificable de Jordan cerrada L;

2) la función subintegral es de la forma $\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ (el factor $\frac{1}{2\pi i}$ se saca fuera de la integral), donde $f(z)$ es una función analítica en un recinto al cual pertenece la curva L conjuntamente con su interior.

Para demostrar la fórmula (3.1:1) describamos desde el punto z, como centro, una circunferencia γ_ρ de un radio ρ tan pequeño que

quede contenida en el interior de L. Consideremos la función $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ como una función de ζ en el recinto G' que se obtiene de G excluyendo el punto z. Evidentemente, $\varphi(\zeta)$ está definida en todo el recinto G' y, como el cociente de dos funciones derivables, es derivable.

Apliquemos a la función $\varphi(\zeta)$ y a las curvas L y γ_ρ el teorema integral para un sistema de circuitos. Resulta:

$$\int_L \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_\rho} \varphi(\zeta)\, d\zeta,$$

o bien,

$$\int_L \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{3.1:2}$$

La fórmula (3.1:1) quedará demostrada si conseguimos verificar la relación

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z). \tag{3.1:3}$$

Por lo tanto, en lugar de la curva dada L podemos considerar en la demostración de la fórmula (3.1:1) una circunferencia de radio arbitrariamente pequeño ρ con el centro en z.

Como de la fórmula (3.1:2) se deduce que el valor de la integral $\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$ no varía al disminuir el radio, se tiene:

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

y, por consiguiente, en vez de demostrar (3.1:3) es suficiente verificar la igualdad

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z), \tag{3.1:4}$$

es decir, demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para $\rho < \delta(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i f(z) \right| < \varepsilon. \tag{3.1:5}$$

Observando que $\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$ (véase el ejemplo 3 del ap. 1.3), representemos la expresión del primer miembro de la fórmula (3.1:5) en la forma

$$\left| \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| = \left| \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| .$$

Como $f(z)$ es continua, el módulo de la diferencia $| f(\zeta) - f(z) |$ puede hacerse menor que $\frac{\varepsilon}{2\pi}$ si $| \zeta - z | = \rho < \delta(\varepsilon)$. En estas condiciones tendremos:

$$\left| \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z) \right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2\pi}}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon,$$

con lo cual se termina toda la demostración.

Al aplicar la fórmula de Cauchy (3.1:1) hay que tener presente las condiciones en las cuales se demostró y, en particular, hay que recordar que el punto z tiene que pertenecer al interior del circuito L. Si en la integral de Cauchy se pone algún punto z perteneciente al exterior del circuito L, ésta se anula. En efecto, si el punto z está situado en el exterior del circuito L, entonces la función $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, considerada como función de ζ, es derivable en todos los puntos del recinto G (a excepción, posiblemente, del punto $\zeta = z$), y como la curva L conjuntamente con su interior pertenecen a este último recinto, según el teorema integral de Cauchy, la integral de $\varphi(\zeta)$, tomada a lo largo de L, tiene que ser igual a cero.

En resumen,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

si z pertenece al exterior del circuito L.

Sea z un punto arbitrario del recinto G y sea γ_ρ una circunferencia de radio ρ con el centro en este punto y contenida en el recinto conjuntamente con su interior. Según la fórmula (3.1:1), se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} .$$

Como la ecuación de la circunferencia γ_ρ es

$$\zeta = z + \rho e^{i\theta} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

la fórmula precedente puede transformarse a la forma siguiente (véase la fórmula (1.2:5)):

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+\rho e^{i\theta})\cdot\rho e^{i\theta}\cdot i d\theta}{\rho e^{i\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta})\,d\theta. \qquad (3.1:6)$$

El enunciado de esta última fórmula dice: *el valor de una función analítica en cualquier punto del recinto G es la media aritmética (el promedio) de sus valores, tomados sobre cualquier circunferencia* γ_ρ *con el centro en* z.

Hagamos la notación

$$\max_{\gamma_\rho}|f(\zeta)|=M(\rho).$$

Entonces, de la fórmula (3.1:6), tendremos:

$$|f(z)|\leqslant M(\rho). \qquad (3.1:7)$$

Como la función $f(\zeta)$ es continua en la circunferencia γ_ρ, el valor $M(\rho)$ se alcanza en algún punto de esta circunferencia. Como su radio puede tomarse lo más pequeño que se quiera, de la desigualdad (3.1:7) se deduce que en cualquier entorno del punto $z\in G$ existirán otros puntos en los cuales el módulo de la función analítica será no menor que su módulo en el punto z. Por lo tanto, *el módulo de una función analítica en el recinto G no puede tener un máximo estricto en ningún punto del recinto.* Tal es el contenido del denominado *principio del módulo máximo*, que lo completaremos esencialmente más adelante (ap. 6.2) demostrando que, si $f(z)\not\equiv$ const, el módulo máximo no estricto tampoco puede alcanzarse en un punto interior del recinto.

3.2. En la teoría de las funciones desempeña un papel importante una generalización de la integral de Cauchy, denominada integral de tipo Cauchy. Así se llama la integral de la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \qquad (3.2:1)$$

donde Γ es alguna curva rectificable (no necesariamente cerrada), $\varphi(\zeta)$ es una función continua en Γ, y z es un punto no situado en Γ. Evidentemente, la integral de Cauchy es un caso particular de la integral de tipo Cauchy. Precisamente la expresión (3.2:1) se convierte en integral de Cauchy si se cumplen las condiciones 1) y 2) del ap. 3.1.

Veamos algunos ejemplos de integrales de tipo Cauchy que no son integrales de Cauchy:

a) $\frac{1}{2\pi i}\int_\delta\frac{f(x)\,dx}{x-z}$,

donde $f(x) \neq 0$ es una función de variable real, continua en un segmento δ del eje real, sobre el cual se toma la integral. En particular, señalemos la integral de tipo Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x-z}$;

$$\text{b)}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\bar{\zeta}\,d\zeta}{\zeta-z}; \qquad \text{c)}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^{-2}\,d\zeta}{\zeta-z}.$$

Proponemos al lector explicar en cada uno de estos ejemplos por qué la integral correspondiente no es integral de Cauchy.

Evidentemente, la integral de tipo Cauchy determina una función uniforme $F(z)$ en todo recinto G que no contenga ningún punto de la curva Γ. Demostremos que *esta función posee derivadas de orden cualquiera* (es decir, es infinitamente derivable) *en el recinto G, y que su derivada de cualquier orden n puede obtenerse derivando n veces la función subintegral respecto de z*:

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}. \qquad (3.2:2)$$

La demostración la haremos por inducción. En virtud de la definición de la función $F(z) = F^{(0)}(z)$, la fórmula (3.2:2) es válida para $n = 0$ (recuérdese que $0! = 1$). Supongamos que la fórmula (3.2:2) ya está demostrada para un entero n no negativo, y demostrémosla para $n + 1$. La demostración se hará calculando directamente la derivada de $F^{(n)}(z)$, es decir, hallando el límite:

$$\lim_{z'\to z}\frac{F^{(n)}(z') - F^{(n)}(z)}{z'-z}.$$

Tomemos un círculo cerrado k: $|z' - z| \leqslant \rho$, perteneciente al recinto G. Sea $\delta > 0$ la distancia entre su circunferencia y la curva Γ. Supongamos que K: $|z| < R$ es un círculo con el centro en el origen de coordenadas que contiene en su interior tanto al círculo k como a la curva Γ. Para un punto $z' \in k$, se tiene:

$$F^{(n)}(z)' - F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\varphi(\zeta)\frac{(\zeta-z)^{n+1}-(\zeta-z')^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+1}(\zeta-z')^{n+1}}\,d\zeta,$$

o bien, haciendo $\zeta - z = t$, $z' - z = h$ y, por consiguiente, $\zeta - z' = t - h$:

$$\frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\varphi(\zeta)\frac{(t-h)^n + t(t-h)^{n-1} + \ldots + t^n}{t^{n+1}(t-h)^{n+1}}\,d\zeta.$$

$$(3.2:3)$$

Queremos demostrar que la expresión (3.2:3), cuando $h \to 0$, tiende a un límite igual a

$$\psi(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \frac{1}{t^{n+2}}\, d\zeta. \qquad (3.2:4)$$

Consideremos la diferencia

$$\frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} - \psi(z) =$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \frac{t(t-h)^n + t^2(t-h)^{n-1} + \ldots + t^{n+1} - (n+1)(t-h)^{n+1}}{t^{n+2}(t-h)^{n+1}}\, d\zeta =$$

$$= \frac{n!\,h}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \frac{(t-h)^n + [t+(t-h)](t-h)^{n-1} + \ldots + [t^n + t^{n-1}(t-h) + \ldots + (t-h)^n]}{t^{n+2}(t-h)^{n+1}}\, d\zeta. \qquad (3.2:5)$$

En nuestras condiciones

$$2R > |t| = |\zeta - z| > \delta, \qquad 2R > |t-h| = |\zeta - z'| \geqslant \delta.$$

Supongamos que $\mu = \max\limits_\Gamma |\varphi(\zeta)|$ y que λ es la longitud de Γ; de (3.2:5) obtenemos:

$$\left| \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} - \psi(z) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n!\,|h|}{2\pi} \mu \frac{(2R)^n + 2(2R)^n + 3(2R)^n + \ldots + (n+1)(2R)^n}{\delta^{2n+3}} \lambda.$$

Pero, evidentemente, el segundo miembro tiende a cero cuando $h \to 0$. Por consiguiente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} = F^{(n+1)}(z) = \psi(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+2}},$$

con lo cual se termina la demostración.

Del teorema demostrado se deducen unas consecuencias importantes:

a) *Toda función de variable compleja, analítica en un recinto G, es infinitamente derivable en este recinto.*

En efecto, sea $f(z)$ una función analítica en el recinto G; supongamos que z_0 es algún punto de este recinto y que γ es una circunferencia con el centro en el punto z_0, perteneciente al recinto G conjuntamente con todos sus puntos situados en el interior de γ.

Aplicando a $f(z)$ y a γ la fórmula integral de Cauchy, obtenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \qquad (3.2:6)$$

Así, pues, $f(z)$ se representa en el interior de γ por la integral de Cauchy (y, por lo tanto, por la integral de tipo Cauchy). De aquí, por lo demostrado anteriormente, se deduce que $f(z)$ es indefinidamente derivable en el interior de γ y que

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (3.2:7)$$

Claro, en los razonamientos expuestos, en lugar de la circunferencia γ se podría haber tomado una curva rectificable de Jordan cerrada arbitraria L, perteneciente al recinto G conjuntamente con su interior g. Entonces, para cualquier punto $z \in g$ tendremos:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (3.2:8)$$

b) *Las derivadas de cualquier orden de una función $f(z)$ que es analítica en un recinto G, también son analíticas en este recinto.*

Esto se deduce de que, según lo demostrado, cada función $f^{(n)}(z)$ es derivable en el recinto G.

c) Teorema de Morera. *Toda función $f(z)$, uniforme y continua en un recinto simplemente conexo G, tal que la integral de $f(z)$ tomada sobre cualquier circuito triangular Δ, situado en el recinto, es igual a cero, es analítica en este recinto.*

De las condiciones del teorema se deduce que la integral de $f(z)$ sobre cualquier circuito poligonal, perteneciente al recinto G, y luego, sobre cualquier circuito rectificable cerrado, es igual a cero (compárese con la demostración del teorema integral de Cauchy). Por lo tanto, el teorema de Morera es el recíproco del teorema integral de Cauchy.

Para demostrar el teorema examinemos la integral

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz=F(z).$$

En virtud de lo dicho, ésta representa una función uniforme en el recinto G y pueden aplicarse todos los razonamientos del ap. 2.6, según los cuales $F(z)$ es una función analítica, cuya derivada coincide con $f(z)$:

$$F'(z)=f(z).$$

Pero acabamos de ver que la derivada de una función analítica también es analítica. Así, pues, $f(z)$ es una función analítica y con esto se termina la demostración.

d) Volvamos a examinar la fórmula (3.2:7) y hagamos en ella $z=z_0$ (z_0 es el centro de la circunferencia γ). Si ρ es el radio y

y $M(\rho) = \max_{\gamma} |f(z)|$, entonces para el módulo de la derivada de orden n en el punto z_0 resulta la siguiente cota:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!\,M(\rho)}{2\pi\rho^{n+1}}\,2\pi\rho = \frac{n!\,M(\rho)}{\rho^n}.$$

Evidentemente, este resultado es válido también para $n = 0$ (en este caso se obtiene la desigualdad conocida (3.1:7)).

Así, pues, en cualquier punto z del recinto G se verifican las desigualdades

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant n!\,\frac{M(\rho)}{\rho^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.2:9}$$

Aquí ρ designa el radio de una circunferencia arbitraria γ con el centro en el punto z, contenida en el recinto G conjuntamente con todos sus puntos interiores, y $M(\rho)$ es el máximo del módulo de la función en γ. Las desigualdades (3.2:9) desempeñan un papel capital en la teoría de las funciones. Estas se llaman d e s i g u a l d a d e s d e C a u c h y.

La cota dada por las desigualdades (3.2:9) para n y z dados, depende de la magnitud ρ, que se puede tomar arbitrariamente entre los límites $0 < \rho < \Delta$, donde Δ es la distancia desde el punto z hasta la frontera del recinto G.

Cuando se necesita una cota más exacta, se busca el mínimo de la función $\frac{M(\rho)}{\rho^n}$ y se toma precisamente tal valor de ρ para el cual esta función tome el valor mínimo. Para ilustrar esto, supongamos que G es el círculo unidad $|z| < 1$, y que el punto z en el cual se acotan las derivadas es el centro del círculo $z = 0$, y, finalmente, que $M(\rho) = \max_{|z|=\rho} |f(z)|$ satisface a la desigualdad

$$M(\rho) \leqslant \frac{4}{1-\rho}.$$

Entonces, por la desigualdad (3.2:9), se tiene:

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n!\,\frac{1}{(1-\rho)\rho^n} \qquad (0 < \rho < 1),$$

y para obtener la cota óptima se debe buscar el mínimo de la función $\frac{1}{(1-\rho)\rho^n}$, o sea, el máximo de la función $(1-\rho)\rho^n$ en el intervalo $(0, 1)$. Aplicando las reglas corrientes del cálculo diferencial hallaremos que el extemo buscado se alcanza para $\rho = \frac{n}{n+1}$ y es igual a $(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e\,(n+1)$. Por consiguiente, para cualquier

$n = 1, 2, 3, \ldots$ se tiene:

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant e\,(n+1)!.$$

En el caso particular, cuando $f(z) = \frac{1}{1-z}$ (esta función es analítica en el círculo unidad, y para ella $M(\rho) = \frac{1}{1-\rho}$), mediante un cálculo directo obtenemos:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \quad \text{y} \quad f^{(n)}(0) = n!.$$

La importancia de las desigualdades de Cauchy consiste en que permiten señalar cotas para las derivadas de una función analítica (no importa que sean elevadas) basándose en el solo conocimiento del valor máximo del módulo de la función $M(\rho)$.

Fijando $\rho < \Delta$ en las desigualdades (3.2:9), escribámoslas en la forma

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} \leqslant \frac{\sqrt[n]{M(\rho)}}{\rho}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M(\rho)} = 1$, de aquí se deduce que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} \leqslant \frac{1}{\rho}$$

(la notación $\overline{\lim}$ designa, como ordinariamente, el límite superior de una sucesión de números reales).

Como en esta desigualdad en lugar de ρ se puede tomar cualquier número positivo menor que Δ, pasando al límite cuando $\rho \to \Delta$ obtenemos:

$$\Lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} \leqslant \frac{1}{\Delta}. \qquad (3.2:10)$$

Esta desigualdad, denominada desigualdad de Cauchy-Hadamard, muestra que la magnitud Λ, que depende de los valores de las derivadas de la función analítica en un punto del recinto G, está ligada con la distancia Δ desde este punto z hasta la frontera del recinto. Esta ligazón se expresa en que el número Λ no puede ser grande allí donde Δ es grande, es decir, donde la frontera del recinto de analiticidad dista mucho del punto z. En particular, para las funciones enteras, es decir, para las funciones que son analíticas en todo el plano, donde el único punto frontera del recinto está en el ∞, $\Delta = \infty$ para cualquier punto del plano y, por consiguiente, $\frac{1}{\Delta} = 0$. Por esto, para las funciones enteras, en cual-

quier punto del plano se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} = 0.$$

Como ejemplo, tomemos $f(z) = \exp z$. Aquí $f^{(n)}(z) = \exp z$ para cualquier n, y, por consiguiente, $|f^{(n)}(z)| = |\exp z| = e^x$. Por otra parte, si $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ $\left(\text{la parte entera de } \frac{n}{2}\right)$ se tiene,

$n! \geqslant n(n-1)\ldots(n-k+1) > k^{n-k}$ y $\sqrt[n]{n!} > k^{1-\frac{k}{n}} \geqslant \sqrt{k}$. Por lo tanto,

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}} < \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\sqrt{\left[\frac{n}{2}\right]}} \longrightarrow 0 \text{ para } n \longrightarrow \infty.$$

Empleemos el hecho, demostrado en el presente apartado, de que la derivada $f'(z)$ de una función analítica es también analítica y, por consiguiente, continua, para obtener la r e g l a d e s u s t i t u c i ó n d e l a v a r i a b l e e n l a s i n t e g r a l e s d e l a s f u n c i o n e s c o m p l e j a s.

Supongamos que $f(z)$ es una función analítica en el recinto G y sea L una curva rectificable, situada en este recinto. La función $w = f(z)$ transforma la curva L en una curva Γ que también es rectificable. En efecto, si $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, es la ecuación de la curva L, entonces la ecuación de la curva Γ tendrá la forma

$$w = f[\lambda(t)].$$

Considerando una partición arbitraria del segmento $[\alpha, \beta]$ por los puntos $t_0 = \alpha, t_1, \ldots, t_n = \beta$ y haciendo $z_j = \lambda(t_j)$, $w_j = f[\lambda(t_j)]$ hallaremos:

$$\sum_{j=0}^{n-1} |w_{j+1} - w_j| =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{z_j}^{z_{j+1}} f'(z)\,dz \right| \leqslant \max_L |f'(z)| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} |dz| \leqslant \max |f'(z)| \text{ long. } L,$$

de donde se deduce que la curva Γ es rectificable.

Demostremos que para cualquier función $\Phi(w)$, continua en Γ, se verifica la fórmula

$$\int_\Gamma \Phi(w)\,dw = \int_L \Phi[f(z)]\,f'(z)\,dz. \qquad (3.2:11)$$

que expresa la regla de sustitución de la variable bajo el signo integral.

Para demostrarla, consideremos las sumas integrales cuyo límite es igual a la integral $\int\limits_{\Gamma} \Phi(w)\, dw$. Se tiene:

$$\sum_{0}^{n-1} \Phi(w_j)(w_{j+1}-w_j) = \sum_{0}^{n-1} \Phi[f(z_j)] \int\limits_{z_j}^{z_{j+1}} f'(z)\, dz.$$

Por otra parte, la integral $\int\limits_{L} \Phi[f(z)]\, f'(z)\, dz$ puede representarse en la forma $\sum\limits_{0}^{n-1} \int\limits_{z_j}^{z_{j+1}} \Phi[f(z)]\, f'(z)\, dz$, y, por consiguiente,

$$\sum_{0}^{n-1} \Phi(w_j)(w_{j+1}-w_j) - \int\limits_{L} \Phi[f(z)]\, f'(z)\, dz =$$

$$= \sum_{0}^{n-1} \int\limits_{z_j}^{z_{j+1}} \{\Phi[f(z_j)] - \Phi[f(z)]\}\, f'(z)\, dz.$$

Con una partición del segmento $[\alpha, \beta]$ suficientemente menuda, todas las magnitudes

$$\max_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |\Phi[f(z_j)] - \Phi[f(z)]|$$

se pueden hacer menores que cualquier ε. Haciendo luego la notación $M = \max\limits_{L} |f'(z)|$, obtenemos:

$$\left| \sum_{0}^{n-1} \int\limits_{z_j}^{z_{j+1}} \{\Phi[f(z_j)] - \Phi[f(z)]\}\, f'(z)\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant M\varepsilon \sum_{0}^{n-1} \int\limits_{z_j}^{z_{j+1}} |dz| \leqslant M\varepsilon \cdot \text{long. } L,$$

por consiguiente, las sumas integrales

$$\sum_{0}^{n-1} \Phi[f(w_j)](w_{j+1}-w_j)$$

tienden al límite

$$\int_L \Phi[f(z)]\, f'(z)\, dz,$$

cuando la partición del curva Γ disminuye indefinidamente.

De aquí se deduce la igualdad (3.2:11).

3.3. Aquí nos dedicaremos al problema de los valores frontera de la integral de tipo Cauchy. Los resultados fundamentales referentes a esto fueron obtenidos por el matemático ruso Y. Sojotski en el año 1873 *). Esta cuestión, en las hipótesis más generales respecto de la curva (que se supone rectificable) y de la función (que se supone sumable en el sentido de Lebesgue), se estudió en los trabajos de V. Gólubiev y Priválov **).

En las obras de Musjelishvili y su escuela se han tratado las aplicaciones de la integral de tipo Cauchy a los problemas de mecánica y sobre todo a la teoría de la elasticidad ***).

Supongamos primero que $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$ es una integral de Cauchy

Entonces, en el recinto g que es interior a la curva L, $F(z)$ coincide con $f(z)$, la cual es analítica en todos los puntos de un recinto G que contiene a L y a g. Por esto, si ζ_0 es algún punto de L, entonces $F(z)=f(z)$ tiende al límite $f(\zeta_0)$ cuando z tiende a ζ_0 por el interior de L. En el exterior a L la integral de Cauchy se anula (véase el ap. 3.1). Por esta razón, cuando z tiende al punto ζ_0 manteniéndose en el exterior de la curva L, la integral de Cauchy tiende al límite cero.

En resumen, para la integral de Cauchy, en cada punto ζ_0 de la curva L existen valores frontera, iguales a $f(\zeta_0)$ por el interior a L e iguales a 0 por el exterior a L.

Consideremos ahora la integral de tipo Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ bajo las siguientes hipótesis particulares:

*) Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды. Сочинение Ю. Сохоцкого, СПб, 1873 (Y. Sojotski, Sobre las integrales definidas y las funciones que se emplean en los desarrollos en series).

**) 1. В. В. Голубев, Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, М., 1916 (V. Gólubiev, Funciones uniformes analíticas con un conjunto perfecto de puntos singulares).

2. И. И. Привалов, Интеграл Cauchy, Саратов, 1919 (I. Priválov, Integral de Cauchy).

3. И. И. Привалов, Граничные свойства однозначных аналитических функций, Гостехиздат, 1950 (I. Priválov, Propiedades de frontera de las funciones uniformes analíticas).

***) 1. N. Musjelishvili, Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique. Tiflis. 1922.

2. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения (Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике), М., Физматгиз, 1962 (N. Musjelishvili, Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics Dep of supply and Development, Aer. Res. Lab., Melbourne, Australia, 1949, Noordhoff, Groningen, 1953).

a) γ es una curva rectificable de Jordan,
b) la función $\varphi(\zeta)$ es analítica en cierto entorno de cada punto de la curva γ.

Demostremos que en estas condiciones también existen dos valores frontera de la integral en cada punto $\zeta_0 \in \gamma$, distinto de los extremos de L. A diferencia del caso de la integral de Cauchy, estos valores no se expresarán directamente mediante $\varphi(\zeta_0)$. No obstante, la diferencia de ellos en el punto ζ_0 será igual a $\varphi(\zeta_0)$ (tomando adecuadamente uno de ellos por minuendo y el otro por sustraendo). Por consiguiente, aquí se observa la misma ley que en el caso de la integral de Cauchy, donde la diferencia entre los valores frontera interior y exterior es igual a $f(\zeta_0) - 0 = f(\zeta_0)$.

Para la demostración, tomemos un entorno U del punto ζ_0, de modo que la función $\varphi(z)$ sea analítica en U, y tracemos una circunferencia C con el centro en ζ_0, contenida en U y de un radio tan pequeño que entre los puntos de la curva

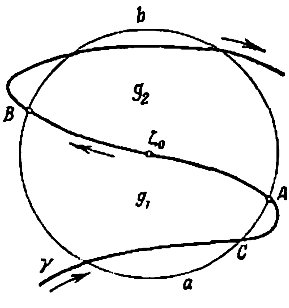


FIG. 55

γ que preceden a ζ_0 y que siguen después de ζ_0 (en dirección de la integración), haya puntos situados en C. Entonces, partiendo del punto ζ_0, primero en dirección del recorrido de la curva γ hasta el primer punto B de intersección de γ con la circunferencia C, y después desde el mismo punto ζ_0 en dirección contraria, también hasta el primer punto A de intersección de γ con la circunferencia C, obtenemos un arco $AB \subset \gamma$ que contiene al punto ζ_0 y pertenece al interior de C, a excepción de sus extremos A y B situados en C. Los puntos A y B dividen a la circunferencia C en dos arcos AaB y AbB, que junto con el arco AB, perteneciente a γ, forman dos curvas de Jordan cerradas γ_1 $(ABaA)$ y γ_2 $(ABbA)$, con las partes interiores g_1 y g_2, situadas dentro de C (fig. 55).

Obsérvese que las designaciones se han adoptado de modo que el recinto g_1 quede a la izquierda del observador que se mueva sobre AB en la dirección de la integración, y el recinto g_2 quede a la derecha del mismo. Supongamos ahora que el punto $z \in g_1$ tiende al límite ζ_0. Como z está situado en el exterior de la curva γ_2, la cual, junto con su interior g_2, pertenece al recinto U, donde la función $\varphi(\zeta)$ es analítica, según el teorema integral de Cauchy se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0,$$

o sea,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{AbB}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

De aquí se deduce que para los puntos $z \in g_1$ el valor de la integral

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

no varía si en lugar del arco AB se efectúa la integración sobre el arco de la circunferencia AbB.

Así, pues, en el recinto g_1 se tiene:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'+AbB}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \qquad (3.3:1)$$

donde γ' se obtiene de γ eliminando el arco AB.

Pero $\gamma' + AbB$ es una curva rectificable (que puede no ser de Jordan) y, por consiguiente, la integral (3.3:1) es una integral de tipo Cauchy que, en virtud del ap. 3.2, tiene que representar una función analítica $\Phi_1(z)$ en cualquier entorno del punto ζ_0 que no contenga puntos de la curva $\gamma' + AbB$; en los puntos de este entorno que pertenecen a g_1, como muestra la igualdad (3.3:1), $\Phi_1(z)$ coincide con $F(z)$. Por consiguiente,

$$\lim_{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in g_1}} F(z)=\lim_{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in g_1}}\Phi_1(z)=\Phi_1(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'+AbB}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}. \qquad (3.3:2)$$

Del mismo modo, para los puntos del recinto g_2 podemos escribir:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'+AaB}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} \qquad (3.3:3)$$

donde la integral de tipo Cauchy que figura en el segundo miembro representa en un entorno de ζ_0 una función analítica $\Phi_2(z)$ que coincide con $F(z)$ en los puntos de este entorno pertenecientes a g_2.

De aquí se deduce que

$$\lim_{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in g_2}} F(z)=\lim_{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in g_2}}\Phi_2(z)=\Phi_2(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'+AaB}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}. \qquad (3.3:4)$$

Por lo tanto, queda demostrado que existen dos valores frontera de la integral de tipo Cauchy en un punto arbitrario ζ_0 de la curva rectificable y se han hallado sus valores (3.3:2) y (3.3:4). Uno de ellos, el que corresponde al caso en que z tiende a ζ_0 por el recinto g_1 contiguo al arco $\widehat{AB} \subset \gamma$ hacia la izquierda según la dirección de integración, lo llamaremos valor frontera de la izquierda, y el otro, valor frontera de la derecha; los designaremos mediante $F_I(\zeta_0)$ (3.3:2) y $F_D(\zeta_0)$ (3.3:4), respectivamente.

De las fórmulas (3.3:2) y (3.3:4) se deduce que

$$F_I(\zeta_0)-F_D(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{AbB-AaB}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}.$$

Debido a las hipótesis hechas, la integral obtenida es una integral de Cauchy, formada para la función $\varphi(z)$ y la circunferencia C. Según la fórmula integral de Cauchy, su valor es igual a $\varphi(\zeta_0)$. Resumiendo,

$$F_I(\zeta_0)-F_D(\zeta_0)=\varphi(\zeta_0), \qquad (3.3:5)$$

que es lo que se afirmaba.

Como ejemplo, consideremos la integral de tipo Cauchy

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta}\frac{dx}{x-z},$$

donde Δ representa el segmento del eje real $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (la integración se efectúa en la dirección del crecimiento de x), y tomemos para mayor sencillez $\zeta_0 = 0$. Aquí $\varphi(\zeta) = 1$ es una función analítica en todo el plano. Por consiguiente, no hay ninguna restricción para elegir la circunferencia C con centro en 0, sin contar la única condición de que en C tienen que estar situados todos los puntos del segmento Δ que precedan al punto 0 y los que sigan después. Tomemos por C la circunferencia unidad. Entonces el arco AB coincidirá con todo el segmento Δ y los arcos de la circunferencia AbB y AaB serán las semicircunferencias inferior y superior, respectivamente.

En la fórmula (3.3:5), para la diferencia de los valores frontera de la integral de tipo Cauchy tendremos que tener:

$$F_I(0)-F_D(0)=\varphi(0)=1.$$

En cuanto a cada uno de éstos por separado, la fórmula (3.3:2) da:

$$F_I(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{AbB}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{i\theta}i\,d\theta}{e^{i\theta}}=\frac{1}{2},$$

y la fórmula (3.3:4):

$$F_D(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{AaB}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\theta}i\,d\theta}{e^{i\theta}}=-\frac{1}{2}.$$

3.4. En lo que se refiere al resultado (3.3:5) obtenido en el apartado precedente, se puede hacer una objeción esencial de que éste se ha conseguido suponiendo que la función $\varphi(\zeta)$ es analítica, mientras que en las aplicaciones suele ser frecuentemente importante el caso en que $\varphi(\zeta)$ no es una función analítica.

Debido a esto daremos aquí otra demostración del mismo resultado, que a la vez dará lugar a unas fórmulas importantes para $F_I(\zeta_0)$ y $F_D(\zeta_0)$, distintas de las fórmulas (3.3:2) y (3.3:4).

Sea γ, como anteriormente, una curva rectificable de Jordan y supongamos que $\varphi(\zeta)$ es una función continua en γ. Considerando a ζ como una función de la longitud del arco s, medida desde el punto inicial de γ:

$$\zeta=\lambda(s),\quad 0\leqslant s\leqslant l \quad (l \text{ es la longitud de } \gamma),$$

supongamos que en cierto punto $\zeta_0 = \lambda(s_0)$ $(0 < s_0 < l)$ existe la derivada $\lambda'(s)$, siendo ésta finita y no nula *).

Supongamos ahora que existen unos números $K > 0$ y $\alpha > 0$ tales que

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)|<K|\zeta-\zeta_0|^{\alpha}. \tag{3.4:1}$$

Fácilmente se observa que en estas hipótesis la integral impropia

$$I_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta \tag{3.4:2}$$

---

*) En la teoría de funciones de variable real se demuestra que en todo el intervalo $(0, l)$, a excepción, posiblemente, de un conjunto de medida nula, existe $\lambda'(s)$ y $|\lambda'(s)| = 1$. Véase, por ejemplo, Ch. de la Vallée Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale*, Vol. I, 10ª ed., 1947.

es absolutamente convergente. Para cerciorarse de esto, convengamos en designar el arco de la curva γ que corresponde a un segmento determinado de variación de la longitud del arco s: $a \leqslant s \leqslant b$, con la notación $[a, b]$. Entonces, para cualquier arco $[a, b]$ que no contenga al punto ζ_0 (supongamos, para precisar, que $s_0 < a < b$), en virtud de (3.4:1), tendremos:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{[a,b]} \left| \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0} \right| ds < \frac{K}{2\pi} \int\limits_{[a,b]} |\zeta-\zeta_0|^{\alpha-1}\, ds.$$

Por la hipótesis, $\lim\limits_{s\to s_0} \left| \frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0} \right| = |\lambda'(s_0)| \neq 0$ de donde se deduce que $\left| \frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0} \right| > \frac{1}{2} |\lambda'(s_0)|$ para $|\zeta-\zeta_0| < \rho$; si $|\zeta-\zeta_0| \geqslant \rho$, entonces $\left| \frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0} \right| > \frac{\rho}{l}$. Así, pues, $\left| \frac{\zeta-\zeta_0}{s-s_0} \right| > c > 0$ para todos los puntos $\zeta \in \gamma$. De aquí se deduce que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[a,b]} \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\, d\zeta \right| < K' \int\limits_a^b (s-s_0)^{\alpha-1}\, ds =$$

$$= K' \frac{(b-s_0)^\alpha-(a-s_0)^\alpha}{\alpha} \to 0$$

cuando a y $b \to s_0$. Por lo tanto, la integral (3.4:2) es absolutamente convergente.

Considerando la integral de tipo Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta,$$

representémosla en la forma

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}\, d\zeta \qquad (3.4:3)$$

y demostremos que

$$\lim_{z\to\zeta_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}\, d\zeta = I_0. \qquad (3.4:4)$$

Aquí se supondrá que z tiende a ζ_0 manteniéndose en el interior de un ángulo arbitrario g_0, de magnitud menor que $2\theta < \pi$, con el vértice en el punto ζ_0 y cuya bisectriz coincide con la normal a la curva en este punto. El modo en que z tiende a ζ_0 se caracteriza diciendo que *«tiende por caminos no tangentes a γ»*. En particular, queda satisfecha esta condición cuando el punto z tiende a ζ_0 por la normal a γ. Fácilmente se observa que en un entorno del punto ζ_0 suficientemente pequeño ningún punto de la curva γ caerá en el interior de un ángulo fijado g_{θ_0} (y tampoco en el interior del ángulo opuesto al mismo). En efecto, supongamos lo contrario. Entonces tiene que existir una sucesión de puntos $\zeta_n = \lambda(s_n) \in \gamma$, situados en el interior de g_{θ_0} (o en el interior del ángulo opuesto al mismo) que convergerá a ζ_0. Se puede suponer también que $\{s_n\}$ es convergente, es decir, que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s'$, de donde se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n =$

$= \lambda(s')$. Pero, por otra parte, $\lim_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta_0 = \lambda(s_0)$; como γ es una curva de Jordan (y ζ_0 es distinto de sus extremos), sacamos la conclusión de que $s' = s_0$. Por lo tanto, las direcciones de los vectores $\zeta_n - \zeta_0$ tienen que tender a la dirección tangente en el punto ζ_0 y, por consiguiente, todos estos vectores no pueden quedarse en el interior del ángulo g_{θ_0}.

Sea θ un número que satisface a la condición $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; fijemos θ_0, $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ y consideremos un entorno $|z - \zeta_0| < \rho$ tal que ningún punto de la curva γ situado en este entorno pertenezca al ángulo g_{θ_0} (y tampoco al

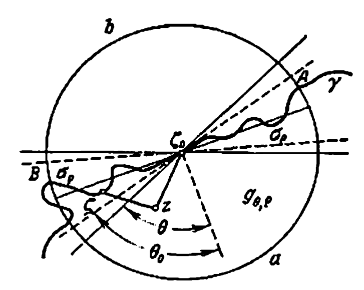


FIG. 56

ángulo opuesto al mismo), y sea $g_{\theta,\rho}$ la parte del ángulo g_θ que pertenece al entorno indicado. Prolongando γ desde el punto ζ_0 en dos direcciones hasta los primeros puntos A y B de intersección con la circunferencia $|z - z_0| = \rho$, se obtiene un arco

$$\sigma_\rho = [s_0 - \varepsilon', s_0 + \varepsilon''] \subset \gamma.$$

Evidentemente, para cualesquiera puntos $z \in g_{\theta,\rho}$ y $\zeta \in \sigma_\rho$, tendremos:

$$\frac{|z - \zeta_0|}{|z - \zeta|} < \operatorname{cosec}(\theta_0 - \theta)$$

(fig. 56), por lo cual,

$$A = \left| I_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma [\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)] \frac{\zeta_0 - z}{(\zeta - z)(\zeta - \zeta_0)} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \sigma_\rho} [\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)] \frac{\zeta_0 - z}{(\zeta - z)(\zeta - \zeta_0)} d\zeta \right| +$$

$$+ \operatorname{cosec}(\theta_0 - \theta) \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_\rho} \left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \right| ds = i_1 + i_2.$$

Si ε es un número positivo arbitrario, se puede suponer que ρ es tan pequeño que i_2 resulte menor que $\frac{\varepsilon}{2}$; fijemos este valor de ρ. Obsérvese ahora que la distancia δ_0 desde el punto ζ_0 hasta el arco $\gamma - \sigma_\rho$ es positiva; por lo tanto, $|\zeta - \zeta_0| \geqslant \delta_0 > 0$ si $\zeta \in \gamma - \delta_\rho$ y $|\zeta - z| \geqslant \delta_0 - |\zeta_0 - z|$. Por esta razón, si $|z - \zeta_0| < \frac{\delta_0}{2}$, se tiene:

$$i_1 < \frac{1}{\pi} \frac{|\zeta_0 - z|}{\delta_0^2} \int\limits_{\gamma - \sigma_\rho} |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\zeta_0 - z|}{\pi\delta_0^2} \int\limits_{\gamma} |\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| \, ds,$$

de donde, para todos los puntos z suficientemente próximos a ζ_0 resulta: $i_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, pues $A < \varepsilon$ para todos los puntos z suficientemente próximos a ζ_0 y pertenecientes a $g_{0,\rho}$, es decir, queda demostrada la relación (3.4:4) para el caso en que z tienda a ζ_0 por caminos no tangentes a γ.

Consideremos ahora la segunda de las integrales del segundo miembro de la igualdad (3.4:3). Evidentemente, ésta es una integral de tipo Cauchy con una función constante y, por consiguiente, analítica $\varphi(\zeta)$ $(\equiv \varphi(\zeta_0))$. Además, representa $\varphi(\zeta_0) \operatorname{Ln} \frac{Q - z}{P - z}$, donde P es el punto inicial y Q el punto final de la curva γ. No obstante, no utilizaremos esta última observación, pero aplicaremos los resultados del precedente apartado, según los cuales

$$f_I(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma' + AbB} \frac{\varphi(\zeta_0)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}, \quad f_D(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma' + AaB} \frac{\varphi(\zeta_0)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}. \quad (3.4:5)$$

Confrontando (3.4:3), (3.4:4) y (3.4:5), sacamos la conclusión de que en las condiciones referentes a γ, $\varphi(\zeta)$ y $\zeta_0 \in \gamma$, enunciadas en este apartado, existen los valores frontera $F_I(\zeta_0)$ y $F_D(\zeta_0)$ de la integral de tipo Cauchy, expresadas por las fórmulas:

$$F_I(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma' + AbB} \frac{\varphi(\zeta_0)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}, \quad (3.4:6)$$

$$F_D(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma' + AaB} \frac{\varphi(\zeta_0)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}. \quad (3.4:7)$$

Restando término a término (3.4:7) de (3.4:6), obtenemos:

$$F_I(\zeta_0) - F_D(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - \zeta_0| = \rho} \frac{\varphi(\zeta_0)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \varphi(\zeta_0). \quad (3.4:8)$$

Hemos obtenido esta fórmula, que coincide con la fórmula (3.3:5), sin suponer que la función $\varphi(\zeta)$ sea analítica.

Transformemos (3.4:6) y (3.4:7) a una forma más simple; precisamente, escribamos (3.4:6) del modo siguiente:

$$F_1(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_\rho}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{AbB}\frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_\rho}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{AbB}\frac{\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta. \quad (3.4:9)$$

Cuando $\rho\to 0$, la segunda de las integrales del segundo miembro de la fórmula (3.4:9) tiende a cero (debido a la convergencia de la integral (3.4:2), establecida anteriormente). La tercera integral puede escribirse en la forma $\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}$ $\operatorname*{Var}_{AbB}$ Ln $(\zeta-\zeta_0)$ y, como Ln $(\zeta-\zeta_0)=\ln\rho+i\operatorname{Arg}(\zeta-\zeta_0)$, coincide con

$$\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi}\operatorname*{Var}_{AbB}\operatorname{Arg}(\zeta-\zeta_0)=\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi}\,\frac{\text{long } AbB}{\rho}.$$

Pero, según lo anterior, el arco $\sigma_\rho\in\gamma$ con los extremos A y B puede encerrarse en ángulos opuestos arbitrariamente estrechos con el vértice común ζ_0 cuya bisectriz coincide con la tangente a γ en el punto ζ_0. Por esta razón, cuando $\rho\to 0$, los puntos A y B tienden respectivamente a los dos puntos de intersección de esta tangente con la circunferencia $|\zeta-\zeta_0|=\rho$, de donde se deduce que

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{AbB}\frac{\varphi(\zeta_0)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi}\pi=\frac{\varphi(\zeta_0)}{2}.$$

Como el primer miembro de la fórmula (3.4:9) no depende de ρ, sacamos la conclusión de que existe también

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}, \quad (3.4:10)$$

que designaremos mediante $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}'\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}$ *).

---

*) Obsérvese que, en general, la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}$ es divergente.

La notación $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}'\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta}$ se ha admitido solamente para designar el límite (3.4:10), cuya existencia se ha establecido. Este límite se llama **valor principal de la integral** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$ (en el sentido de Cauchy).

Así, pues, obtenemos definitivamente:

$$F_I(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}' \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0) \qquad (3.4:11)$$

De aquí y de la fórmula (3.4:8) se deduce que

$$F_D(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}' \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}-\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0). \qquad (3.4:12)$$

Estas fórmulas, que tienen importantes aplicaciones en la mecánica, fueron obtenidas por primera vez por Y. Sojotski en las condiciones mismas del presente párrafo, por lo cual, se llaman *fórmulas de Sojotski*.

3.5. La fórmula de Cauchy puede obtenerse como un caso particular de una fórmula más general, que es válida para funciones, generalmente, no analíticas.

Sea Δ un recinto limitado por un número finito de curvas elementales de Jordan cerradas: Γ (el contorno exterior), $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (los contornos interiores); $F(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$ es una función continua con derivadas parciales de primer orden en el recinto cerrado $\overline{\Delta}$. Entonces, aplicando la fórmula de Green, obtenemos:

$$\int_{\Gamma} F(z)\,dz-\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j} F(z)\,dz=\int_{\Gamma} P\,dx-Q\,dy+i\int_{\Gamma} Q\,dx+P\,dy-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\left[\int_{\gamma_j} P\,dx-Q\,dy+i\int_{\gamma_j} Q\,dx+P\,dy\right]=\iint_{\Delta}\left[-\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+i\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right]dx\,dy=2i\iint_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial \bar z}\,dx\,dy \qquad (3.5:1)$$

$\left(\text{aquí } \frac{\partial F}{\partial \bar z}\right.$ es la derivada formal, véase el ap. $\left.1.3\right)$. Fijemos $z_0\in\Delta$ y excluyamos de Δ un entorno $|z-z_0|<\varepsilon$ cuyo radio sea menor que la distancia desde z_0 hasta la frontera del recinto Δ. Obtenemos un recinto Δ_ε cuya frontera consta de $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ y de la circunferencia $\gamma_\varepsilon: |z-z_0|=\varepsilon$. Apliquemos la fórmula (3.5:1) a la función $\Phi(z)=\frac{F(z)}{z-z_0}$; obtendremos:

$$\int_{\Gamma}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}=$$
$$=2i\iint_{\Delta_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{F(z)}{z-z_0}\right]dx\,dy=2i\iint_{\Delta_\varepsilon}\left[\frac{\partial F}{\partial \bar z}\frac{1}{z-z_0}+\right.$$
$$\left.+F(z)\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)\right]dx\,dy=2i\iint_{\Delta_\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial \bar z}\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy,$$

$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)=0\right.$, puesto que $\frac{1}{z-z_0}$ es una función analítica en el recinto $\left.\Delta_\varepsilon\right)$.

Si $\varepsilon \longrightarrow 0$, se tiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}=2\pi i F(z_0),\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\Delta_\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_0}\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_0}\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy$$

y, por consiguiente,

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy. \qquad (3.5:2)$$

Esta es la fórmula general buscada. En ella, la suma de las integrales de tipo Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}=\psi(z_0)$$

es una función analítica de z_0.

Por consiguiente, la función

$$F(z_0)-\psi(z_0)=-\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy$$

al igual que $F(z_0)$, es continua junto con sus derivadas parciales de primer orden en el recinto Δ y

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_0}\left[-\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z-z_0}\,dx\,dy\right]=\frac{\partial}{\partial \bar{z}_0}\left[F(z_0)-\psi(z_0)\right]=\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_0}.$$

Cuando $F(z_0)$ es una función analítica en el recinto Δ, la derivada formal $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}=0$ y la fórmula (3.5:2) se convierte en la fórmula integral de Cauchy:

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{F(z)\,dz}{z-z_0}.$$

§ 4. SERIES DE FUNCIONES Y PRODUCTOS INFINITOS

4.1. Sea

$$f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots=\sum_0^\infty f_n(z) \qquad (4.1:1)$$

una serie de funciones de variable compleja, definidas en un conjunto infinito de puntos E. Designemos con $S_n(z)$ la suma parcial de los primeros $n+1$ términos de la serie:

$$S_n(z)=f_0(z)+f_1(z)+\ldots+f_n(z). \qquad (4.1:2)$$

La serie (4.1:1) se llama *uniformemente convergente* en E, si para cualquier $\varepsilon, \varepsilon>0$, se puede señalar un $N(\varepsilon)$ tal, que para $n>N(\varepsilon)$ y para cualquier p natural, se cumple la desigualdad

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|<\varepsilon \qquad (4.1:3)$$

en todos los puntos del conjunto E.

De esta definición se deduce que una serie que es uniformemente convergente en el conjunto E, es convergente en cada punto de este conjunto (en virtud del criterio de Cauchy). El recíproco, generalmente, no es válido, como muestra el ejemplo de la serie geométrica

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

En efecto, esta serie es convergente en el círculo unidad, puesto que

$$1+z+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\to\frac{1}{1-z}$$

para $n\to\infty$, si $|z|<1$. Sin embargo, la convergencia no es uniforme. En efecto, en este caso

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|=|z^{n+1}(1+z+\ldots+z^{p-1})|=$$
$$=\frac{|z|^{n+1}|1-z^p|}{|1-z|}\geqslant\frac{|z|^{n+1}(1-|z|^p)}{|1-z|}.$$

Tomemos un n arbitrario y hagamos $p=n$, $z_n=\frac{n}{n+1}$. Entonces tendremos:

$$|S_{2n}(z_n)-S_n(z_n)|\geqslant\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]}{\frac{1}{n+1}}=$$
$$=n\frac{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\infty \text{ para } n\to\infty.$$

De este modo, para n arbitrariamente grandes, existen tales p $(=n)$ y tales puntos z_n del círculo unidad, en los cuales los números $|S_{2n}(z_n) - S_n(z_n)|$ son arbitrariamente grandes. De aquí se deduce que la serie geométrica no es uniformemente convergente en el círculo unidad.

Designando la suma de la serie (4.1:1) mediante $f(z)$:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z), \tag{4.1:4}$$

se puede expresar la condición de convergencia uniforme de otra forma. Precisamente, para la convergencia uniforme de la serie (4.1:1) es necesario y suficiente que para cualquier ε, $\varepsilon > 0$, se pueda hallar un $N(\varepsilon)$ tal, que se cumpla la desigualdad

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon \tag{4.1:5}$$

en cualquier punto $z \in E$ para $n > N(\varepsilon)$.

En efecto, supongamos que la serie (4.1:1) es uniformemente convergente. Hallemos un $N_1(\varepsilon)$ tal, que para $n > N_1(\varepsilon)$ y para cualesquiera z y p ($z \in E$, p es un número natural), se cumpla la desigualdad

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Haciendo crecer p indefinidamente, obtenemos:

$$|f(z) - S_n(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para $n > N_1(\varepsilon)$ y para cualquier $z \in E$. Así, pues, el cumplimiento de la condición (4.1:3) implica el cumplimiento de la condición (4.1:5).

Recíprocamente, si la desigualdad

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

se cumple para $n > N_2(\varepsilon)$ y para cualquier punto $z \in E$, entonces, en las mismas condiciones, para cualquier p natural se tendrá

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| = |f(z) - S_n(z) - [f(z) - S_{n+p}(z)]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(z) - S_n(z)| + |f(z) - S_{n+p}(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, del cumplimiento de la condición (4.1:5) también se deduce el cumplimiento de la condición (4.1:3).

Comprando la serie de funciones con una serie convergente de términos positivos constantes, se obtiene un criterio bastante sencillo de convergencia uniforme de la serie (4.1:1). Precisando, si desde cierto valor de $n \geqslant \nu$ los módulos de los términos de la serie (4.1:1)

no son superiores en E a los términos correspondientes de la serie convergente

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots \qquad (4.1{:}6)$$

de términos positivos constantes, la serie (4.1:1) es uniformemente convergente en E. En efecto, en virtud a la convergencia de la serie (4.1:6), para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $N(\varepsilon)$ tal, que para $n > N(\varepsilon)$ y cualquier p se cumple la desigualdad

$$\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} < \varepsilon.$$

Pero, según la hipótesis, en el conjunto E se cumplen las desigualdades

$$|f_k(z)| \leqslant \alpha_k \qquad (k \geqslant \nu).$$

Por consiguiente, en cualquier punto $z \in E$ para $n > \max(N(\varepsilon), \nu)$ y cualquier p natural, se tiene:

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| \leqslant |f_{n+1}(z)| + \ldots + |f_{n+p}(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} < \varepsilon,$$

lo cual significa que la serie (4.1:1) es uniformemente convergente.

Supongamos que cada punto del conjunto E es un punto de acumulación de este conjunto, o sea, como suele decirse, E es un conjunto denso en sí. Esto ocurrirá, por ejemplo, cuando E sea un conjunto (no vacío) abierto arbitrario, en particular, un recinto, o también cuando E sea una curva continua. Entonces, si cada término de la serie, uniformemente convergente en E, es una función continua en E, la suma de la serie será una función continua en E.

Para demostrar esto, consideremos dos puntos cualesquiera z_0 y z del conjunto E y acotemos $|f(z) - f(z_0)|$ del modo siguiente:

$$|f(z) - f(z_0)| = |[f(z) - S_n(z)] + [S_n(z) - S_n(z_0)] + [S_n(z_0) - f(z_0)]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |f(z_0) - S_n(z_0)|. \qquad (4.1{:}7)$$

Sea ε un número positivo arbitrario. En virtud de la convergencia uniforme de la serie, existe un $N(\varepsilon)$ tal, que para $n > N(\varepsilon)$ y para cualesquiera puntos del conjunto E se verifica la desigualdad:

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (4.1{:}8)$$

Por consiguiente, en particular, tendremos:

$$|f(z_0) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (4.1{:}9)$$

Fijemos arbitrariamente $n_0 > N(\varepsilon)$. Como la función $S_{n_0}(z)$ es continua en el punto z_0, puede señalarse un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal, que para

$|z-z_0|<\delta(\varepsilon)$ $(z, z_0 \in E)$ se cumpla la desigualdad

$$|S_{n_0}(z)-S_{n_0}(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (4.1:10)$$

Haciendo en (4.1:7) $n=n_0$ y tomando $|z-z_0|<\delta(\varepsilon)$, en virtud de las desigualdades (4.1:8), (4.1:9) y (4.1:10), obtenemos:

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

de donde se deduce que la función $f(z)$ es continua en cualquier punto $z_0 \in E$.

Supongamos, en particular, que E es una curva rectificable L. Demostremos que si los términos de la serie (4.1:1) son funciones continuas en L y esta serie es uniformemente convergente en L, entonces ésta puede integrarse término a término a lo largo de L, es decir,

$$\int_L f(z)\,dz=\int_L f_0(z)\,dz+\int_L f_1(z)\,dz+\ldots+\int_L f_n(z)\,dz+\ldots \qquad (4.1:11)$$

En efecto, como los términos de la serie son funciones continuas y la serie es uniformemente convergente en L, de lo demostrado anteriormente se deduce que $f(z)$ es continua en L. Designemos con Δ la longitud de la curva L. Siendo ε un número positivo arbitrario, si $N(\varepsilon)$ es tal, que para $n>N(\varepsilon)$ en todos los puntos de la curva L se verifica la desigualdad

$$|f(z)-S_n(z)|<\frac{\varepsilon}{\Delta},$$

entonces, evidentemente,

$$\left|\int_L f(z)\,dz-\left[\int_L f_0(z)\,dz+\ldots+\int_L f_n(z)\,dz\right]\right|=$$
$$=\left|\int_L [f(z)-S_n(z)]\,dz\right|<\frac{\varepsilon}{\Delta}\Delta=\varepsilon$$

(para $n>N(\varepsilon)$), de donde se deduce la relación (4.1:11).

Frecuentemente, el teorema de la posibilidad de integrar término a término una serie se suele aplicar de la forma siguiente. Supongamos que los términos de la serie (4.1:1) son funciones continuas en cierto recinto G y que la serie es uniformemente convergente en cada conjunto cerrado de puntos de este recinto. Entonces la serie (4.1:1) puede integrarse término a término a lo largo de cualquier curva rectificable L situada en el recinto G.

Para reducir este teorema al anterior es suficiente observar que toda curva rectificable L (y, en general, toda curva continua), situada en el recinto G, representa un conjunto cerrado de puntos del

recinto. Por consiguiente, según la condición del teorema, la serie (4.1:1) es uniformemente convergente en L.

En la teoría de las funciones analíticas la convergencia uniforme de una serie de funciones en todo conjunto cerrado y acotado de un recinto G, desempeña un papel muy importante. A semejante convergencia la llamaremos convergencia uniforme en el interior del recinto G, distinguiéndola de la convergencia uniforme en el recinto G. Toda serie que es uniformemente convergente en el recinto G, es uniformemente convergente también en todo conjunto cerrado de sus puntos y, por consiguiente, es uniformemente convergente en el interior de G. Lo recíproco, generalmente, no es cierto, como muestra el ejemplo de la serie geométrica

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

En efecto, como se vio anteriormente, esta serie es convergente en el círculo unidad $|z|<1$, pero no lo es uniformemente. No obstante, es uniformemente convergente en el interior del círculo unidad. En efecto, sea F un conjunto cerrado de puntos del círculo unidad y sea $\delta>0$ la distancia de F hasta la frontera del recinto (hasta la circunferencia unidad). Entonces, para cualquier punto $z\in F$; se tiene: $|z|\leqslant 1-\delta$ y, por consiguiente,

$$|z^{n+1}+\ldots+z^{n+p}|=\left|z^{n+1}\frac{1-z^p}{1-z}\right|\leqslant|z|^{n+1}\frac{1+|z|^p}{1-|z|}\leqslant(1-\delta)^{n+1}\frac{2}{\delta}.$$

Evidentemente, la magnitud $(1-\delta)^{n+1}\frac{2}{\delta}$ tiende a cero cuando $n\to\infty$ y puede hacerse menor que $\varepsilon>0$ para $n>N(\varepsilon)$. Así, pues, la serie geométrica es uniformemente convergente en cualquier conjunto cerrado F de puntos del círculo unidad y, por consiguiente, es uniformemente convergente en el interior del círculo, a pesar de que no es uniformemente convergente en el círculo.

Demostremos que para que la serie (4.1:1) sea uniformemente convergente en el interior de un recinto G, es necesario y suficiente que para todo punto z_0 del recinto exista un entorno del mismo en el cual esta serie converja uniformemente. La necesidad de esta condición es evidente, puesto que si $|z-z_0|\leqslant\rho$ es un círculo cerrado con el centro en el punto z_0, perteneciente a G, la serie tiene que converger uniformemente en el mismo y, por consiguiente, también en el entorno $|z-z_0|<\rho$ del punto z_0. Para cerciorarse de que la condición es suficiente, haremos la demostración por reducción a lo absurdo. Supongamos que, cumpliéndose la condición, la serie converge no uniformemente en cierto conjunto cerrado $F\subset G$. Entonces tienen que existir: un número positivo ε_0, unos números naturales n_k $(n_k<n_{k+1})$ arbitrariamente grandes y unos puntos

$z_h \in F$ tales que

$$|f(z_h) - S_{n_h}(z_h)| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (4.1:12)$$

(Aquí se ha formulado la negación de la convergencia uniforme de la serie (4.1:1) en el conjunto F).

De la sucesión de puntos $\{z_k\}$ se puede extraer otra sucesión parcial contenida en la misma $\{z_{h'}\}$, que converge hacia cierto punto $z_0 \in F$ (F es un conjunto cerrado). Como z_0 es un punto del recinto G, según la hipótesis, para éste existe un entorno U perteneciente a G en el cual la serie es uniformemente convergente. Por consiguiente, en todos los puntos de U tiene que verificarse la desigualdad

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon_0,$$

si n es suficientemente grande.

Por otra parte, debido a la hipótesis, existen unos números $n_{h'}$ arbitrariamente grandes, tales que en los puntos $z_{h'}$ situados en U (y a U pertenecen todos los puntos $\{z_{h'}\}$, comenzando desde uno de ellos,) se cumple la desigualdad opuesta:

$$|f(z_{h'}) - S_{n_{k'}}(z_{k'})| \geqslant \varepsilon_0.$$

De la contradicción obtenida se deduce la justeza de nuestra afirmación.

Volvamos a estudiar el problema de la integración de una serie uniformemente convergente de funciones analíticas $\sum_0^{\infty} f_k(z)$. Fijando un punto arbitrario $z_0 \in G$, para cualquier curva rectificable γ, perteneciente a G, que una z_0 con el punto z, también perteneciente a G, tendremos:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_0^{\infty} \int_{\gamma} f_k(z)\,dz.$$

Las integrales $\int_{\gamma} f(z)\,dz$ y $\int_{\gamma} f_n(z)\,dz$ pueden considerarse como funciones de z, generalmente multiformes (véase el ap. 2.7):

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz \quad \text{y} \quad \int_{z_0}^{z} f_n(z)\,dz.$$

Para separar sus ramas uniformes en el entorno U: $|z - z_1| < \rho$ de algún punto z_1 del recinto G (se supone que este entorno junto con su frontera $|z - z_1| = \rho$ está contenido en el recinto G), efectuaremos todas las integraciones desde el punto z_0 hasta el punto z_1 sobre una misma curva rectificable γ_1 perteneciente al

recinto G, y luego, desde el punto z_1 hasta cualquier punto $z \in U$ a lo largo de curvas rectificables arbitrarias situadas en U, por ejemplo, a lo largo del segmento rectilíneo que une z_1 y z.

Demostremos que, cumpliéndose estas condiciones, la serie $\sum\limits_0^\infty \int\limits_{z_0}^z f_n(z)\,dz$ convergerá uniformemente en U, es decir, en un círculo cerrado arbitrario perteneciente al recinto G.

En efecto, para el módulo

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_0}^{z} f_k(z)\,dz\right|$$

se obtiene la cota siguiente:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_0}^{z} f_k(z)\,dz\right| \leqslant \left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{\gamma_1} f_k(z)\,dz\right| + \left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_1}^{z} f_k(z)\,dz\right|.$$

Pero la serie $\sum\limits_0^\infty \int\limits_{\gamma_1} f_k(z)\,dz$ es convergente, y, por consiguiente, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $N_1(\varepsilon)$ tal que

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{\gamma_1} f_k(z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } n > N_1(\varepsilon).$$

Aplicando luego la convergencia uniforme de la serie $\sum\limits_0^\infty f_k(z)$ en el círculo cerrado $|z - z_1| \leqslant \rho$, podemos elegir un número $N_2(\varepsilon)$ tal que, siendo $n > N_2(\varepsilon)$,

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2\rho}$$

para todos los puntos de este círculo. Tomando las integrales $\int\limits_{z_1}^{z} f_k(z)\,dz$ a lo largo del segmento rectilíneo que une z_1 y z, tendremos:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_1}^{z} f_k(z)\,dz\right| = \left|\int_{z_1}^{z} \sum_{n+1}^{n+p} f_k(z)\,dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\rho}\,\rho = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente, para $n > N(\varepsilon) = \max[N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)]$, en cualquier punto del círculo $|z - z_1| \leqslant \rho$ se cumplirá la desigualdad

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} \int_{z_1}^{z} f_k(z)\, dz\right| < \varepsilon,$$

con lo cual queda demostrada la convergencia uniforme de la serie en cualquier círculo cerrado contenido en G.

En el caso particular en que todas las integrales $\int_{z_0}^{z} f_k(z)\, dz$ sean funciones uniformes en el recinto G, de lo demostrado se deduce que la serie

$$\sum_{0}^{\infty} \int_{z_0}^{z} f_k(z)\, dz$$

es uniformemente convergente en el interior del recinto G, si la serie $\sum_{0}^{\infty} f_k(z)$ es uniformemente convergente en el interior del mismo.

Teorema de Weierstrass sobre las series uniformemente convergentes de funciones analíticas. *Si los términos de una serie*

$$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots, \qquad (4.1:1)$$

uniformemente convergente en el interior del recinto G, son funciones analíticas en este recinto, entonces la suma de la serie $f(z)$ también es analítica en el recinto G.

Además, las series

$$f_0^{(k)}(z) + f_1^{(k)}(z) + \ldots + f_n^{(k)}(z) + \ldots, \qquad (4.1:13)$$

que se obtienen de la serie (4.1:1) derivando ésta término a término k veces, también convergen uniformemente en el interior de G y representan en el recinto G las derivadas de k-ésimo orden de la suma de la serie $f(z)$.

Sea z_0 un punto arbitrario del recinto G y sea γ una circunferencia de radio ρ con el centro en el punto z_0, perteneciente a G junto con su interior. Evidentemente, es suficiente demostrar todas las proposiciones del teorema para los puntos del entorno U: $|z - z_0| < \frac{\rho}{2}$ del punto z_0. Supongamos que ζ designa un punto arbitrario situado en γ y que z es un punto arbitrario de U. Hagamos en (4.1:1) $z = \zeta$ y multipliquemos todos los términos de la serie por $\frac{k!}{2\pi i} \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Obtenemos:

$$\frac{k!}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}. \qquad (4.1:14)$$

Como la serie (4.1:1) converge uniformemente en γ y por las hipótesis del teorema

$$\left|\frac{k!}{2\pi i}\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}\right|\leqslant\frac{k!}{2\pi\left(\frac{\rho}{2}\right)^{k+1}},$$

la serie (4.1:14) también converge uniformemente en γ; por esta razón se la puede integrar término a término. Resulta:

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}=\sum_{0}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}. \qquad (4.1:15)$$

Como las funciones $f_n(z)$ son analíticas en el recinto G, las integrales $\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}$ expresan las derivadas $f_n^{(k)}(z)$ (véase (3.2:7)).

Para $k=0$ la igualdad (4.1:15) toma la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{0}^{\infty}f_n(z)=f(z),$$

de donde se deduce que $f(z)$ representa en U una integral de tipo Cauchy y, por consiguiente, es una función analítica en U.

Para $k>0$, de la igualdad (4.1:15), obtenemos:

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}=\sum_{0}^{\infty}f_n^{(k)}(z).$$

Pero la expresión del primer miembro de esta igualdad representa la derivada de orden k de la integral de tipo Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$ y, por consiguiente, es igual a $f^{(k)}(z)$. Así, pues, en el entorno U del punto z_0 se tiene:

$$f^{(k)}(z)=\sum_{0}^{\infty}f_n^{(k)}(z).$$

No queda más que demostrar la convergencia uniforme de esta serie o, lo que es lo mismo, de la serie (4.1:15) en este mismo entorno. Pero si en γ se cumple la desigualdad

$$|f(\zeta)-S_n(\zeta)|<\varepsilon \quad \text{para} \quad n>N(\varepsilon).$$

entonces para todos los puntos $z \in U$ y para los mismos valores de n, se tiene:

$$\left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}-\sum_{0}^{n}\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_j(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}\right|=$$
$$=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)-S_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta\right|<\frac{k!}{2\pi}\frac{\varepsilon}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{k+1}}2\pi\rho.$$

Como el segundo miembro puede hacerse, evidentemente, arbitrariamente pequeño junto con ε, la última desigualdad expresa la convergencia uniforme de la serie (4.1:15) o de la serie (4.1:13) en U, con lo cual se termina la demostración del teorema.

Para aplicar correctamente el teorema de Weierstrass es preciso recordar que éste se ha enunciado y demostrado para las series de funciones analíticas convergentes en un r e c i n t o. En el caso de un conjunto arbitrario (no abierto) éste puede no ser cierto.

Examinemos, ante todo, el ejemplo dado por Weierstrass de una función que no es derivable en ningún punto:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n\cos(a^n x\pi)$$

(a es un número entero impar, $0<b<1$). Cada término de esta serie es una función analítica en todos los puntos del eje real (e incluso en todo el plano). Además, la serie es uniformemente convergente en el eje real, puesto que el valor absoluto del término general de la serie $|b^n\cos(a^n x\pi)|$ no es superior al término b^n de la serie geométrica convergente. Sin embargo, la suma de la serie no es analítica en los puntos del eje real, puesto que, como demostró Weierstrass, ésta no es derivable para ningún x.

Como segundo ejemplo, tomemos la serie

$$\operatorname{sen} x-\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}-\operatorname{sen} x\right)+\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)+\ldots$$

Los términos de esta serie son funciones analíticas en el eje real (e incluso en todo el plano). Además, la serie converge uniformemente en el eje real, y su suma, siendo idénticamente igual a cero, representa una función analítica. En efecto, la suma parcial

$$\operatorname{sen} x+\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}-\operatorname{sen} x\right)+\ldots+\left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n}-\frac{\operatorname{sen}(n-1)x}{n-1}\right]=\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

no supera en valor absoluto a $\frac{1}{n}$, de donde se deduce que la serie converge hacia cero y, además, uniformemente.

Pero derivando término a término, se obtiene la serie

$$\cos x + (\cos 2x - \cos x) + \ldots + [\cos nx - \cos (n-1) x] + \ldots,$$

cuyas sumas parciales son:

$$\cos x, \ \cos 2x, \ \ldots, \cos nx, \ \ldots$$

Evidentemente, la sucesión de estas sumas es divergente para todo $x \neq 2k\pi$, y para $x = 2k\pi$ tiene un límite igual a 1, es decir, resulta un valor distinto de la derivada de la suma de la serie.

Basándose en el teorema de Weierstrass tenemos que sacar la conclusión de que en estos dos casos *no existe un recinto que contenga a los puntos de todo el eje real o incluso de alguna de sus partes, en el cual las series dadas fuesen uniformemente convergentes*. En caso contrario, estos ejemplos estarían en contradicción con el teorema de Weierstrass.

En muchos casos resulta ser útil el siguiente teorema, que permite asegurar la convergencia uniforme de la serie en un dominio si ésta es uniformemente convergente en la frontera del mismo.

Teorema. *Si los términos de la serie* $\sum_{0}^{\infty} f_k(z)$ *son funciones continuas en un dominio* *) *acotado* $\overline{G}$ *y son analíticas en el recinto* G, *entonces, de la convergencia uniforme de la serie en la frontera* Γ *del recinto* G *se deduce su convergencia uniforme en el dominio* $\overline{G}$.

Demostración. Según la hipótesis del teorema, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon)$ tal, que para $n > N(\varepsilon)$ y cualquier número natural p se cumple la desigualdad

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon \qquad (4.1:16)$$

en todos los puntos de la frontera Γ. Pero la función $\sum_{n+1}^{n+p} f_k(z)$ es continua en $\overline{G}$ y analítica en G. Por eso, el máximo del módulo $\left| \sum_{n+1}^{n+p} f_k(z) \right|$ en el dominio $\overline{G}$ se alcanza en la frontera y, por consiguiente, en virtud de la desigualdad (4.1:16), el valor de este máximo es menor que ε. De aquí se deduce que la desigualdad (4.1:16) se cumple para $n > N(\varepsilon)$ y cualquier número natural p en todos los puntos del dominio $\overline{G}$, lo cual significa que la serie $\sum_{0}^{\infty} f_k(z)$ es uniformemente convergente en este dominio.

*) Recordamos al lector que un recinto cerrado se llama abreviadamente dominio. Véase J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo, Análisis matemático. Vol. II. § 64-5. (*Nota del T.*)

4.2. Todo lo enunciado y demostrado en el apartado precedente para las series de funciones uniformemente convergentes se extiende inmediatamente para las sucesiones de funciones uniformemente convergentes.

Una sucesión de funciones

$$\{F_n(z)\}, \tag{4.2:1}$$

definidas en un conjunto E, se llama uniformemente convergente en este conjunto, si para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un $N(\varepsilon)$ tal, que la desigualdad

$$|F_{n+p}(z) - F_n(z)| < \varepsilon$$

se cumple para cualquier p natural en todos los puntos $z \in E$.

Evidentemente, la sucesión (4.2:1) se puede considerar como la sucesión de las sumas parciales de la siguiente serie de funciones:

$$F_0(z) + [F_1(z) - F_0(z)] + [F_2(z) - F_1(z)] + \ldots$$
$$\ldots + [F_n(z) - F_{n-1}(z)] + \ldots \tag{4.2:2}$$

por lo cual, es uniformemente convergente en E si, y sólo si, es uniformemente convergente en E la serie (4.2:2). Además, los términos de la sucesión (4.2:1) son funciones continuas y, respectivamente, analíticas junto con los términos de la serie (4.2:2). De aquí se deduce que todas las proposiciones del apartado precedente son aplicables a las sucesiones de funciones.

En lugar de sucesiones de funciones, frecuentemente, se suele considerar una familia de funciones de cierto parámetro τ que varía continuamente: $\{F_\tau(z)\}$. Supongamos que cada una de estas funciones está definida en el conjunto E, y que el parámetro τ, que para precisar es real, recorre el intervalo (α, β) $(\beta \leqslant +\infty)$. Si, para cada $\varepsilon > 0$, es posible señalar un $\beta(\varepsilon) < \beta$ tal, que para $\tau > \beta(\varepsilon)$ y $\tau' > \beta(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad

$$|F_{\tau'}(z) - F_\tau(z)| < \varepsilon$$

en todos los puntos del conjunto E, se dice que la familia $\{F_\tau(z)\}$ es uniformemente convergente en E cuando τ tiende a β. Si $\{\tau_n\}$ es una sucesión de valores del parámetro que converge hacia β, entonces, en virtud de esta definición, la sucesión $\{F_{\tau_n}(z)\}$ será uniformemente convergente en E. Su función límite $F(z)$ no depende de la sucesión $\{\tau_n\}$ que se haya elegido. En efecto, si

$$|F(z) - F_{\tau_n}(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para } n > N_1$$

y para otra sucesión $\{\tau_n'\}$ la función límite es $F'(z)$, de modo que

$$|F'(z) - F_{\tau_n'}(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para } n > N_2,$$

entonces, teniendo en cuenta que para todos los τ_n y τ'_n, suficientemente próximos a β, se verifica la desigualdad

$$|F_{\tau_n}(z) - F_{\tau'_n}(z)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

sacamos la conclusión de que

$$|F(z) - F'(z)| < \varepsilon,$$

de donde se deduce que las funciones $F'(z)$ y $F(z)$ coinciden.

De esta relación entre la familia de funciones $\{F_\tau(z)\}$ uniformemente convergente y las sucesiones de funciones $\{F_{\tau_n}(z)\}$ uniformemente convergentes se deduce que todas las proposiciones del precedente apartado se extienden también a las familias de funciones. En particular, es válida la proposición: si las funciones $F_\tau(z)$, $\alpha < \tau < \beta$, son analíticas en un recinto G y la familia $\{F_\tau(z)\}$ es uniformemente convergente en el interior de G cuando τ tiende a β, entonces la función límite $F(z)$ también es analítica en el recinto G; además, para cualquier natural k, la familia de derivadas $\{F_\tau^{(k)}(z)\}$ converge uniformemente en el interior de G hacia la derivada $F^{(k)}(z)$.

Como ejemplo de gran importancia, consideremos la **integral impropia de tipo Cauchy**.

Sea L una curva indefinida: $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, donde $\lambda(t) \to \infty$ cuando $t \to \beta$, y supongamos que cada arco suyo finito L_τ: $\alpha \leqslant t \leqslant \tau < \beta$, es rectificable. Si $\varphi(\zeta)$ es una función continua, definida en L, entonces las integrales de tipo Cauchy

$$F_\tau(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\tau} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

representan una familia de funciones, definidas y analíticas en cada recinto que no contenga puntos de la curva L.

Supongamos que esta familia es uniformemente convergente en el interior de cada recinto que no contenga a los puntos de la curva L. Esto se cumplirá, por ejemplo, si la integral $\int_L \varphi(\zeta)\, d\zeta$ es absolutamente convergente, es decir, si existe el límite

$$\lim_{\tau \to \beta} \int_{L_\tau} |\varphi(\zeta)|\, d\sigma = \int_L |\varphi(\zeta)|\, d\sigma.$$

En efecto, entonces en cualquier conjunto cerrado acotado E que no contenga puntos de la curva L, tendremos:

$$|F_{\tau'}(z) - F_\tau(z)| = \\ = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\tau'} - L_\tau} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi\rho} \left| \int_{L_{\tau'}} |\varphi(\zeta)|\, d\sigma - \int_{L_\tau} |\varphi(\zeta)|\, d\sigma \right|.$$

donde ρ es la distancia entre E y L, y, evidentemente, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un $\beta(\varepsilon) < \beta$ tal. que para $\tau > \beta(\varepsilon)$ y $\tau' > \beta(\varepsilon)$ se cumplirá la desigualdad

$$|F_{\tau'}(z) - F_\tau(z)| < \varepsilon \qquad (z \in E).$$

En las condiciones impuestas a la familia $\{F_\tau(z)\}$ existirá la integral impropia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\tau \to \beta} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\tau} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

La llamaremos integral impropia de tipo Cauchy a lo largo de la curva ilimitada L o, abreviadamente, integral de tipo Cauchy a lo largo de L. Del teorema de Weierstrass, enunciado para el caso de una familia de funciones, se deduce que esta integral representa una función analítica $F(z)$ en cada recinto que no contenga puntos de la curva L.

Del mismo teorema se deduce que la familia de derivadas

$$\left\{F_\tau^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{L_\tau} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}\right\}$$

también converge uniformemente hacia $F^{(k)}(z)$. Pero, por otra parte. la convergencia uniforme de esta familia significa que existe la integral impropia

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \lim_{\tau \to \beta} \frac{k!}{2\pi i} \int_{L_\tau} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Por consiguiente,

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Por lo tanto, hemos verificado que las propiedades establecidas anteriormente para las integrales de tipo Cauchy, son ciertas también para las integrales impropias de tipo Cauchy.

Estos resultados se extienden también sin cambio alguno al caso en que L sea una curva ilimitada, para la cual, no sólo el punto final sino también el inicial estén en el infinito, es decir, cuando la función $z = \lambda(t)$, definida en el intervalo $\alpha < t < \beta$, satisface a las condiciones $\lim\limits_{t \to \alpha} \lambda(t) = \lim\limits_{t \to \beta} \lambda(t) = \infty$ (por ejemplo, L puede ser una recta o una parábola).

Volvamos a examinar el caso general de una sucesión $\{F_n(z)\}$

Señalemos que, si la sucesión (4.2:1) es uniformemente convergente en E, la sucesión de sus módulos $\{|F_n(z)|\}$ también converge

uniformemente en E. En efecto:

$$\|F_{n+p}(z)| - |F_n(z)\| \leq |F_{n+p}(z) - F_n(z)|.$$

Por otra parte, si $\Phi(z)$ es una función acotada en valor absoluto en E:

$$|\Phi(z)| < M \qquad (z \in E),$$

y la sucesión (4.2:1) es uniformemente convergente en E, entonces la sucesión $\{\Phi(z) F_n(z)\}$ también es uniformemente convergente en E.

En efecto, si en el conjunto E para $n > N(\varepsilon)$ se verifica la desigualdad

$$|F_{n+p}(z) - F_n(z)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

entonces en este conjunto para los mismos $n > N(\varepsilon)$ se verifica también la desigualdad

$$|\Phi(z) F_{n+p}(z) - \Phi(z) F_n(z)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Supongamos, finalmente, que las funciones de la sucesión (4.2:1), uniformemente convergente en E, están acotadas uniformemente en valor absoluto en E:

$$|F_n(z)| < M \qquad (z \in E),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Entonces las sucesiones $\{[F_n(z)]^k\}$ (k es un número natural) también convergen uniformemente en E.

En efecto,

$$\begin{aligned} |[F_{n+p}(z)]^k - [F_n(z)]^k| = |[F_{n+p}(z) - F_n(z)]\{[F_{n+p}(z)]^{k-1} + \\ + [F_{n+p}(z)]^{k-2}[F_n(z)] + \ldots \\ \ldots + [F_n(z)]^{k-1}\}| < kM^{k-1}|F_{n+p}(z) - F_n(z)|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si

$$|F_{n+p}(z) - F_n(z)| < \frac{\varepsilon}{kM^{k-1}} \quad \text{para } n > N(\varepsilon),$$

se tiene

$$|[F_{n+p}(z)]^k - [F_n(z)]^k| < \varepsilon \quad \text{para } n > N(\varepsilon),$$

con lo cual queda establecida la convergencia uniforme de la sucesión

$$\{[F_n(z)]^k\}.$$

La acotación uniforme de los módulos de las funciones que forman una sucesión uniformemente convergente, siempre tiene lugar

si $F_n(z)$ son funciones continuas y E es un conjunto cerrado acotado. En efecto, $F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z)$ es una función continua en E y, por consiguiente, es acotada en valor absoluto: $|F(z)| < M'$. Tomemos $\varepsilon = 1$, entonces $|F_n(z) - F(z)| < 1$ para $n > N$; por lo tanto, $|F_n(z)| < |F(z)| + 1 < M' + 1$ para $n = N + 1, N + 2, \ldots$ Pero cada una de las funciones $F_1(z), \ldots, F_N(z)$ también está acotada en valor absoluto en E:

$$|F_k(z)| < M_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, N).$$

Haciendo $M = \max(M_0, M_1, \ldots, M_N, M' + 1)$, tendremos:

$$|F_n(z)| < M, \qquad z \in E, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

4.3. Demos la definición general de producto infinito e indiquemos algunas propiedades. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de números complejos diferentes de cero. Si existe el límite $\lim_{n\to\infty} \prod_1^n u_k$ y este límite u es distinto de cero, se dice que el producto infinito $\prod_1^\infty u_k$ es convergente, y el número u se llama valor de este producto, designándose así:

$$u = \prod_1^\infty u_k.$$

Cuando el límite $\lim_{n\to\infty} \prod_1^n u_k$ no existe o existe y es igual a cero (siendo los factores distintos de cero), se dirá que el producto infinito es divergente.

Evidentemente, para la convergencia del producto tiene que cumplirse la condición necesaria:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1.$$

En efecto, si $\lim_{n\to\infty} \prod_1^n u_k = u \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_1^n u_k}{\prod_1^{n-1} u_k} = 1.$

En virtud de esto, resulta conveniente escribir el término general del producto en la forma $u_k = 1 + v_k$, donde, en el caso de convergencia, deberá cumplirse la condición necesaria:

$$\lim_{k\to\infty} v_k = 0.$$

Demostremos que el *producto infinito* $\prod_1^{\infty}(1+v_k)$ *es convergente cuando, y sólo cuando, converge la serie* $\sum_1^{\infty}\ln(1+v_k)$.

En efecto, la convergencia de la última serie es equivalente a la convergencia de las dos series:

$$\sum_1^{\infty}\ln|1+v_k| \quad \text{y} \quad \sum_1^{\infty}\arg(1+v_k).$$

De la convergencia de éstas se deduce que las sucesiones

$$\{\sum_1^{n}\ln|1+v_k|=\ln|\prod_1^{n}(1+v_k)|\}$$

y

$$\{\sum_0^{n}\arg(1+v_k)=\mathrm{Arg}_n\,[\prod_1^{n}(1+v_k)]\}$$

son convergentes (aquí $\mathrm{Arg}_n\,[\prod_1^{n}(1+v_k)]$ designa el valor del argumento, dado en el primer miembro de la igualdad); por lo tanto, converge también la sucesión $\{\prod_1^{n}(1+v_k)\}$, y además, hacia un límite u que es distinto de cero, es decir, el producto infinito es convergente. Recíprocamente: si éste es convergente

$$\prod_1^{\infty}(1+v_k)=u\neq 0,$$

entonces existe el límite

$$\lim_{n\to\infty}\prod_1^{n}|1+v_k|=|u|\neq 0,$$

y, por consiguiente, la serie $\sum_1^{\infty}\ln|1+v_k|$ es convergente. Además, (véase el ap. 3.3 del cap. primero), tiene que existir una sucesión de valores

$$\mathrm{Arg}\,[\prod_1^{n}(1+v_k)]=\sum_1^{n}\arg(1+v_k)+2\pi\mu_n=\varphi_n,$$

que converge hacia uno de los valores del Arg u (μ_n son números enteros). De la convergencia del producto infinito $\prod_1^{\infty}(1+v_k)$ se

deduce que $\lim_{k\to\infty}(1+v_k)=1$, por lo cual, para $k>N$, se tiene:

$$|\arg(1+v_k)|<\pi$$

y

$$|\varphi_{k+1}-\varphi_k|=|\arg(1+v_{k+1})+2\pi(\mu_{k+1}-\mu_k)|>2\pi|\mu_{k+1}-\mu_k|-\pi.$$

Por otra parte, $\lim_{k\to\infty}(\varphi_{k+1}-\varphi_k)=0$. De aquí se deduce que los números enteros no negativos $|\mu_{k+1}-\mu_k|$ tienen que anularse comenzando desde uno de ellos, es decir, $\mu_n=\mu_{n+1}=\ldots=\mu$. Por esta razón, no sólo es convergente la sucesión $\{\varphi_n\}$, sino también la sucesión

$$|\varphi_n-2\pi\mu_n=\sum_1^n\arg(1+v_k)|,$$

es decir, la serie $\sum_1^\infty\arg(1+v_k)$ es convergente.

En resumen, ambas series $\sum_1^\infty\ln|1+v_k|$ y $\sum_1^\infty\arg(1+v_k)$ convergen, es decir, converge la serie $\sum_1^\infty\ln(1+v_k)$, con lo cual se termina toda la demostración.

Observando la identidad

$$\prod_1^n(1+v_k)=\exp\left[\sum_1^n\ln(1+v_k)\right],$$

sacamos la conclusión, basándose en lo expuesto, de que cuando el producto infinito es convergente, se verifica la igualdad

$$\prod_1^\infty(1+v_k)=\exp\left[\sum_1^\infty\ln(1+v_k)\right]. \qquad (4.3:1)$$

Diremos que el producto infinito $\prod_1^\infty(1+v_k)$ es *absolutamente convergente*, si es absolutamente convergente la serie $\sum_1^\infty\ln(1+v_k)$. Como en una serie absolutamente convergente se pueden reordenar arbitrariamente los términos, sin que se modifique la convergencia de la serie y la suma, de la fórmula (4.3:1) se deduce que en un producto absolutamente convergente se pueden reordenar arbitrariamente los factores, sin que se modifique la convergencia del producto y su valor.

Observando que

$$\ln(1+v_k)=v_k-\frac{v_k^2}{2}+\frac{v_k^3}{3}-\ldots=v_k\left(1-\frac{v_k}{2}+\frac{v_k^2}{3}-\ldots\right)$$

y que, por consiguiente, para $|v_k|<\frac{1}{2}$ se verifican las desigualdades

$$\frac{1}{2}|v_k|=|v_k|\left(1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\ldots\right)<|\ln(1+v_k)|<$$

$$<|v_k|\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)=\frac{3}{2}|v_k|, \qquad (4.3:2)$$

sacamos la conclusión de que la serie $\sum\limits_1^\infty |\ln(1+v_k)|$ será convergente cuando, y sólo cuando, sea convergente la serie $\sum\limits_1^\infty |v_k|$.

En resumen, *para que el producto infinito* $\prod\limits_1^\infty (1+v_k)$ *sea absolutamente convergente, es necesario y suficiente que sea absolutamente convergente la serie* $\sum\limits_1^\infty v_k$.

Sea $\{v_k(z)\}$ una sucesión de funciones uniformes y analíticas en un recinto G, que no tomen en éste el valor -1. Si la serie $\sum\limits_1^\infty \ln[1+v_k(z)]$ es uniformemente convergente en el interior del recinto G, entonces el producto infinito $\prod\limits_1^\infty [1+v_k(z)]$ también converge en este recinto y, por consiguiente, representa una función $f(z)$ que no se anula. Según la fórmula (4.3:1), $f(z)$ puede expresarse en la forma

$$f(z)=\exp\left\{\sum_1^\infty \ln[1+v_k(z)]\right\} \qquad (4.3:3)$$

y, por consiguiente, es una función analítica (puesto que la suma de la serie $\sum\limits_1^\infty \ln[1+v_k(z)]$, uniformemente convergente en el interior de G, es una función analítica).

Demostremos que el producto $\prod\limits_1^\infty [1+v_k(z)]$ es uniformemente convergente en el interior de G, es decir, que la sucesión $\left\{\prod\limits_1^n [1+v_k(z)]\right\}$ es uniformemente convergente.

En efecto, sea F un conjunto cerrado y acotado de puntos del recinto G, $M = \max |f(z)|$ y ε un número positivo arbitrario, menor que M. En virtud de la convergencia uniforme de la serie $\sum_{1}^{\infty} \ln[1 + v_k(z)]$, se tiene:

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} \ln[1+v_k(z)]\right| < \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{1}{2} \quad \text{para} \quad n > N(\varepsilon), \ z \in F.$$

Por consiguiente,

$$\left|f(z) - \prod_{1}^{n} [1+v_k(z)]\right| = \left|\exp\left(\sum_{1}^{\infty}\right) - \exp\left(\sum_{1}^{n}\right)\right| =$$

$$= \left|\exp\left(\sum_{1}^{\infty}\right)\right| \left|1 - \exp\left(-\sum_{n+1}^{\infty}\right)\right| \leqslant M\left[\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left[1 + \frac{1}{2!}\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2 + \ldots\right] <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = \varepsilon$$

para $n > N(\varepsilon)$ en todos los puntos del conjunto F, con lo cual queda demostrada la convergencia uniforme del producto infinito.

Debido a la desigualdad

$$|\ln[1+v_k(z)]| < \frac{3}{2}|v_k(z)|,$$

que se cumple si $|v_k(z)| < \frac{1}{2}$, la serie $\sum_{1}^{\infty} \ln[1 + v_k(z)]$ será absoluta y uniformemente convergente en el interior de G, si existe una serie convergente $\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_k$ de términos constantes y positivos, tal que $|v_k(z)| < \varepsilon_k$, comenzando desde un valor suficientemente grande $k \geqslant K$, en todos los puntos del recinto G. De aquí se deduce que, *para que el producto infinito*

$$\prod_{1}^{\infty} [1+v_k(z)]$$

sea absoluta y uniformemente convergente en el interior de un recinto G y, por consiguiente, represente en el mismo una función analítica $f(z)$ que no se anule, es suficiente que desde un valor $k \geqslant K$ en adelante, en todo el recinto G se cumplan las desigualdades

$$|v_k(z)| < \varepsilon_k,$$

donde ε_k son los términos de una serie convergente.

Claro está, la condición enunciada no es necesaria para la convergencia uniforme del producto.

Ampliemos, finalmente, la clase de productos infinitos, permitiendo también aquellos que poseen un número finito de factores (uno o más) nulos. Si $n_0 > 1$ es el índice, comenzando desde el cual todos los términos del producto son distintos de cero, entonces al producto $\prod_1^\infty u_k$ llamaremos convergente cuando, y sólo cuando, sea convergente el producto infinito de factores distintos de cero $\prod_{n_0}^\infty u_k$. El valor de todo el producto infinito será el número 0:

$$\prod_1^\infty u_k = \lim_{n\to\infty} \prod_1^n u_k = \lim_{n\to\infty} \left(\prod_1^{n_0-1} u_k \prod_{n_0}^n u_k \right) = 0.$$

Teniendo en cuenta esta generalización del concepto de producto infinito convergente, se puede enunciar la siguiente proposición: *Un producto infinito se anula cuando, y sólo cuando, se anula al menos uno de sus factores.*

Particularmente importantes son los productos infinitos de la forma $\prod_1^\infty f_k(z)$, donde $f_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ son funciones analíticas que pueden anularse en algunos puntos del recinto dado G. Aquí se considerarán tales productos en las siguientes condiciones:

a) cada conjunto cerrado y acotado $F \subset G$ puede contener solamente un conjunto finito de puntos en los cuales se anulan las funciones de la sucesión $\{f_k(z)\}$;

b) para cada conjunto cerrado y acotado $F \subset G$ existe un número natural $n(F) > 1$ tal, que para $k > n(F)$ ninguna de las funciones $f_k(z)$ se anula en los puntos del conjunto F.

El lector comprobará fácilmente que estas condiciones equivalen a las siguientes:

a′) el conjunto E de puntos, en los cuales se anula al menos una de las funciones $f_k(z)$, no tiene puntos de acumulación en el interior de G;

b′) en cada punto de E solamente se anula un número finito de funciones $\{f_k(z)\}$.

Supongamos también que se cumple la condición c): la serie $\sum_{n(F)+1}^\infty \ln f_k(z)$ converge uniformemente en cada conjunto cerrado y acotado F perteneciente a G. Entonces el producto $\prod_{n(F)+1}^\infty f_k(z)$ es uniforme-

mente convergente en F, es decir, es uniformemente convergente la sucesión $\{\prod_{n(F)+1}^{n} f_k(z)\}$ $(n \geqslant n(F)+1)$.

Como la función $\prod_{1}^{n(F)} f_k(z)$ es continua en F, estará acotada en valor absoluto y, por consiguiente, la sucesión de funciones

$$\prod_{1}^{n} f_k(z) = \prod_{1}^{n(F)} f_k(z) \prod_{n(F)+1}^{n} f_k(z)$$

también será uniformemente convergente en F.

Resumiendo, *de las hipótesis hechas respecto* $\{f_k(z)\}$ *se deduce que el producto infinito* $\prod_{1}^{\infty} f_k(z)$ *es uniformemente convergente en el interior de* G. *Por consiguiente, éste representa en este recinto una función analítica*

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} f_k(z),$$

que se anula en aquellos puntos de G, *y sólo en aquellos, en los cuales se anula al menos una de las funciones* $f_k(z)$.

§ 5. SERIES DE POTENCIAS. RELACION CON LAS SERIES DE FOURIER. DESARROLLO DE UNA FUNCION ANALITICA EN SERIE DE POTENCIAS

5.1. Las series de la forma

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots, \quad (5.1:1)$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, z_0$ son unos números complejos dados, se llaman *series de potencias*. Estas forman la clase de series de funciones analíticas más simple y a la vez más importante. El siguiente teorema da una idea completa del campo de convergencia de las series de potencias.

Teorema de Cauchy-Hadamard. Sea $\Lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Entonces, si* $\Lambda = \infty$, *la serie* (5.1:1) *es convergente en el único punto* $z = z_0$; si $0 < \Lambda < \infty$, *la serie es absolutamente convergente en el círculo* $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ *y es divergente en el exterior de este círculo*; finalmente, *si* $\Lambda = 0$, *la serie es absolutamente convergente en todo el plano*.

De este modo, cuando $0 < \Lambda < \infty$, existe un círculo con el centro en el punto $z = z_0$, en el interior del cual la serie es absolutamente convergente y en el exterior del cual la serie es divergente.

Este se llama *círculo de convergencia de la serie de potencias* y su radio $R = \frac{1}{\Lambda}$, radio de convergencia de la misma. Los casos $\Lambda = \infty$, y $\Lambda = 0$ se pueden considerar como casos límites. En el primero de ellos el círculo de convergencia se reduce a un punto z_0 y su radio R es igual a cero. En el segundo, el círculo de convergencia se extiende a todo el plano, de modo que se puede considerar que su radio es igual a ∞. Llamando en los tres casos al número R radio de convergencia de la serie de potencias, el contenido de la fórmula de Cauchy-Hadamard puede expresarse por la fórmula

$$R = \frac{1}{\Lambda}. \tag{5.1:2}$$

Esta última se llama *fórmula de Cauchy-Hadamard*.

He aquí la demostración del teorema. Consideramos tres casos:

a) $\Lambda = \infty$. En este caso, para cualquier $z \neq z_0$ existirá un conjunto infinito de valores $n = n_k$, para los cuales

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z - z_0|}.$$

Pero de aquí se deduce que $|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| > 1$ y en ningún punto $z \neq z_0$ se cumple la condición necesaria para la convergencia de la serie (5.1:1): $\lim\limits_{n \to \infty} a_n (z - z_0)^n = 0$. Por lo tanto, cuando $\Lambda = \infty$, la serie (5.1:1) converge solamente en el único punto: $z = z_0$.

b) $0 < \Lambda < \infty$. Tomemos primero un punto z en el interior del círculo $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ y sea $|z - z_0| = \frac{\theta^2}{\Lambda}$, donde $0 < \theta < 1$ (en el punto $z = z_0$ la convergencia de la serie es evidente). Como $\frac{\theta}{|z - z_0|} = \frac{\Lambda}{\theta} > \Lambda$, todos los valores de $\sqrt[n]{|a_n|}$, comenzando desde uno de ellos en adelante, tienen que ser menores que $\frac{\theta}{|z - z_0|}$. Por esta razón, comenzando desde cierto n, los módulos de todos los términos de la serie (5.1:1) satisfacen a la desigualdad

$$|a_n (z - z_0)^n| < \theta^n,$$

y como la serie $1 + \theta + \ldots + \theta^n + \ldots$ es convergente, la serie (5.1:1) será absolutamente convergente en todo punto z situado en el interior del círculo $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$.

Supongamos ahora que z está situado en el exterior de este círculo. Entonces $\Lambda > \frac{1}{|z - z_0|}$ y, por consiguiente, existirá un conjunto

infinito de valores $n = n_k$, para los cuales

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z-z_0|}.$$

Pero de aquí se deduce que $|a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}| > 1$, es decir, la condición necesaria para la convergencia de la serie (5.1:1): $\lim_{n\to\infty} a_n(z-z)^n = 0$, no se cumple en ningún punto que esté situado en el exterior del círculo $|z-z_0| < \frac{1}{\Lambda}$.

c) $\Lambda = 0$. Para cualquier $z \neq z_0$ y $0 < \theta < 1$, la desigualdad

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\theta}{|z-z_0|}$$

se cumplirá comenzando desde valores suficientemente grandes de n en adelante. Por consiguiente, comenzando desde cierto n, los módulos de todos los términos de la serie (5.1:1) satisfacen a las desigualdades

$$|a_n(z-z_0)^n| < \theta^n,$$

de donde se deduce la convergencia absoluta de la serie (5.1:1) en cualquier punto del plano.

Para las aplicaciones de la fórmula de Cauchy-Hadamard, en muchos casos suele ser útil la relación siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}.$$

Para demostrarla, observemos que

$$e^n = 1 + \frac{n}{1!} + \ldots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!}\left[1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right],$$

de donde se deduce que

$$e^n < n\frac{n^n}{n!} + \frac{n^n}{n!}\left[1 + \frac{n}{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \ldots\right] = (2n+1)\frac{n^n}{n!},$$

y, por otra parte,

$$e^n > \frac{n^n}{n!}.$$

Así, pues,

$$\frac{1}{e^n} < \frac{n!}{n^n} < \frac{2n+1}{e^n},$$

de donde resulta lo que se afirmaba*)

*) En el cap. séptimo obtendremos una relación de la cual se deduce que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}(1+\varepsilon_n)$$

donde $\varepsilon_n \to 0$ cuando n tiende al infinito.

Aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard el lector comprobará fácilmente que los radios de convergencia de las series

$$\text{a)}\ \sum_{1}^{\infty} n^k z^n, \qquad \text{b)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \qquad \text{c)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad \text{d)}\ \sum_{1}^{\infty} n! z^n$$

son iguales a: 1, $\frac{1}{e}$, ∞, 0, respectivamente.

En muchos casos resulta conveniente determinar el radio de convergencia de una serie de potencias mediante el criterio de D'Alembert. Así, en el ejemplo b) el módulo de la razón de un término al anterior es igual a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n |z|$ y, por consiguiente, tiende al límite $e|z|$ cuando n tiende al infinito. De aquí se deduce que la serie es absolutamente convergente si $|z| < \frac{1}{e}$ y es divergente si $|z| > \frac{1}{e}$, es decir, su radio de convergencia es igual a $\frac{1}{e}$.

Examinemos también el ejemplo de la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{k!}$. Aquí los coeficientes a_k son iguales a 0 si $n \neq k^2$, e iguales a $\frac{1}{k!}$ si $n = k^2$. De aquí que

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k^2]{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k^2]{\frac{k^k}{k!}\cdot\frac{1}{k^k}} = 1$$

y el radio de convergencia es igual a 1. El módulo de la razón de un término al anterior es, en este caso, igual a $\frac{|z|^{2k+1}}{k+1}$ y, por consiguiente, tiende a cero si $|z| < 1$, y tiende al infinito si $|z| > 1$. De aquí que el radio de convergencia de la serie es de nuevo igual a 1.

A continuación consideraremos las series de potencias para las cuales $R > 0$, es decir, $\Lambda < \infty$. De la igualdad de Cauchy-Hadamard

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

sacamos la conclusión de que para cualquier $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < R)$

$$|a_n| < \frac{1}{(R-\varepsilon)^n} \quad \text{para } n > N(\varepsilon) \qquad (5.1:3)$$

si $R < \infty$, y

$$|a_n| < \varepsilon^n \quad \text{para } n > N(\varepsilon) \qquad (5.1:4)$$

si $R = \infty$.

En resumen, los coeficientes de una serie de potencias cuyo radio de convergencia sea mayor que cero, crecen con una rapidez no mayor que una progresión geométrica de razón $\frac{1}{R-\varepsilon}$ $(R < \infty)$ o ε $(R = \infty)$, donde ε es un número positivo arbitrariamente pequeño.

Del teorema de Cauchy-Hadamard, como consecuencia, se deduce el siguiente:

Primer teorema de Abel. *Si la serie* (5.1:1) *converge en un punto $z_1 \neq z_0$, entonces converge absolutamente en el interior de la circunferencia con el centro en z_0, que pasa por el punto z_1.*

En efecto, de la convergencia de la serie (5.1:1) en el punto $z_1 \neq z_0$ se deduce, en primer lugar, que su radio de convergencia es mayor que cero (posiblemente, es infinito), y, en segundo lugar, que z_1 está situado en el interior o en la frontera del círculo de convergencia (en todo punto exterior al círculo de convergencia la serie de potencias es divergente). Por esta razón, el círculo $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ es una parte de todo el círculo de convergencia o coincide con el mismo; de esto se deduce que la serie es absolutamente convergente en tal círculo.

Demostremos ahora que la serie de potencias es uniformemente convergente en el interior de su círculo de convergencia $|z - z_0| < R$. Evidentemente, es suficiente demostrar que la serie es uniformemente convergente en todo círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r < R$. En efecto, cualquier conjunto cerrado y acotado F, perteneciente al círculo de convergencia, estará contenido en el círculo $|z - z_0| \leqslant r$ para r suficientemente próximo a R.

Tomemos en el círculo de convergencia un punto ζ situado en el exterior de la circunferencia $|z - z_0| = r$, $r < |\zeta - z_0| = \rho < R$. En este punto la serie (5.1:1) tiene que ser absolutamente convergente:

$$\sum_0^\infty |a_n| |\zeta - z_0|^n = \sum_0^\infty |a_n| \rho^n < \infty.$$

Como en cada punto del círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r$ se cumple la desigualdad

$$|a_n (z - z_0)^n| \leqslant |a_n| \rho^n,$$

por el criterio de comparación de las series deducimos que la serie (5.1:1) es uniformemente convergente en cada círculo $|z - z_0| \leqslant r < R$, con lo cual se termina la demostración.

Obsérvese que aquí no se afirmaba que la serie de potencias es uniformemente convergente en su círculo de convergencia. En efecto, en el ap. 4.1 se había demostrado que la progresión geométrica

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots,$$

que, evidentemente, representa una serie de potencias con el radio de convergencia igual a uno, no converge uniformemente en el círculo unidad, es decir, en su círculo de convergencia.

5.2. Coma la serie de potencias

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + \ldots + a_n (z - z_0)^n + \ldots \qquad (5.2{:}1)$$

es una serie de funciones analíticas uniformemente convergente en el interior del recinto K: $|z - z_0| < R$ $(R > 0)$, puede aplicarse el teorema de Weierstrass del ap. 4.1. Por consiguiente, la suma $f(z)$ de la serie de potencias es una función analítica en el círculo K y su derivada de orden cualquiera k puede obtenerse derivando término a término la serie (5.2:1):

$$f^{(k)}(z) = k! a_k + (k+1) k \ldots 2 a_{k+1} (z - z_0) + \\ + \ldots + n(n-1) \ldots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k} + \ldots \qquad (5.2{:}2)$$

Haciendo aquí $z = z_0$, resulta

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k,$$

de donde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n, \ldots). \qquad (5.2{:}3)$$

Evidentemente, las fórmulas obtenidas son válidas también para $k = 0$, lo cual se obtiene inmediatamente de la serie (5.2:1) para $z = z_0$. Poniendo en la expresión (5.2:1) los valores hallados de los coeficientes, tendremos:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots \qquad (5.2{:}4)$$

La serie que figura en el segundo miembro se llama Serie de Taylor de la función $f(z)$. Por consiguiente, queda demostrado que toda serie de potencias es la serie de Taylor para su suma $f(z)$.

Supongamos que las sumas de dos series de potencias

$$A_0 + A_1 (z - z_0) + A_2 (z - z_0)^2 + \ldots + A_n (z - z_0)^n + \ldots \qquad (5.2{:}5)$$

y

$$B_0 + B_1 (z - z_0) + B_2 (z - z_0)^2 + \ldots + B_n (z - z_0)^n + \ldots \qquad (5.2{:}6)$$

con los radios positivos de convergencia R_1 y R_2, coinciden en un entorno del punto z_0, es decir,

$$A_0 + A_1 (z - z_0) + A_2 (z - z_0)^2 + \ldots = \\ = B_0 + B_1 (z - z_0) + B_2 (z - z_0)^2 + \ldots,$$

si $|z - z_0| < r$. Designando con $F(z)$ el valor común de estas series, tendremos según las fórmulas (5.2:3):

$$A_0 = B_0 = F(z_0), \; A_1 = B_1 = \frac{F'(z_0)}{1!}, \ldots, \quad A_n = B_n = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}, \ldots$$

Por lo tanto, los coeficientes correspondientes de las series y, por consiguiente, sus radios de convergencia R_1 y R_2, coinciden; las series son idénticas. Hemos obtenido el teorema de unicidad del desarrollo en serie de potencias. *)

Teorema. *De la coincidencia de las sumas de dos series de potencias en un entorno del punto z_0 se deduce la igualdad de los coeficientes de las mismas potencias de $z - z_0$.*

En el teorema es esencial que z_0 es el mismo para ambas series. Señalemos que este teorema puede enunciarse del modo siguiente: *solamente puede existir una serie de potencias de $(z - z_0)$ que tenga una suma dada en un entorno del punto z_0.*

Este enunciado explica la misma denominación del teorema: teorema de unicidad.

Como ilustración de la propiedad demostrada, examinemos la forma de las series de potencias de z que representan funciones pares e impares de z, respectivamente.

Sea $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$, y supongamos primero que $f(z)$ es una función par, es decir, $f(-z) = f(z)$. Entonces, sustituyendo z por $-z$, tendremos:

$$f(-z = a_0 - a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + (-1)^n a_n z^n + \ldots$$

Como, por la hipótesis, las sumas de estas dos series coinciden, en virtud del teorema de identidad, resulta:

$$a_n = (-1)^n a_n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

de donde para n impar

$$a_{2m+1} = -a_{2m+1}, \text{ o bien } a_{2m+1} = 0 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

En resumen, si la suma de una serie de potencias es una función par, todos los coeficientes de potencias impares de z tienen que ser iguales a cero y, por consiguiente, el desarrollo de $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots + a_{2m} z^{2m} + \ldots$$

Análogamente, si $f(z)$ es una función impar, es decir, $f(-z) = -f(z)$, resulta que todos los coeficientes de potencias pares de z tienen que ser iguales a cero, de modo que el desarrollo de $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = a_1 z + a_3 z^3 + \ldots + a_{2m+1} z^{2m+1} + \ldots$$

Para que el lector comprenda que el teorema de identidad no se puede considerar por sí mismo evidente, enunciemos la propiedad de identidad para las series en forma general. Se dirá que un desarrollo

*) En los libros de matemáticas españoles suele llamarse teorema (o principio) de identidad. (*Nota del T.*)

en serie

$$A_0\varphi_0(z)+A_1\varphi_1(z)+\ldots+A_n\varphi_n(z)+\ldots$$

según las funciones dadas

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z),\ \ldots$$

posee la propiedad de identidad en un conjunto E, si de la coincidencia de las sumas de dos series

$$A_0\varphi_0(z)+A_1\varphi_1(z)+\ldots+A_n\varphi_n(z)+\ldots,$$
$$B_0\varphi_0(z)+B_1\varphi_1(z)+\ldots+B_n\varphi_n(z)+\ldots,$$

convergentes en este conjunto, se deduce la igualdad de los coeficientes correspondientes:

$$A_0=B_0,\ A_1=B_1,\ \ldots,\ A_n=B_n,\ \ldots$$

Escribiendo la relación

$$A_0\varphi_0(z)+A_1\varphi_1(z)+\ldots+A_n\varphi_n(z)+\ldots=$$
$$=B_0\varphi_0(z)+B_1\varphi_1(z)+\ldots+B_n\varphi_n(z)+\ldots$$

en la forma

$$C_0\varphi_0(z)+C_1\varphi_1(z)+\ldots+C_n\varphi_n(z)+\ldots=0,$$

donde

$$C_0=A_0-B_0,\ C_1=A_1-B_1,\ \ldots,\ C_n=A_n-B_n,\ \ldots,$$

puede enunciarse la propiedad de identidad de otro modo: los desarrollos en series de funciones $\{\varphi_n(z)\}$ poseen la propiedad de identidad en un conjunto E, si de la anulación de la suma de la serie para todos los puntos z pertenecientes a E, se deduce que todos los coeficientes de la serie son iguales a cero:

$$C_0=C_1=\ldots=C_n=\ldots=0.$$

Como se demostró, los desarrollos en series de las funciones $\varphi_n(z)=(z-z_0)^n$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$ poseen la propiedad de identidad en cualquier círculo con el centro en z_0. Tomando, por ejemplo,

$$\varphi_0(z)=1,\ \varphi_1(z)=z-1,\ \varphi_2(z)=z^2-z,\ \ldots,\ \varphi_n(z)=z^n-z^{n-1},\ \ldots,$$

resulta que la propiedad de identidad no se cumple en el círculo $|z|<1$.

En efecto, para la serie

$$\varphi_0(z)+\varphi_1(z)+\ldots+\varphi_n(z)+\ldots,$$

cuyos coeficientes son distintos de cero $(C_0=C_1=C_2=\ldots$ $\ldots=C_n=\ldots=1)$, la suma parcial

$$\varphi_0(z)+\varphi_1(z)+\ldots+\varphi_n(z)=1+(z-1)+(z^2-z)+\ldots+(z^n-z^{n-1})$$

es igual a z^n, y como para $|z| < 1$: $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$, la serie dada es convergente en el interior del círculo $|z| < 1$ (y además, uniformemente) y su suma es igual a cero.

De aquí se deduce que, si la serie de funciones $\{\varphi_n(z)\}$:

$$A_0\varphi_0(z) + A_1\varphi_1(z) + \ldots + A_n\varphi_n(z) + \ldots,$$

es convergente en el interior del círculo $|z| < 1$ y su suma es $F(z)$, entonces todas las series

$$(A_0 + \lambda)\varphi_0(z) + (A_1 + \lambda)\varphi_1(z) + \ldots + (A_n + \lambda)\varphi_n(z) + \ldots,$$

donde λ es un número complejo arbitrario, también son convergentes en el interior del círculo $|z| < 1$ y poseen una misma suma $F(z)$. En resumen, las sumas de dos series de funciones de un sistema $\{\varphi_n(z)\}$ pueden coincidir, a pesar de que ninguno de los coeficientes de una serie es igual al coeficiente correspondiente de la otra.

El método de los coeficientes indeterminados está basado en la propiedad de identidad de los desarrollos en serie de funciones de un sistema dado $\{\varphi_n(z)\}$.

Si los coeficientes de una serie convergente

$$A_0\varphi_0(z) + A_1\varphi_1(z) + \ldots + A_n\varphi_n(z) + \ldots$$

son desconocidos («coeficientes indeterminados») y si mediante ciertas operaciones efectuadas sobre esta serie y unas series dadas, resulta una relación de la forma

$$C_0\varphi_0(z) + C_1\varphi_1(z) + \ldots + C_n\varphi_n(z) + \ldots = 0,$$

cuyos coeficientes representan unas combinaciones determinadas de las incógnitas $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ y otros números dados, entonces, según la propiedad de identidad se obtiene un sistema infinito de ecuaciones:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \ldots, \quad C_n = 0, \ldots$$

Este último sistema puede servir para buscar los coeficientes A_0, $A_1, \ldots, A_n$. En adelante emplearemos este método para dividir las series de potencias.

En el caso más sencillo, cuando las series de potencias (5.2:5) y (5.2:6) se reducen a polinomios

$$A_0 + A_1z + \ldots + A_nz^n \text{ y } B_0 + B_1z + \ldots + B_mz^m,$$

para aplicar el teorema de identidad no es necesario que se sepa que los valores de estos polinomios coinciden para todos los puntos z pertenecientes a cierto círculo. Si se conoce que los grados de los polinomios no superan a cierto número natural N ($n \leqslant N$ y $m \leqslant N$), entonces, de la coincidencia de los valores de los polinomios en $N + 1$

puntos distintos se deduce que los grados de estos polinomios son iguales ($n = m$) y que los coeficientes correspondientes son iguales dos a dos:

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \; \ldots, \quad A_n = B_n.$$

Para las series de potencias (que en cierto sentido pueden considerarse como un género de «polinomios de grado indefinidamente grande») se puede deducir la igualdad de los coeficientes solamente cuando coinciden las sumas de las series en un conjunto infinito de puntos. No obstante, no hay necesidad de que se sepa que coinciden las sumas de las series en todos los puntos de cierto círculo (precisamente esto se suponía cuando se demostraba el teorema de identidad para las series de potencias). Es suficiente saber que las series (5.2:5) y (5.2:6) coinciden en un conjunto de puntos con el punto de acumulación z_0 $\left(\text{por ejemplo, en el conjunto de puntos } z_n = z_0 + \frac{1}{n} \; (n = 1, 2, 3, \ldots)\right)$. Precisamente, subsiste el siguiente teorema, que es una generalización del pripcipio de identidad demostrado.

Si las sumas de dos series de potencias

$$A_0 + A_1 (z - z_0) + \ldots + A_n (z - z_0)^n + \ldots$$

y

$$B_0 + B_1 (z - z_0) + \ldots + B_n (z - z_0)^n + \ldots$$

coinciden en un conjunto de puntos E, para el cual z_0 es un punto de acumulación, entonces los coeficientes de estas series son iguales entre sí, es decir,

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \; \ldots, \; A_n = B_n, \; \ldots$$

D e m o s t r a c i ó n. Sea $\{z_n\}$ alguna sucesión de puntos del conjunto E, distintos de z_0, convergente hacia z_0: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. De la subsistencia de la igualdad

$$A_0 + A_1 (z_n - z_0) + A_2 (z_n - z_0)^2 + \ldots =$$
$$= B_0 + B_1 (z_n - z_0) + B_2 (z_n - z_0)^2 + \ldots, \quad (5.2:7)$$

para cualquier n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), y teniendo en cuenta que la suma de la serie de potencias es continua en el interior del círculo de convergencia, sacamos la conclusión de que

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} [A_0 + A_1 (z_n - z_0) + A_2 (z_n - z_0)^2 + \ldots] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [B_0 + B_1 (z_n - z_0) + B_2 (z_n - z_0)^2 + \ldots] = B_0,$$

o sea,

$$A_0 = B_0.$$

De aquí se deduce que

$$A_1(z_n - z_0) + A_2(z_n - z_0)^2 + \ldots = B_1(z_n - z_0) + B_2(z_n - z_0)^2 + \ldots$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y como $z_n \neq z_0$, resulta

$$A_1 + A_2(z_n - z_0) + \ldots = B_1 + B_2(z_n - z_0) + \ldots$$

para cualquier n. Pasando de nuevo a límites para $n \to \infty$, obtenemos:

$$A_1 = B_1.$$

Supongamos que, en general, ya se han demostrado las igualdades

$$A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \ \ldots, \ A_k = B_k.$$

Entonces de la igualdad (5.2:7) se deduce que para cualquier n ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$A_{k+1}(z_n - z_0)^{k+1} + A_{k+2}(z_n - z_0)^{k+2} + \ldots =$$
$$= B_{k+1}(z_n - z_0)^{k+1} + B_{k+2}(z_n - z_0)^{k+2} + \ldots,$$

o bien, simplificando por $(z_n - z_0)^{k+1} \neq 0$ y pasando a límites para $n \to \infty$, $A_{k+1} = B_{k+1}$. Con esto el teorema queda demostrado.

5.3. Cerciorémonos de que la serie de potencias puede considerarse como cierta analogía de la serie de Fourier para la función $f(z)$. Con este fin, observemos que las potencias $(z - z_0)^n$ poseen la siguiente propiedad de ortogonalidad en cada circunferecia $|z - z_0| = \rho$:

$$\int_0^{2\pi} (z - z_0)^n \overline{(z - z_0)}^m \, d\theta = 0 \quad \text{para} \quad n \neq m. \tag{5.3:1}$$

En efecto, haciendo $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$, tendremos:

$$(z - z_0)^n \overline{(z - z_0)}^m = \rho^{m+n} e^{i(n-m)\theta}$$

y, por consiguiente,

$$\int_0^{2\pi} (z - z_0)^n \overline{(z - z_0)}^m \, d\theta = \rho^{m+n} \left[\frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Supongamos que ρ satisface a las condiciones: $0 < \rho < R$ (R es el radio de convergencia de la serie). Como la serie de potencias es uniformemente convergente en la circunferencia $|\zeta - z_0| = \rho$, situada en el círculo de convergencia K, en la misma circunferencia también será uniformemente convergente la serie

$$f(\zeta)\overline{(\zeta - z_0)}^m = a_0 \overline{(\zeta - z_0)}^m + \ldots + a_n(\zeta - z_0)^n \overline{(\zeta - z_0)}^m + \ldots$$

Integrándola término a término y teniendo en cuenta la relación de ortogonalidad (5.3:1), tendremos:

$$\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,\overline{(\zeta-z_0)}^m\,d\theta = a_m \int_0^{2\pi} (\zeta-z_0)^m\,\overline{(\zeta-z_0)}^m\,d\theta = 2\pi\rho^{2m}a_m.$$

De aquí que

$$a_m = \frac{1}{2\pi\rho^{2m}} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\,\overline{(\zeta-z_0)}^m\,d\theta \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (5.3:2)$$

y, por consiguiente, la serie de potencias puede escribirse en la forma

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\rho^{2m}} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\,\overline{(\zeta-z_0)}^m\,d\theta\cdot(z-z_0)^m. \qquad (5.3:3)$$

Así, pues, la serie de potencias representa el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de polinomios $\{(z-z_0)^m\}$, ortogonales en cada circunferencia con el centro en el punto z_0.

Como una de las aplicaciones de las relaciones de ortogonalidad (5.3:1) se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_0^n a_m (z-z_0)^m\right|^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_0^n a_m (z-z_0)^m \cdot \sum_0^n \bar{a}_m\,\overline{(z-z_0)}^m\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k,\,m=0}^{n} a_k\bar{a}_m (z-z_0)^k\,\overline{(z-z_0)}^m\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k,\,m=0}^{n} a_k\bar{a}_m \int_0^{2\pi} (z-z_0)^k\,\overline{(z-z_0)}^m\,d\theta = \sum_0^n |a_m|^2\rho^{2m}.$$

(Todas las integrales, correspondientes a $k \neq m$, son nulas)

En resumen,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_0^n a_m (z-z_0)^m\right|^2 d\theta = \sum_0^n |a_m|^2\rho^{2m}.$$

Suponiendo aquí $\rho < R$, pasemos a límites para $n \to \infty$. Como la sucesión

$$\left|\sum_0^n a_m (z-z_0)^m\right|$$

está formada por funciones continuas y es uniformemente convergente en la circunferencia $|z - z_0| = \rho$, la sucesión de funciones continuas $\{|\sum_0^n a_m (z - z_0)^m|\}$ será uniformemente convergente en la misma circunferencia (véase la observación al final del ap. 4.2). Por consiguiente, es posible el paso al límite bajo el signo integral (correspondiente en el caso de las series a la integración término a término), obteniendo:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_0^n a_m (z-z_0)^m\right|^2 d\theta = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n |a_m|^2\rho^{2m}.$$

De aquí se deduce, en primer lugar, que la serie $\sum_0^\infty |a_m|^2\rho^{2m}$ es convergente y, en segundo lugar, que su suma es igual a la integral $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2\, d\theta$:

$$\sum_0^\infty |a_m|^2\rho^{2m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta. \tag{5.3:4}$$

Esta relación es análoga a la igualdad de Parseval en la teoría de las series de Fourier. De la relación (5.3:4) se deduce que la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta,$$

que representa el valor medio del cuadrado del módulo de la función analítica $f(z)$ en la circunferencia $|z-z_0| = \rho$, es una función no decreciente de ρ. Por consiguiente, siempre existe el límite (finito o infinito)

$$\lim_{\rho\to R} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta.$$

Transformemos la expresión (5.3:2) de los coeficientes de la serie de potencias. Con este fin, hagamos $\zeta - z_0 = \rho e^{i\theta}$; entonces tendremos:

$$a_m = \frac{1}{2\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{-im\theta}\, d\theta. \tag{5.3:5}$$

Por otra parte, según el teorema integral de Cauchy:

$$\int_0^{2\pi} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{m-1}\, d\zeta = 0 \quad (m \geqslant 1),$$

o bien,

$$\int_0^{2\pi} f(\zeta)\, \rho^{m-1} e^{i(m-1)\theta} \rho i e^{i\theta}\, d\theta = 0,$$

y, finalmente,

$$0 = \frac{1}{2\pi\rho^m} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\, e^{im\theta}\, d\theta \quad (m \geqslant 1). \tag{5.3:6}$$

Sumando y restando (5.3:5) y (5.3:6), obtenemos:

$$a_m = \frac{1}{\pi\rho^m} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \cos m\theta\, d\theta = \frac{-i}{\pi\rho^m} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \quad (m \geqslant 1). \tag{5.3:7}$$

Sea

$$a_m = \alpha_m + i\beta_m \quad \text{y} \quad f(\zeta) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta);$$

entonces de las fórmulas (5.3:7) hallamos:

$$\left.\begin{aligned} \rho^m \alpha_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \cos m\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \theta) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m \geqslant 1) \\ \rho^m \beta_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \theta) \cos m\theta\, d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{5.3:8}$$

Además, la fórmula (5.3:5) para $m = 0$ da:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta)\, d\theta, \quad \beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \theta)\, d\theta.$$

De aquí se deduce que los números α_0, $\rho^m\alpha_m$ y $-\rho^m\beta_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ son los coeficientes de Fourier de la función $u(\rho, \theta) = \operatorname{Re} f(z_0 + \rho e^{i\theta})$ y los números β_0, $\rho^m\beta_m$ y $\rho^m\alpha_m$, los coeficientes de Fourier de la función $v(\rho, \theta) = \operatorname{Im} f(z_0 + \rho e^{i\theta})$.

En otras palabras, las funciones $u(\rho, \theta)$ y $v(\rho, \theta)$ poseen desarrollos de Fourier conjugados:

$$u(\rho, \theta) \sim \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \rho^m (\alpha_m \cos m\theta - \beta_m \operatorname{sen} m\theta),$$

$$v(\rho, \theta) \sim \beta_0 + \sum_1^{\infty} \rho^m (\beta_m \cos m\theta) + \alpha_m \operatorname{sen} m\theta).$$

Separando las partes real e imaginaria en la serie de potencias
$f(z_0+\rho e^{i\theta}) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta) =$

$$= \sum_0^\infty a_m (z-z_0)^m = \sum_0^\infty (\alpha_m + i\beta_m)\rho^m (\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta)$$

resultan estas mismas series:

$$\left.\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \alpha_0 + \sum_1^\infty (\alpha_m\rho^m \cos m\theta - \beta_m\rho^m \operatorname{sen} m\theta), \\ v(\rho, \theta) &= \beta_0 + \sum_1^\infty (\beta_m\rho^m \cos m\theta + \alpha_m\rho^m \operatorname{sen} m\theta). \end{aligned}\right\} \quad (5.3{:}9)$$

En resumen, *las partes real e imaginaria de una serie de potencias son las series de Fourier para las partes real e imaginaria de su suma. Estas series son conjugadas entre sí.*

Demostremos también cómo se puede obtener de la igualdad (5.3:4) la igualdad de Parseval para las funciones $u(\rho, \theta)$ y $v(\rho, \theta)$.

Observando que

$$|f(z_0+\rho e^{i\theta})|^2 = |u(\rho, \theta)|^2 + |v(\rho, \theta)|^2,$$

representemos (5.3:4) en la forma

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(\rho, \theta)]^2\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v(\rho, \theta)]^2\, d\theta = \sum_0^\infty |a_m|^2\rho^{2m}. \quad (5.3{:}10)$$

Por otra parte, fácilmente se puede obtener una relación que exprese la diferencia de las integrales $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(\rho, \theta)]^2\, d\theta$ y $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v(\rho, \theta)]^2\, d\theta$, si recordamos que la media aritmética de los valores que toma la función analítica $[f(z_0+\rho e^{i\theta})]^2$ en la circunferencia $|z-z_0| = \rho$, tiene que coincidir con su valor en el centro de la circunferencia (ap. 3.2):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(z_0+\rho e^{i\theta})]^2\, d\theta = [f(z_0)]^2. \quad (5.3{:}11)$$

Observando que

$$[f(z_0+\rho e^{i\theta})]^2 = [u(\rho, \theta)]^2 - [v(\rho, \theta)]^2 + 2iu(\rho, \theta)\, v(\rho, \theta),$$
$$[f(z_0)]^2 = a_0^2 = \alpha_0^2 - \beta_0^2 + 2i\alpha_0\beta_0,$$

y separando las partes reales en la igualdad (5.3:11), obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(\rho, \theta)]^2\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v(\rho, \theta)]^2\, d\theta = \alpha_0^2 - \beta_0^2. \quad (5.3{:}12)$$

Sumando y restando término a término (5.3:10) y (5.3:12), hallamos:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[u(\rho,\theta)]^2\,d\theta=\alpha_0^2-\beta_0^2+\sum_0^\infty|a_m|^2\rho^{2m}=2\alpha_0^2+\sum_1^\infty(\alpha_m^2+\beta_m^2)\rho^{2m},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[v(\rho,\theta)]^2\,d\theta=\beta_0^2-\alpha_0^2+\sum_0^\infty|a_m|^2\rho^{2m}=2\beta_0^2+\sum_1^\infty(\beta_m^2+\alpha_m^2)\rho^{2m}.$$

Evidentemente, las relaciones obtenidas representan las igualdades de Parseval para las funciones $u(\rho,\theta)$ y $v(\rho,\theta)$.

5.4. En el ap. 5.2 se obtuvo la expresión de los coeficientes de una serie de potencias mediante las derivadas de su suma en el centro del círculo de convergencia K:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Pero en el ap. 3.2 se vio que para cualquier ρ, $0<\rho<R$, los módulos de las derivadas satisfacen a las desigualdades

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant n!\,\frac{M(\rho)}{\rho^n},$$

donde $M(\rho)=\max\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)|$. De aquí se deducen las siguientes **desigualdades de Cauchy para los coeficientes de la serie de potencias** (acotación de Cauchy):

$$|a_n|\leqslant\frac{M(\rho)}{\rho^n}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\tag{5.4:1}$$

De las desigualdades de Cauchy se deduce que todos los términos de la serie $\sum\limits_0^\infty|a_n|^2\rho^{2n}$ están acotados; precisamente, cada uno de ellos no es superior a $[M(\rho)]^2$. Sin embargo, la relación (5.3:4) permite afirmar mucho más. Resulta que la *serie* $\sum\limits_0^\infty|a_n|^2\rho^{2n}$ *es convergente* (para $\rho<R$) *y su suma no es superior a la misma cota* $[M(\rho)]^2$. En efecto, se tiene:

$$\sum_0^\infty|a_n|^2\rho^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|^2\,d\theta.$$

Pero

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|^2\,d\theta\leqslant[M(\rho)]^2,$$

por consiguiente,

$$\sum_{0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \leqslant [M(\rho)]^2. \qquad (5.4:1')$$

Suponiendo que para cierto $n = n_0 \geqslant 0$ y para ρ, $0 < \rho < R$, en las desigualdades de Cauchy se verifica la igualdad

$$|a_{n_0}| = \frac{M(\rho)}{\rho^{n_0}},$$

o bien

$$|a_{n_0}|^2 \rho^{2n_0} = [M(\rho)]^2,$$

de la desigualdad (5.4:1') sacamos la conclusión de que todos los coeficientes a_n para $n \neq n_0$ son iguales a cero. Esto significa que la serie de potencias se reduce a uno de sus términos $a_{n_0} z^{n_0}$ y, por consiguiente,

$$f(z) = a_{n_0} z^{n_0}.$$

En resumen, exluyendo el caso en que la serie de potencias se reduzca a uno de sus términos (los coeficientes de todos los demás términos son ceros), en las relaciones (5.4:1) las desigualdades siempre son estrictas. En particular, para $n = 0$, resulta

$$|a_0| = |f(z_0)| < M(\rho), \quad \text{si} \quad f(z) \not\equiv a_0,$$

es decir, el principio del módulo máximo en su forma definitiva para la suma de la serie de potencias.

Como las derivadas de una función analítica pueden expresarse según las fórmulas del ap. 3.2 en forma de integrales

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (\rho < R),$$

para los coeficientes de la serie de potencias se verifican también las siguientes expresiones integrales:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (5.4:2)$$

Demostremos que estas fórmulas pueden obtenerse directamente examinando la serie de potencias. Para esto multipliquemos todos los términos de la serie

$$f(\zeta) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_m (\zeta - z_0)^m,$$

uniformemente convergente en la circunferencia $|\zeta - z_0| = \rho$, por $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ e integremos término a término sobre la circunfe-

rencia $\gamma: |\zeta - z_0| = \rho$; obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta=\sum_{0}^{\infty}a_m\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(\zeta-z_0)^{m-n-1}\,d\zeta. \qquad (5.4:3)$$

Pero

$$\int_{\gamma}(\zeta-z_0)^{m-n-1}\,d\zeta=\int_{0}^{2\pi}\rho^{m-n-1}e^{(m-n-1)\,i\theta}\rho e^{i\theta}i\,d\theta=i\rho^{m-n}\int_{0}^{2\pi}e^{(m-n)\,i\theta}\,d\theta;$$

si $m \neq n$, esta integral es, evidentemente, igual a cero:

$$i\rho^{m-n}\int_{0}^{2\pi}e^{(m-n)\,i\theta}\,d\theta=i\rho^{m-n}\left[\frac{e^{(m-n)\,i\theta}}{(m-n)\,i}\right]_0^{2\pi}=0;$$

si $m = n$, ésta es igual a $2\pi i$:

$$i\int_{0}^{2\pi}d\theta=2\pi i.$$

De aquí se deduce que todos los términos de la suma en el segundo miembro de la fórmula (5.4:3), menos uno, correspondiente a $m = n$, son iguales a cero, y obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta=a_n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

es decir, las fórmulas (5.4:2).

Aplicando las expresiones integrales de los coeficientes, que acabamos de obtener sin basarse en la fórmula integral de Cauchy, se puede dar una demostración de la fórmula integral de Cauchy para la función $f(z)$ (la suma de la serie de potencias), distinta de la expuesta anteriormente (ap. 3.1). Pongamos la expresión (5.4:2) en la serie de potencias. Tendremos:

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\,(z-z_0)^n. \qquad (5.4:4)$$

La serie que figura en el segundo miembro puede obtenerse integrando término a término la serie $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$, la cual converge uniformemente en la circunferencia γ: $|\zeta - z_0| = \rho$, si z es un punto fijo situado en el interior de γ. En efecto, para el módulo

del término general de la serie se tiene la cota:

$$\left|\frac{1}{2\pi i} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right| < \frac{1}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho} \left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^n,$$

dondo $M(\rho) = \max |f(\zeta)|$ y $|z - z_0| < \rho$. Pero, evidentemente, en el segundo miembro figura el término general de una serie numérica convergente (una progresión geométrica con la razón $\frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$), de donde se deduce la convergencia uniforme de la serie considerada. Por esta razón, el resultado de la integración término a término de esta serie tiene que coincidir con la integral de la suma de la serie, y obtenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_0^\infty f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) \sum_0^\infty \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) \frac{\frac{1}{\zeta-z_0}}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta-z}.$$

Esta es la fórmula integral de Cauchy para la suma de la serie de potencias.

Así, pues, la fórmula integral de Cauchy puede obtenerse de la serie de potencias representando sus coeficientes en forma de integrales, sustituyendo después la suma de las integrales de los términos de la serie uniformemente convergente por la integral de la suma y finalmente, sumando, la progresión geométrica obtenida bajo el signo integral. Cauchy efectuó todos estos razonamientos en orden inverso y halló que toda función expresable en forma de Cauchy, es decir, toda función analítica, se representa por una serie de potencias. Demostremos esta proposición admirable.

Teorema de Cauchy sobre el desarrollo de una función analítica en serie de potencias. *Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en un recinto G; sea z_0 un punto (finito) arbitrario del recinto G y Δ, la distancia desde z_0 hasta la frontera de este recinto. Entonces existe una serie de potencias de $z - z_0$ convergente en el círculo K: $|z - z_0| < \Delta$, que representa en este círculo la función $f(z)$:*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n. \tag{5.4:5}$$

(Obsérvese que la frontera del recinto G puede reducirse al único punto del infinito. En este caso se debe suponer que Δ es infinito).

Empezando a demostrar el teorema, tomemos un punto arbitrario $z \in K$ y describamos una circunferencia γ con el centro en z_0:

$|\zeta - z_0| = \rho$, donde $0 \leqslant |z - z_0| < \rho < \Delta$ (fig. 57). Según la fórmula integral de Cauchy, tendremos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Para obtener de aquí una serie de potencias de $z - z_0$, consideremos $\frac{1}{\zeta - z}$ como la suma de una serie geométrica de razón $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$,

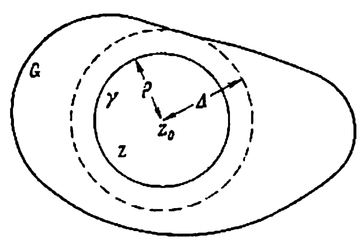


FIG. 57

cuyo módulo es: $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} = \theta < 1$. Con este fin representemos $\frac{1}{\zeta - z}$ en la forma

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} +$$

$$+ \frac{(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^3} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \ldots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \qquad (5.4:6)$$

Como para todos los puntos ζ, pertenecientes a γ, el módulo del término general de la última serie es:

$$\left|\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{\rho}\theta^n \qquad (0 < \theta < 1),$$

la serie (5.4:6) converge uniformemente en γ (respecto de $\zeta \in \gamma$). También convergerá uniformemente la serie obtenida de (5.4:6) al multiplicar ésta por la función $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ la cual está acotada en valor absoluto en γ, es decir, la serie

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \qquad (5.4:7)$$

De aquí se deduce que la serie (5.4:7) puede integrarse término a término en γ. Efectuando la integración, resulta:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \qquad (5.4{:}8)$$

donde

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \qquad (5.4{:}9)$$

Hemos obtenido el desarrollo de la función analítica en serie de potencias (serie de Taylor). Del mismo método de su obtención (z es un punto arbitrario del círculo K) se deduce que esta serie es convergente en cualquier punto del círculo K: $|z-z_0|<\Delta$.

El teorema queda demostrado completamente.

Este teorema es de una importancia capital, puesto que muestra que una función $f(z)$ de variable compleja que es derivable en un recinto G (pues así es la definición admitida de función analítica de variable compleja), se expresa por una serie de potencias de $z-z_0$ en un entorno de cualquier punto z_0 del recinto G. Precisamente esta propiedad justifica la denominación misma de las funciones de variable compleja que son derivables en un recinto al llamarlas funciones analíticas.

Para las funciones de variable real, o con más generalidad, para las funciones definidas en alguna línea Γ (por ejemplo, en una curva de Jordan del plano ampliado), no subsiste semejante propiedad. Una función derivable e incluso indefinidamente derivable en Γ, puede no expresarse por una serie de potencias en ninguno de los entornos de los puntos de Γ y, por consiguiente, puede no ser analítica. Por esta razón, al aplicar el concepto de función analítica para las funciones definidas en curvas de Jordan (por ejemplo, para las funciones de variable real), no hay que basarse en la derivabilidad, sino que hay que exigir que las funciones sean expresables por series de potencias.

Como la serie de potencias

$$\sum_{0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

que representa la función $f(z)$ en un entorno del punto z_0, según lo demostrado en el teorema de Cauchy, es convergente en el círculo $|z-z_0|<\Delta$, su radio de convergencia R tiene que ser no menor que Δ:

$$R\geqslant\Delta.$$

Escribiendo esta desigualdad en la forma $\frac{1}{R_1} \leqslant \frac{1}{\Delta}$ y sustituyendo $\frac{1}{R}$ según la fórmula de Cauchy-Hadamard mediante $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}}$, obtenemos la ya conocida desigualdad de Cauchy-Hadamard (3.3:10):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}} \leqslant \frac{1}{\Delta}.$$

Del teorema de Cauchy se deduce, en particular, que las series de potencias que representan funciones enteras convergen hacia las mismas en todo el plano. En efecto, una función entera es analítica en el recinto G que coincide con todo el plano, de modo que la distancia Δ desde cualquier punto z_0 hasta la frontera de este recinto G se debe considerar infinita.

Sea $f(z)$ una función entera y z_0, algún punto del plano. Entonces tendremos:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (5.4:10)$$

donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Como acabamos de señalar, esta serie sonverge hacia $f(z)$ en todo el plano. Para los coeficientes de la serie se tienen las acotaciones de Cauchy:

$$|a_n| \leqslant \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (5.4:11)$$

donde

$$M(\rho) = \max_{|z - z_0| = \rho} |f(z)|.$$

En el caso considerado se puede tomar ρ arbitrariamente grande. De aquí se deduce que, *si el módulo de una función entera* $f(z)$ *se conserva acotado en todo el plano, es decir, si* $M(\rho) \leqslant M < \infty$ para *todos los valores* ρ, *entonces* $f(z) \equiv$ const.

Este es el contenido del teorema de Liouville, que tiene numerosas aplicaciones en distintos problemas de la teoría de funciones.

Para demostrarlo, sustituyamos en las desigualdades (5.4:11) $M(\rho)$ por M y escribamos estas desigualdades solamente para valores naturales del índice n:

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Fijando arbitrariamente n, supongamos que ρ crece indefinidamente; tendremos:

$$|a_n| \leqslant 0, \text{ es decir } a_n = 0 \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

Debido a esto, de la relación (5.4:10) resulta que $f(z) = a_0$ para cualquier z, es decir, $f(z) \equiv$ const, como se quería demostrar.

Haciendo $z_0 = 0$ y calculando las derivadas de órdenes distintos de las funciones elementales: $\exp z$, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, el lector obtendrá fácilmente para ellas los siguientes desarrollos, convergentes en todo el plano:

$$\exp z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}, \qquad \operatorname{sen} z = \sum_0^\infty (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cos z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \operatorname{sh} z = \sum_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad \operatorname{ch} z = \sum_0^\infty \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Detengámonos en los desarrollos en series de potencias de las ramas uniformes de las funciones multiformes más elementales. Consideremos ante todo la rama uniforme $\ln z$, definida por la condición $\ln 1 = 0$ en el recinto G cuya frontera es la parte no positiva del eje real: $x \leqslant 0$, $y = 0$ (esta rama puede representarse en la forma $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, donde $|\arg z| < \pi$). Como $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ se tiene, $(\ln z)^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{z^k}$, y, por consiguiente, el desarrollo de $\ln z$ en serie de potencias de $z - 1$ tiene la forma

$$\ln z = \sum_0^\infty \frac{(\ln z)^{(k)}_{z=1}}{k!} (z-1)^k,$$

o bien

$$\ln z = \sum_0^\infty (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}.$$

La distancia Δ desde el punto $z_0 = 1$ hasta la frontera del recinto G es igual a uno. Debido a esto, el desarrollo obtenido puede utilizarse para $|z - 1| < 1$. Sustituyendo aquí $z - 1$ por z, se obtiene la serie de potencias para $\ln(1 + z)$ que es convergente para $|z| < 1$:

$$\ln(1+z) = \sum_0^\infty (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} \quad (|z| < 1).$$

La función $\ln(1 + z)$ es la rama uniforme de la función $\operatorname{Ln}(1 + z)$, definida por la condición $[\ln(1 + z)]_{z=0} = \ln 1 = 0$ en el recinto G cuya frontera es la parte del eje real: $x \leqslant -1$, $y = 0$.

Examinemos ahora la función z^α, donde α es un número complejo arbitrario. Esta es una función multiforme (si α no es un número entero) que se expresa mediante la función exponencial y el logaritmo por la relación $z^\alpha = \exp(\alpha \ln z)$.

Separemos una rama uniforme $\varphi(z)$ de esta función en el mismo recinto G que figuraba en el ejemplo precedente, mediante la condición $\varphi(1) = 1$. Esta rama puede representarse en la forma

$$\varphi(z) = \exp(\alpha \ln z),$$

de donde

$$\varphi'(z) = \alpha \exp(\alpha \ln z) \cdot \frac{1}{z} = \alpha \exp(\alpha \ln z) \cdot \exp(-\ln z) = \\ = \alpha \exp[(\alpha - 1) \ln z]$$

y luego,

$$\varphi^{(k)}(z) = \alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha - k + 1) \exp[(\alpha - k) \ln z] \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

En el punto $z = 1$ las derivadas toman los valores $\varphi^{(k)}(1) = \alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha - k + 1)$ y, por consiguiente, el desarrollo de $\varphi(z)$ en serie de potencias de $z - 1$ tiene la forma

$$\varphi(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-k+1)}{k!} (z-1)^k.$$

Como en el ejemplo anterior, este desarrollo es válido para $|z - 1| < 1$. Sustituyendo aquí $z - 1$ por z, se obtiene el desarrollo de $\varphi(z + 1)$ en serie de potencias de z. Empleando en lugar de $\varphi(z + 1)$ la designación ordinaria $(1 + z)^\alpha$ (entendida como la notación de la función uniforme $\exp[\alpha \ln(1 + z)]$ en el recinto G), resulta:

$$(1+z)^\alpha = \sum_{0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-k+1)}{k!} z^k \qquad (|z| < 1).$$

Esta es la **serie binómica**, establecida aquí para el caso más general, cuando el exponente de la potencia es un número complejo arbitrario.

§ 6. UNICIDAD. A-PUNTOS DE UNA FUNCION ANALITICA. PRINCIPIO DEL MODULO MAXIMO. PUNTOS SINGULARES DEL ELEMENTO DE UNA FUNCION ANALITICA

6.1. En el ap. 5.2 se demostró el teorema que expresa la propiedad de identidad de los desarrollos de potencias de $z - z_0$, donde z_0 es un número complejo dado. Este teorema afirma que si las sumas

de dos series de potencias tales coinciden en un conjunto de puntos E, para el cual z_0 es un punto de acumulación, entonces los coeficientes respectivos de las series son iguales. Luego, de aquí se deduce que coinciden también los círculos de convergencia de las dos series y que las sumas de las series son iguales entre sí en todo el círculo general de convergencia. En otras palabras, la suma de la serie de potencias queda determinada unívocamente en todos los puntos del círculo de convergencia, si se conocen sus valores en algún conjunto de puntos que tenga un punto de acumulación en el centro del círculo.

En vista de esta propiedad de las sumas de las series de potencias (que en círculo de convergencia son funciones analíticas uniformes), hagamos la siguiente pregunta general: ¿Se determina completamente una función uniforme $f(z)$, analítica en un recinto G, por sus valores dados en un conjunto arbitrario E que tenga en este recinto al menos un punto de acumulación?

En otras palabras, ¿coincidirán en todo el recinto G los valores de dos funciones uniformes y analíticas en este recinto, $f(z)$ y $\varphi(z)$, si éstas coinciden en un conjunto de puntos E de este recinto que tiene en este último un punto de acumulación?

El teorema que sigue da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

T e o r e m a i n t e r i o r d e u n i c i d a d. *Sea G un recinto, en el cual están definidas dos funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$, uniformes y analíticas en todos los puntos de G. Supongamos que estas funciones coinciden en un conjunto de puntos E ($E \subset G$) que tiene un punto de acumulación z_0, perteneciente a G. Entonces $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden en todo el recinto G.*

D e m o s t r a c i ó n. Sean

$$A_0 + A_1(z-z_0) + \ldots + A_n(z-z_0)^n + \ldots$$

y

$$B_0 + B_1(z-z_0) + \ldots + B_n(z-z_0)^n + \ldots$$

las series de potencias que representan $f(z)$ y $\varphi(z)$ en un entorno $|z - z_0| < \rho$ del punto z_0. Como las sumas de ambas series coinciden en los puntos del conjunto E, para el cual z_0 es un punto de acumulación, según lo demostrado en el ap. 5.2, estas series son idénticas, de modo que $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden en todos los puntos del recinto G pertenecientes al entorno $|z - z_0| < \rho$. Designemos con E_1 el conjunto de todos los puntos pertenecientes a G que poseen la misma propiedad que el punto z_0, es decir, de los puntos para los cuales existen entornos donde $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden.

Por la definición misma, E_1 es un conjunto abierto. Además, a cada punto del recinto que sea un punto de acumulación para E_1 puede aplicársele el mismo razonamiento que se aplicó al punto z_0, de donde se deduce que cada uno de tales puntos tiene que pertenecer

a E_1. Por lo tanto, el conjunto E_1 tiene que coincidir con todo el recinto G (véase la proposición c), ap. 4.5, cap. primero), como se quería demostrar.

De este teorema se deduce que si las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en el recinto G y coinciden en un recinto $g \subset G$ (por ejemplo, en un entorno de algún punto $z_0 \in G$) o en un arco de alguna curva continua situada en el recinto G, entonces ellas coinciden en todo el recinto G.

En particular, si una función, analítica en el recinto G, no es idénticamente constante, entonces no puede conservar un valor constante en ninguno de los entornos del punto z_0 y en ningún arco de curva situada en este recinto.

Sea $f'(z_0), f''(z_0), \ldots, f^{(n)}(z_0), \ldots$ la sucesión de valores de las derivadas de la función $f(z)$ en un punto z_0 del recinto G. Entonces, si $f(z) \not\equiv$ const, al menos uno de estos números es diferente de cero. En caso contrario, el desarrollo de Taylor de $f(z)$ en un entorno del punto z_0 tendría la forma

$$f(z) = f(z_0) + 0\cdot(z - z_0) + \ldots + 0\cdot(z - z_0)^n + \ldots = f(z_0),$$

de donde resultaría que $f(z) \equiv f(z_0)$ en el recinto G.

Además del teorema interior de unicidad subsisten en la teoría de las funciones analíticas distintos teoremas f r o n t e r a de unicidad. Las proposiciones más generales y profundas de este tipo fueron obtenidas por N. Luzin y I. Priválov. Aquí nos limitaremos a enunciar el teorema frontera clásico de unicidad perteneciente a ellos.

Comencemos con las definiciones. Sea G un recinto limitado por una curva de Jordan Γ, y sea ζ_0 un punto de la curva Γ en el cual exista la tangente a ésta. Consideremos una función $f(z)$, definida en el recinto G, y supongamos que ésta tiende a un límite determinado A cuando $z \in G$ tiende a ζ_0 sobre cualesquiera caminos no tangentes a Γ (véase la pág. 265), es decir, manteniéndose en el interior de un ángulo arbitrario de magnitud menor que π con el vértice en el punto ζ_0 y cuya bisectriz coincide con la normal a Γ en el punto ζ_0. Entonces diremos que $f(z)$ posee en el punto $\zeta_0 \in \Gamma$ el v a l o r f r o n t e r a a n g u l a r A.

T e o r e m a d e N. L u z i n y I. P r i v á l o v. *Sea G un recinto limitado por una curva rectificable Γ, y sean $f(z)$ y $\varphi(z)$ dos funciones analíticas en el recinto G. Si para cierto conjunto $E \subset \Gamma$, de medida positiva* (por ejemplo, para un arco de la curva Γ), la diferencia $f(z) - \varphi(z)$ *posee valores frontera angulares y éstos son iguales a cero, entonces las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden en todo el recinto G.*

La demostración de este teorema, que exige el conocimiento de la teoría de funciones de variable real, encontrará el lector en la

monografía de I. Priválov «Propiedades de frontera de las funciones uniformes analíticas» ya citada en relación con las integrales de tipo Cauchy. En ésta el lector encontrará también un teorema frontera de unicidad muy delicado de los mismos autores, referente a los valores frontera radiales, es decir a los valores que son límites cuando el punto $z \in G$ se aproxima al punto $\zeta_0 \in \Gamma$ a lo largo de la normal a Γ en el punto ζ_0 (a lo largo del radio, si Γ es una circunferencia).

Sea A un número complejo arbitrario. A las raíces de la ecuación $f(z) = A$ las llamaremos A-puntos de la función $f(z)$. Del teorema de unicidad se deduce que, si $f(z) \not\equiv A$, *el conjunto de A-puntos de esta función no puede tener ningún punto de acumulación perteneciente al recinto G.* De aquí se deduce que cualquier conjunto cerrado y acotado F del recinto G sólo puede contener un número finito de A-puntos (para un número fijo A). En efecto, si F contuviese un conjunto infinito de A-puntos, habría un punto de acumulación para ellos, perteneciente a F, y por consiguiente, al recinto G.

Sea z_0 algún A-punto de la función $f(z)$, de modo que $f(z_0) = A$. Desarrollemos $f(z)$ en serie de potencias de $z - z_0$. Obtenemos:

$$f(z) = A + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots$$

o bien

$$f(z) - A = f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots \qquad (6.1:1)$$

Si $f(z) \not\equiv$ const, entre los coeficientes del segundo miembro habrá distintos de cero. Sea $(z - z_0)^k$ la potencia inferior de $z - z_0$ cuyo coeficiente es distinto de cero. Entonces la igualdad (6.1:1) toma la forma

$$f(z) - A = (z - z_0)^k \left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \ldots\right], \qquad (6.1:2)$$

donde $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. El número natural k ($k \geqslant 1$) se llama orden de multiplicidad del A-punto z_0. Si $k = 1$, el A-punto se llama simple; si $k > 1$, se dice que es múltiple. En virtud de la definición, el A-punto simple se caracteriza por las relaciones:

$$f(z_0) = A \quad \text{y} \quad f'(z_0) \neq 0;$$

y el A-punto múltiple de orden k, por las relaciones:

$$f(z_0) = A, \quad f'(z_0) = 0, \ \ldots, \ f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

De la igualdad (6.1:2) se deduce también que si z_0 es un A-punto de orden k, la función $\varphi(z) = \dfrac{f(z) - A}{(z - z_0)^k}$ es analítica en un entorno

del punto z_0:

$$\varphi(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0) + \ldots$$

y su valor en el punto z_0 es diferente de cero:

$$\varphi(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0.$$

Recíprocamente: si se sabe que para cierto natural k la función $\varphi(z) = \frac{f(z)-A}{(z-z_0)^k}$ es analítica en un entorno del punto z_0, y su valor en el punto z_0 $\left(\text{definido como } \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-A}{(z-z_0)^k}\right)$ es diferente de cero, entonces z_0 es un A-punto de $f(z)$ de orden k.

En efecto, de la relación

$$\frac{f(z)-A}{(z-z_0)^k} = \varphi(z) = a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \ldots \qquad (a_k = \varphi(z_0) \neq 0).$$

se deduce que

$$f(z) = A + a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots$$

en un entorno del punto z_0 y, por consiguiente,

$$A = f(z_0), \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$$

y, además, (para $k > 1$):

$$f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0.$$

Sea de nuevo F un conjunto cerrado arbitrario de puntos del recinto G; calculemos la cantidad de A-puntos de la función $f(z) \not\equiv A$, pertenecientes a F, contando cada uno de ellos tantas veces cuanto indique su orden de multiplicidad. Como en F hay un número finito de A-puntos y el orden de multiplicidad de cada uno de ellos también es finito, el resultado del cálculo será un número finito.

Todo lo dicho respecto de los A-puntos es aplicable, indudablemente, al caso particular importantísimo en que $A = 0$.

Los 0-puntos de la función analítica $f(z)$ se llaman, abreviadamente, c e r o s de la misma. El lector comprobará fácilmente que las definiciones de órdenes de multiplicidad de los ceros de un polinomio o, en general, de una función racional arbitraria, admitidas en el álgebra y utilizadas aquí en el ap. 4.1 del segundo capítulo, concuerdan con las definiciones generales dadas anteriormente.

Obsérvese que, para todo $A \neq \infty$, los A-puntos de la función $f(z)$ son ceros de la función $f(z) - A$. Por esta razón, cualquier ley general establecida para los ceros de las funciones analíticas, subsiste también para los A-puntos de las funciones analíticas, donde A es un número complejo arbitrario.

Demostremos que *si el conjunto de todos los ceros* (respectivamente, los A-puntos) *de una función uniforme analítica arbitraria no es finito en un recinto dado G, entonces éste es un conjunto numerable.* En otras palabras, todos los ceros de una función uniforme y analítica en un recinto dado pueden numerarse y colocarse en forma de una sucesión:

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

Como se señaló anteriormente, esta sucesión no tiene puntos de acumulación en el recinto G y, por consiguiente, todos sus puntos de acumulación son puntos frontera para G.

Para demostrar que el conjunto de los ceros de una función analítica es numerable (si este conjunto es infinito), examinemos primero el caso en que G sea todo el plano finito. Entonces en el círculo $|z| < 1$, y también en los anillos:

$$1 \leqslant |z| < 2, \ 2 \leqslant |z| < 3, \ldots, n \leqslant |z| < n+1, \ldots$$

habrá solamente conjuntos finitos de ceros de la función $f(z)$ (posiblemente vacíos en el círculo o en algunos anillos). Numerando primero los ceros pertenecientes al círculo $|z| < 1$, y continuando después la numeración de los ceros pertenecientes, sucesivamente, al primero, segundo, ..., n-ésimo, etc, anillos indicados, obtendremos, evidentemente, una sucesión $\{z_n\}$, que contiene todos los ceros de la función $f(z)$. Además, según se desee, se puede obtener una sucesión en la que estarán representados solamente los ceros distintos entre sí (sin contar sus órdenes de multiplicidad), o bien una sucesión en la que cada cero se repita tantas veces cual sea su orden de multiplicidad.

Obsérvese que en uno u otro caso se puede efectuar la numeración colocando los ceros en el orden no decreciente de los módulos:

$$|z_n| \leqslant |z_{n+1}|.$$

Supongamos ahora que G tiene al menos un punto frontera finito.

Para un número natural n, designemos mediante F_n el conjunto de todos los puntos del recinto G cuyas distancias hasta la frontera no es menor que $\frac{1}{n}$. Evidentemente, estos conjuntos, comenzando desde cierto $n \geqslant n_0$ ($n_0 \geqslant 1$), no serán vacíos. Cada punto $z \in G$ pertenece a todos los F_n, comenzando desde uno de ellos (es suficiente tomar $\frac{1}{n} < \rho$, donde ρ es la distancia desde z hasta la frontera del recinto G). Finalmente, cada uno de los conjuntos F_n, siendo un conjunto cerrado de puntos del recinto G (cada punto de acumulación del conjunto F_n es también punto de acumulación para G; además, la distancia desde este punto hasta la frontera del recinto G no es

menor que $\frac{1}{n}$, por lo cual éste pertenece a G y a F_n), contiene solamente un número finito de ceros de la función $f(z)$. Numerando primero todos los ceros pertenecientes a F_1, y continuando después la numeración de los ceros pertenecientes, sucesivamente, a $F_2 - F_1$, $F_3 - F_2, \ldots, F_{n+1} - F_n, \ldots$, obtendremos una sucesión $\{z_n\}$, que incluirá a todos los ceros de la función $f(z)$ pertenecientes al recinto G.

Examinando la serie de potencias

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_k(z - z_0)^k + \ldots$$

se obtiene inmediatamente la respuesta a la pregunta: ¿es el punto dado z_0 un cero de la función $f(z)$ o no? Si z_0 es un cero, el mismo examen indica el orden de multiplicidad del mismo. Mas, por esta serie no se puede saber inmediatamente si $f(z)$ posee ceros distintos de z_0, donde están estos ceros y cuáles son sus órdenes de multiplicidad. Es suficiente recordar el ejemplo de la función sen z, representada en todo el plano por la serie de potencias convergente

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

De este desarrollo se ve que sen z posee un cero simple en el origen de coordenadas. Sin embargo, del mismo desarrollo no se ve directamente que sen z posee ceros simples en todos los puntos de la forma $k\pi$ (k es un número entero) y que, además de éstos, no existen otros ceros.

Un medio de representación de las funciones analíticas que permite revelar todos sus ceros pertenecientes al recinto dado, son los productos infinitos.

Supongamos que $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de funciones analíticas en un recinto G, que satisfacen a las condiciones señaladas en la pág. 291, o sea:

a′) el conjunto de E-puntos que son ceros de las funciones $f_1(z), \ldots, f_k(z), \ldots$ no tiene puntos de acumulación en el interior de G;

b′) cada uno de los puntos de E es un cero solamente para un conjunto finito de funciones $\{f_k(z)\}$.

En estas condiciones, todo conjunto cerrado $F \subset G$ contiene solamente un número finito de puntos de E y existe un número natural $n(F)$ tal que $f_k(z)$ no se anula en los puntos del conjunto F, si $k > n(F)$.

Supongamos ahora que la serie $\sum_{n(F)+1}^{\infty} \ln[f_k(z)]$ converge uniformemente en cada uno de tales conjuntos F. Como ya se sabe, de

aquí se deduce que el producto $\prod_{1}^{\infty} f_k(z)$ es uniformemente convergente en el interior del recinto G y, por consiguiente, representa en el mismo una función analítica $f(z)$. La función $f(z)$ se anula en aquellos puntos, y sólo en aquéllos, en los cuales se anula al menos una de las funciones $f_k(z)$, es decir, en los puntos del conjunto E.

Obsérvese que, si $z_0 \in E$ y la suma de los órdenes de multiplicidad de este punto, considerado como un cero de las funciones respectivas $f_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, es α_0, entonces z_0 es un cero de orden α_0 de la función $f(z)$. En efecto, si $n_0 \geqslant 1$ designa un número natural tal que ninguna de las funciones $f_k(z)$ se anula en el punto z_0 para $k > n_0$, entonces, representando $f(z)$ en la forma

$$f(z) = \prod_{1}^{n_0} f_k(z) \prod_{n_0+1}^{\infty} f_k(z),$$

nos convencemos de que $\prod_{1}^{n_0} f_k(z)$ es una función analítica que posee un cero de orden α_0, en el punto z_0, mientras que $\prod_{n_0+1}^{\infty} f_k(z)$ es una función analítica que no se anula en este punto. De aquí se deduce que z_0 es un cero de orden α_0 de la función $f(z)$.

Cuando los ceros de cada función $f_k(z)$ son conocidos, por ejemplo, cuando $f_k(z)$ tiene la forma

$$f_k(z) = (z - z_k) g_k(z),$$

donde $g_k(z)$ es una función analítica que carece de ceros, el desarrollo de $f(z)$ en el producto infinito

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} [(z - z_k) g_k(z)]$$

da la posibilidad de percibir todos los ceros de la función $f(z)$ pertenecientes al recinto G, y establecer sus órdenes de multiplicidad. Estos órdenes coinciden con las cantidades de números z_k, iguales entre sí, que figuran en distintos factores del producto.

6.2. Demostremos el principio del módulo máximo de una función analítica en su forma definitiva: *el módulo de una función $f(z)$ que es analítica en un recinto G y no es idénticamente constante, no puede alcanzar el máximo en ningún punto del recinto.*

Evidentemente, el principio análogo para el módulo mínimo de una función analítica $f(z)$ no subsiste, puesto que el módulo alcanza el mínimo en cada cero de la función. Del principio del módulo máximo se deduce, sin embargo, que *el módulo de una función analíti-*

ca $f(z) \not\equiv$ const *no puede alcanzar el mínimo en ningún punto del recinto que no sea un cero de la función* $f(z)$.

En efecto, si $f(z_0) \neq 0$, entonces como la función es continua, se verifica también la desigualdad $f(z) \neq 0$ en cierto entorno U del punto z_0, perteneciente al recinto G. Por consiguiente, en este entorno la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ es analítica y no idénticamente igual a una constante; por eso el módulo de $\varphi(z)$ no puedo alcanzar el máximo en el punto z_0. Volviendo a la función $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$, obtenemos que el módulo de $f(z)$ no tiene mínimo en el punto z_0.

He aquí dos demostraciones distintas del principio del módulo máximo.

1. Demostrando el teorema por el método de reducción a lo absurdo, supongamos que en cierto punto $z_0 \in G$ el módulo de la función alcanza el máximo. Hagamos $|f(z_0)| = M$; entonces, en un entorno U_0 suficientemente pequeño del punto z_0: $|f(z)| \leqslant M$. Podemos suponer que $M \neq 0$, pues en caso contrario sería $f(z) = 0$ en todos los puntos de U_0, de donde se deduciría que $f(z) \equiv 0$, en contra de la hipótesis del teorema.

Demostremos que en todos los puntos de U_0 se verifica la igualdad $|f(z)| = M$. Suponiendo que en un punto $z_1 \in U_0$ $|z_1 - z_0| = \delta > 0$, $|f(z_1)| < M$, para la integral $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta})\, d\theta$ se tendría la acotación

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta})\, d\theta \right| < M,$$

puesto que en la circunferencia $|z - z_0| = \delta$ tiene que existir un arco que contiene a z_1 y en cuyos puntos $|f(z)| < M$. Pero esta acotación contradice a la igualdad (véase (3.1:6))

$$M = |f(z_0| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\theta})\, d\theta \right|.$$

En resumen, de la hipótesis admitida se deduce la existencia de un entorno del punto z_0 en el cual el módulo de la función conserva un valor constante. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, en todos los puntos de U_0 se tiene:

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = M^2,$$

o bien, derivando respecto de x e y:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Como $M \neq 0$, las funciones u y v no se anulan simultáneamente en los puntos de U_0; por esta razón, el determinante de este último sistema es igual a cero:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Aplicando las ecuaciones de D'Alembert-Euler, obtenemos de aquí que $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$ y, por consiguiente, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$; en virtud de las mismas ecuaciones, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$. Por lo tanto,

$$u(x, y)\equiv C_1, \quad v(x, y)\equiv C_2. \quad \text{y} \quad f(z)=C_1+iC_2 \text{ en } U_0.$$

Según el teorema de unicidad, esta última igualdad se verifica en todo el recinto G, lo cual contradice a la hipótesis del teorema. Así, pues, el principio del módulo máximo queda demostrado.

II. Para la demostración se puede utilizar la representación de la función analítica en serie de potencias *). Supongamos de nuevo que $|f(z)|$ alcanza el máximo en el punto z_0: $|f(z_0)|=M$. Igual que anteriormente, se puede suponer que $M\neq 0$. Desarrollemos $f(z)$ en serie de potencia de $z-z_0$:

$$f(z)=a_0+a_p(z-z_0)^p+a_{p+1}(z-z_0)^{p+1}+\ldots,$$

donde $|a_0|=|f(z)|=M$, $|a_p|\neq 0$ $(p\geqslant 1)$. Debido a la hipótesis, en cualquier entorno U_0 suficientemente pequeño del punto z_0 se verifica la desigualdad $|f(z)|\leqslant M$. Tomemos un punto $z_1\in U_0$, distinto de z_0 y situado en uno de los rayos:

$$\operatorname{Arg}[a_p(z-z_0)^p]=\operatorname{Arg} a_0,$$

es decir,

$$\operatorname{Arg}(z-z_0)=\frac{1}{p}\operatorname{Arg}\frac{a_0}{a_p}$$

(el número de tales rayos es igual a p). Entonces, los vectores que representan a_0 y $a_p(z-z_0)^p$ son paralelos y llevan una misma dirección, de donde

$$|a_0+a_p(z-z_0)^p|=|a_0|+|a_p(z-z_0)|^p.$$

Supongamos que z está tan próximo a z_0 en el rayo elegido que

$$|a_{p+1}(z-z_0)^{p+1}+a_{p+1}(z-z_0)^{p+2}+\ldots|<\frac{1}{2}|z-z_0|^p.$$

---

*) En la pág. 308 ya se expuso una demostración de éstas.

Entonces, en todos los puntos z de éstos (arbitrariamente próximos a z_0) tendremos:

$$|f(z)| = |a_0 + a_p(z-z_0)^p + a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \dots| \geqslant$$
$$\geqslant |a_0 + a_p(z-z_0)^p| - |a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \dots| =$$
$$= |a_0| + |a_p(z-z_0)^p| - |a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \dots| >$$
$$> |a_0| + \frac{1}{2}|a_p(z-z_0)^p| > |a_0| = M.$$

Pero esto contradice a la hipótesis; por consiguiente, el principio del módulo máximo es justo.

Supongamos que $f(z) \not\equiv$ const es continua en el dominio $\overline{G}$ y es analítica en el recinto G. Entonces su módulo, siendo una función continua en $\overline{G}$, tiene que alcanzar su extremo superior en cierto punto $\zeta \in \overline{G}$. En virtud del principio del módulo máximo este punto no puede pertenecer al recinto G; por consiguiente, es un punto frontera del mismo. En resumen, *el módulo de una función $f(z) \not\equiv$ const, continua en un dominio y analítica en su interior, alcanza el valor máximo en un punto frontera del dominio.*

Supongamos que para una función $f(z) \not\equiv$ const, continua en el dominio $\overline{G}$ y analítica en el recinto G, su módulo $|f(z)|$ conserva un valor constante en la frontera de este dominio. Demostremos que de aquí se deduce que $f(z)$ posee al menos un cero en el interior de G. Si esto no fuese así, el módulo $|f(z)|$ no sólo no podría tener máximo en los puntos interiores del dominio sino tampoco mínimo. Por eso, siendo una función continua en el dominio $\overline{G}$, el módulo $|f(z)|$ alcanzaría sus valores máximo y mínimo en los puntos frontera del dominio. Pero en estos puntos, según la hipótesis, éste conserva un valor constante. Por consiguiente, sus valores máximo y mínimo en el dominio $\overline{G}$ son iguales, es decir, $|f(z)| \equiv$ const en el dominio $\overline{G}$ y, por lo tanto, la función $|f(z)|$ alcanza el máximo en todos los puntos del dominio $\overline{G}$, lo cual es imposible si $f(z) \not\equiv$ const. Así pues, el recinto G contiene al menos un cero de la función $f(z)$.

Aplicando la proposición que acabamos de demostrar, se demuestra fácilmente el teorema de existencia de ceros de cualquier polinomio de grado no menor que el primero (el denominado teorema fundamental del álgebra).

Sea $P(z)$ un polinomio de grado n:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0,\ n \geqslant 1).$$

Si $a_0 = 0$, entonces $P(0) = 0$, es decir, el polinomio tiene un cero en el origen de coordenadas. Si $a_0 \neq 0$, entonces $P(0) \neq 0$.

Consideremos el conjunto E de puntos del plano, para los cuales $|P(z)| < 2|a_0|$. Este conjunto no es vacío (puesto que $z = 0 \in E$)

y está acotado (puesto que para valores de $|z|$ suficientemente grandes, el módulo $|P(z)|$ es arbitrariamente grande y, en particular, es mayor que $2|a_0|$). Además, debido a la continuidad del módulo $|P(z)|$, el conjunto E es abierto (en cada punto $z_0 \subset E$, $|P(z_0)| < 2|a_0|$, y, por consiguiente, existe un entorno del punto z_0 en el cual $|P(z)| < 2|a_0|$; de este modo, este entorno pertenece a E). Finalmente, en los puntos frontera del conjunto E, se tiene: $|P(z)| = 2|a_0|$ (si ζ es un punto frontera de E, entonces en él $|P(\zeta)| \geqslant 2|a_0|$ y, por otra parte, ζ es un punto de acumulación para los puntos de E, en los cuales $|P(z)| < 2|a_0|$, por lo tanto, $|P(\zeta)| \leqslant 2|a_0|$; así, pues, $|P(\zeta)| = 2|a_0|$). Cualquier conjunto abierto representa un recinto o se descompone en recintos separados. Aplicando a cada recinto la proposición demostrada anteriormente, obtenemos que cada uno de ellos tiene que contener al menos un cero del polinomio $P(z)$. Por lo tanto, queda demostrada la existencia de un cero al menos de $P(z)$ en el plano z. A la vez, empleando los razonamientos conocidos (aplicando el teorema de Bézout), se demuestra también la existencia de n ceros del polinomio (entre los cuales puede haber múltiples).

En relación con la demostración expuesta del teorema fundamental del álgebra, examinemos el conjunto E_ρ de todos los puntos del plano z en los cuales se verifica la desigualdad

$$|P(z)| < \rho < \infty,$$

donde ρ es un número positivo fijo arbitrario. Este conjunto no es vacío, puesto que pertenecen a él todos los ceros del polinomio $P(z)$. Repitiendo luego todo lo que se dijo anteriormente respecto del caso particular del conjunto E: $|P(z)| < 2|a_0|$, nos convencemos de que E_ρ es un conjunto acotado y abierto, en cuya frontera se verifica la igualdad $|P(z)| = \rho$.

El conjunto E_ρ puede ser conexo y entonces representa un recinto, o no ser conexo y entonces representa un sistema de recintos. Como cada uno de los recintos tiene que contener al menos un cero del polinomio $P(z)$ (puesto que en la frontera de tal recinto $|P(z)|$ conserva un valor constante), el número total de recintos no puede ser superior a n. Sea g_ρ uno de estos recintos y γ, una curva de Jordan cerrada arbitraria perteneciente a g_ρ. Como en los puntos de la curva γ se verifica la desigualdad $|P(z)| < \rho$, en virtud del principio del módulo máximo, esta misma desigualdad tiene que verificarse también en todos los puntos del interior de γ. De aquí que el interior de γ pertenece a E_ρ y, por consiguiente, junto con γ pertenece a g_ρ. Así, pues, E_ρ consta de uno o de unos cuantos, pero no más de n, recintos simplemente conexos *), que contienen en su interior a todos

*) Véase el ap. 4.4 cap. 1.

los ceros del polinomio $P(z)$. Por esta razón, la frontera de E_ρ consta de uno o de unos cuantos, pero no más de n, continuos que son fronteras de recintos simplemente conexos.

Evidentemente, en cada punto exterior a E_ρ tiene que verificarse la desigualdad $|P(z)| > \rho$. En efecto, suponiendo que en cierto punto z_1, exterior al conjunto E_ρ, se verifica la igualdad $|P(z_1)| = \rho$ (la desigualdad $|P(z_1)| < \rho$ queda excluida, puesto que, según la definición, todos los puntos para los cuales $|P(z)| < \rho$ pertenecen a E_ρ), entonces en virtud de que $P(z_1) \neq 0$, por lo cual el módulo $|P(z)|$ no puede tener mínimo en el punto z_1, tendríamos que en un entorno arbitrariamente pequeño del punto z_1 habría puntos en los cuales $|P(z)| < |P(z_1)| = \rho$, es decir, habría puntos pertenecientes a E_ρ. Pero esto es imposible, puesto que z_1 es un punto exterior a E_ρ. Por lo tanto, en el interior de E_ρ se tiene: $|P(z)| < \rho$, en la frontera de E_ρ: $|P(z)| = \rho$ y en el exterior a E_ρ: $|P(z)| > \rho$.

La frontera del conjunto E_ρ, es decir, el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen a la condición

$$|P(z)| = \rho,$$

se llama l e m n i s c a t a. Designando los ceros del polinomio $P(z)$ mediante $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (los ceros múltiples se escriben aquí tantas veces como sean sus órdenes de multiplicidad), se puede escribir $P(z)$ en la forma

$$P(z) = a_n(z - z_1) \ldots (z - z_n);$$

por consiguiente, la condición que define la lemniscata toma la forma siguiente:

$$|z - z_1| \ldots |z - z_n| = \frac{\rho}{|a_n|} = r^n.$$

Así, pues, la lemniscata puede definirse como el lugar geométrico de puntos del plano para los cuales el producto de las distancias hasta n puntos del plano $z_1, \ldots, z_n$ (algunos de estos puntos pueden coincidir entre sí) es una cantidad constante.

Los puntos $z_1, \ldots, z_n$ que figuran en esta definición (los ceros del polinomio $P(z)$), se llaman f o c o s d e l a l e m n i s c a t a, y el número r, r a d i o d e l a l e m n i s c a t a; la curva misma se llama lemniscata con n focos de radio r.

Cuando $n = 1$, resulta el caso particular más sencillo:

$$|z - z_1| = r;$$

evidentemente, ésta es una circunferencia de radio r con el centro en el único foco z_1.

Si $n = 2$ y $z_1 \neq z_2$, resulta una lemniscata con dos focos:

$$|z - z_1||z - z_2| = r^2.$$

La forma de ésta depende de la razón del radio r a la distancia $|z_1 - z_2|$ entre los focos. En la fig. 58 está representada una lemniscata con dos focos para los siguientes valores de esta razon:

$$\text{a)}\ \frac{r}{|z_1-z_2|}<\frac{1}{2},\quad \text{b)}\ \frac{r}{|z_1-z_2|}=\frac{1}{2},\quad \text{c)}\ \frac{1}{2}<\frac{r}{|z_1-z_2|}<\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{d)}\ \frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{r}{|z_1-z_2|}.$$

Obsérvese que la lemniscata con dos focos lleva también la denominación de óvalo de Cassini, y su caso particular para $\frac{r}{|z_1-z_2|}=\frac{1}{2}$, lemniscata de Bernoulli.

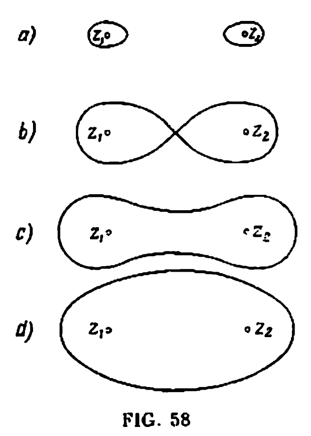


FIG. 58

Para un número mayor de focos se obtienen más variedades de formas distintas de las lemniscatas. Hilbert demostró que para la frontera Γ de un recinto arbitrario G, simplemente conexo, y para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede señalar una lemniscata Λ tal, que en el ε-entorno de cada punto del conjunto Γ siempre existirán puntos de la lemniscata Λ, y además, cada punto de la lemniscata Λ estará situado en el ε-entorno de un punto correspondiente del conjunto Γ. En otras palabras, *las fronteras de cualesquiera recintos simplemente conexos pueden aproximarse con lemniscatas con una precisión arbitraria.*

Observemos la variación de una lemniscata con n focos z_1, z_2, . . ., z_n, en dependencia de la variación de su radio r. Para fijar ideas, supondremos que todos los puntos z_1, z_2, . . ., z_n son distintos

entre sí y hagamos $P(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n)$. Si el número positivo δ es tan pequeño que los círculos k_j: $|z - z_j| < \delta$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) no tienen puntos comunes dos a dos, entonces para $r < \delta$ ningún punto del conjunto E_{r^n}: $|P(z)| < r^n$ puede estar situado fuera de los círculos k_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Como, por otra parte, los centros de los círculos son puntos interiores de E_{r^n}, el conjunto E_{r^n} consta al menos de n recintos situados dentro de los círculos k. Pero la cantidad total de recintos en los que se descompone E_{r^n} no puede ser mayor que n; por lo tanto, tiene que haber exactamente n, uno en cada círculo k_j. Por consiguiente, la lemniscata correspondiente $|P(z)| = r^n$ consta de n continuos que no tienen puntos comunes dos a dos y son las fronteras de recintos simplemente conexos.

Sea ahora K un círculo de diámetro D que contenga en su interior a todos los focos de la lemniscata. Entonces, cada punto del círculo K satisface a la desigualdad $|z - z_j| < D$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) y, por consiguiente, $|P(z)| < D^n$ en el interior de K. De aquí que el círculo K pertenecerá totalmente a E_{r^n} si $r > D$. Por lo tanto, E_{r^n} constará solamente de un recinto que contendrá a este círculo (ya sabemos que cada recinto E_{r^n} tiene que contener en su interior al menos uno de los puntos z_j). La lemniscata correspondiente representará un continuo, que será la frontera de este recinto.

Así, pues, la lemniscata con n focos ($n > 1$) es desconexa, precisamente consta de n continuos que no tienen puntos comunes dos a dos, para valores del radio suficientemente pequeños ($r < \delta$) y es conexa para todos los valores del radio suficientemente grandes ($r > D$).

Obsérvese, finalmente, que la lemniscata $|P_n(z)| = r^n$ pertenece a cualquier conjunto $E_{r'^n}$, donde $r' > r$, y, por consiguiente, todos los continuos que la forman están comprendidos en el interior de los recintos simplemente conexos que están limitados por las componentes de la lemniscata $|P_n(r)| = r'^n$. En otras palabras, la lemniscata de un radio dado está comprendida estrictamente en el interior de cualquier lemniscata de mayor radio (y con los mismos focos). Por lo tanto, la variación de la forma de la lemniscata en dependencia del crecimiento de r se puede considerar como un abultamiento de sus componentes. Teniendo forma de óvalos pequeños para valores pequeños de r, éstos aumentan lentamente cambiando su forma. Para algunos valores de r algunas componentes conexas: dos, tres o más, se confunden en una, debido a lo cual el número total de componentes disminuye; después se produce un abultamiento consiguiente que va acompañado de vez en cuando de una disminución posterior de la cantidad de componentes, y, finalmente, se obtiene una lemniscata en forma de una curva conexa única. Precisamente

ésta teníamos en cuenta cuando hablábamos antes del resultado de Hilbert.

La diversidad de formas de estas curvas se explica por la cantidad y métodos distintos que hay de distribución de los focos de la lemniscata en el plano. En la fig. 59 se muestra esquemáticamente la

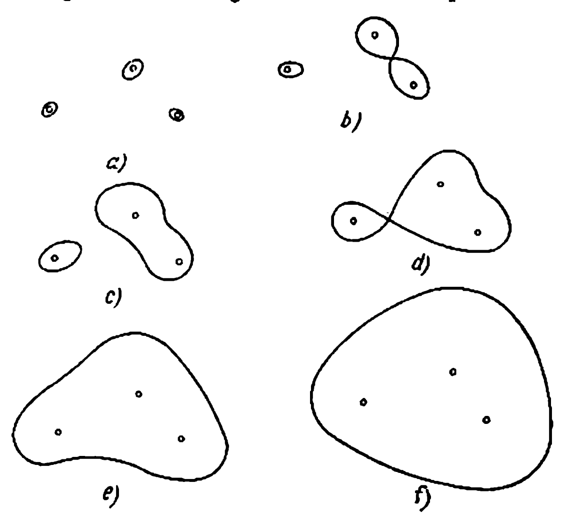


FIG. 59

evolución de la forma de la lemniscata en dependencia del valor del radio para el caso de tres focos (no situados en una recta).

Detengámonos en una aplicación más del principio del módulo máximo, que desempeña un papel importante en los problemas de transformación mediante funciones analíticas.

L e m a d e S c h w a r z. *Sea $f(z)$ una función analítica en el círculo K: $|z| < R$; supongamos que se anula en el origen de coordenadas y satisface en este círculo a la desigualdad*

$$|f(z)| \leqslant M \qquad (M < \infty). \tag{6.2:1}$$

Entonces en cualquier punto del círculo K se verifica la desigualdad

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R}|z| \tag{6.2:2}$$

y, además,

$$|f'(0)| \leqslant \frac{M}{R}. \tag{6.2:3}$$

Puede alcanzarse la igualdad en la relación (6.2:2) en algún punto $z(0<|z|<R)$, o la igualdad en la relación (6.2:3), sólo cuando $f(z)$ es una función lineal entera de la forma

$$f(z)=\frac{M}{R}e^{i\alpha}z \tag{6.2:4}$$

(α es un número real).

Para la demostración, consideremos el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Taylor:

$$f(z)=f'(0)\,z+\frac{f''(0)}{2}z^2+\ldots \tag{6.2:5}$$

De aquí se ve que la función

$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}=f'(0)+\frac{f''(0)}{2}z+\ldots \tag{6.2:6}$$

es analítica en el círculo K y su valor en el origen de coordenadas es igual a $f'(0)$. Sea z un punto arbitrario del círculo K y r, un número que satisface a las desigualdades $|z|<r<R$. Como para todos los puntos ζ situados en la circunferencia γ: $|\zeta|=r$, se verifica la desigualdad

$$|\varphi(\zeta)|=\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|}\leqslant\frac{M}{r},$$

en virtud del principio del módulo máximo, esta misma desigualdad tiene que verificarse en el punto z, situado en el interior de la circunferencia γ:

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{M}{r}.$$

Pasando al límite cuando r tiende a R, obtenemos:

$$|\varphi(z)|\leqslant\frac{M}{R}. \tag{6.2:7}$$

Si $z\neq0$, se puede sustituir $\varphi(z)$ por $\frac{f(z)}{z}$ y esta desigualdad toma la forma

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{R}|z|.$$

Hemos obtenido la desigualdad (6.2:2) (que también se cumple, evidentemente, para $z=0$). Si $z=0$, se tiene $\varphi(0)=f'(0)$, y la desigualdad (6.2:7) toma la forma

$$|f'(0)|\leqslant\frac{M}{R}.$$

Esta es la desigualdad (6.2:3).

Si la primera de las desigualdades obtenidas se convierte en igualdad en cierto punto $z \in K$, distinto del origen de coordenadas, o si la segunda desigualdad se convierte en igualdad, esto significa que en la relación (6.2:7) se alcanza el signo de igualdad en uno de los puntos del círculo K. De aquí que en este punto el módulo $|\varphi(z)|$ alcanza el máximo, de donde, en virtud del principio del módulo máximo,

$$\varphi(z) \equiv \text{const.}$$

Como el módulo de esta constante es igual a $\frac{M}{R}$, se tiene

$$\varphi(z) \equiv \frac{M}{R} e^{i\alpha},$$

o bien

$$f(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha} z.$$

Con esto se termina la demostración del lema de Schwarz.

El lema de Schwarz tiene un significado geométrico sencillo. De él se deduce que si $w = f(z)$ es una función analítica en el círculo K: $|z| < R$, y la imagen $f(K)$ de este círculo está contenida en el círculo $|w| < M$, siendo el punto $w = 0$ la imagen del punto $z = 0$, entonces la imagen $f(k)$ de cada círculo cerrado k: $|z| \leqslant r$ cuyo radio sea $\lambda = \frac{r}{R}$ veces menor que el radio del círculo K, estará contenida en el círculo cerrado $|w| \leqslant \frac{r}{R} M$, cuyo radio es λ veces menor que M. Además, la imagen de algún punto z_0 situado en la circunferencia $|z| = r$ puede caer en la circunferencia $|w| = \frac{r}{R} M$ solamente cuando la transformación sea de la forma (6.2:4), es decir, conste de una rotación alrededor del origen de coordenadas y una dilatación respecto del mismo en λ veces.

6.3. Consideremos una función $\varphi(z)$ analítica en un círculo K: $|z - z_0| < R$ $(R < \infty)$. A tal función llamaremos e l e m e n t o (se sobrentiende elemento de la función analítica). Los puntos que están situados en la circunferencia Γ: $|z - z_0| = R$, los dividiremos en dos clases (*a priori*, cada una de las clases puede ser vacía):

1) a los puntos $\zeta \in \Gamma$ que poseen un entorno U_ζ : $|z - \zeta| < \rho$, en el cual existe una función analítica $\psi_\zeta(z)$ que coincide con $\varphi(z)$ en la parte común de los círculos K y U_ζ, llamaremos puntos r e g u l a r e s del elemento dado;

2) a los puntos de Γ que no poseen tal entorno llamaremos puntos s i n g u l a r e s del elemento.

Por lo tanto, la definición de punto singular es de carácter negativo. Estos son los puntos frontera del círculo K que no poseen ningún entorno en el cual se podría hallar una función analítica que

coincidiese con $\varphi(z)$ en los puntos que son comunes a este entorno y al círculo K.

De la definición de punto regular se deduce que si $\zeta_0 \in \Gamma$ es un punto regular, entonces todos los puntos del arco de circunferencia Γ que está situado en el interior del entorno correspondiente U_{ζ_0} también son regulares. En efecto, para tal punto ζ se puede tomar por U_ζ cualquier círculo con el centro en ζ, contenido en U_{ζ_0}, y por función $\psi_\zeta(z)$, la misma función $\psi_{\zeta_0}(z)$, que, siendo analítica en U_{ζ_0} coincidía con $\varphi(z)$ en todos los puntos que son comunes a U_{ζ_0} y K. De aquí, en particular, se deduce que, si existe un punto regular, entonces existe también un conjunto infinito de ellos. En contraposición a esto, el punto singular puede ser único.

Obsérvese que cada punto $z' \in K$ posee la propiedad característica de un punto regular, pues para él existen un entorno $U_{z'}$ (se puede tomar cualquier entorno del punto z' que esté contenido en K) y una función analítica en $U_{z'}$ (la función misma $\varphi(z)$), que coincide con $\varphi(z)$ en todos los puntos comunes a $U_{z'}$ y K (es decir, en $U_{z'}$). Por esta razón, a todos los puntos del círculo K los llamaremos también puntos regulares del elemento $\varphi(z)$.

Aclaremos los conceptos introducidos en un ejemplo sencillo. Sea K el círculo unidad y $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$. Para todo punto ζ situado en la frontera del círculo K, es decir, en la circunferencia unidad, y distinto de la unidad, existe un entorno U_ζ: $|z - \zeta| < |1 - \zeta|$ y en el mismo una función analítica $\psi_\zeta(z) = \frac{1}{1-z}$ que coincide con $\varphi(z)$ en los puntos que son comunes a K y a U_ζ. Por lo tanto, cada punto de éstos ζ es un punto regular del elemento $\varphi(z)$.

Verifiquemos que el punto 1 es un punto singular del elemento. En efecto, en caso contrario existiría en un entorno U de este punto una función analítica $\psi(z)$ que coincidiría con $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$ en los puntos del recinto d que es la parte común de U y K. Pero entonces tendría que existir y ser finito el límite:

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in d}} \psi(z) = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in d}} \frac{1}{1-z} = \psi(1),$$

lo cual, evidentemente, es imposible. Así, pues, el punto 1 es un punto singular del elemento dado.

Demostremos la siguiente proposición.

Si cada punto de la circunferencia Γ es regular para el elemento $\varphi(z)$, entonces existe un elemento $\psi(z)$ que representa una función analítica en cierto círculo K_1: $|z - z_0| < R_1$, cuyo radio R_1 es mayor que el radio R de la circunferencia Γ, y que coincide con $\varphi(z)$ en todos los puntos del interior de Γ (es decir, en todos los puntos del círculo K).

Para la demostración, reunamos en un conjunto D todos los puntos del círculo K y de los círculos U_ζ que figuran en la definición de puntos regulares ζ (para todos $\zeta \in \Gamma$) (fig. 60).

Evidentemente, D es un conjunto abierto. En efecto, todo punto $z' \in D$ tiene que pertenecer a uno de los círculos K o U_ζ, y, por consiguiente, tiene que poseer un entorno perteneciente a este mismo círculo (es decir, a K o a U_ζ, respectivamente), y por lo tanto, perteneciente también al conjunto D. Demostremos ahora que D es un

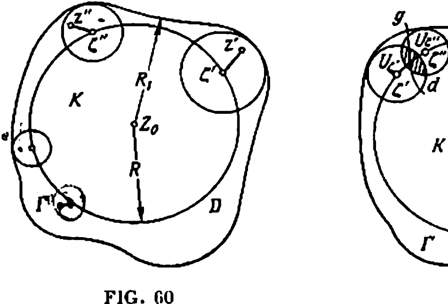


FIG. 60

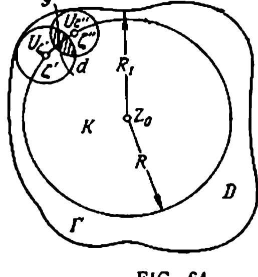


FIG. 61

conjunto conexo. Es suficiente demostrar que para dos puntos cualesquiera z' y z'' contenidos en D existe una curva continua que los une, perteneciente también a D.

Si z' y z'' pertenecen a un mismo círculo (K o U_ζ), se puede tomar por γ el segmento rectilíneo que los une; éste pertenece al mismo círculo y, por lo tanto, pertenece también al conjunto D. Si un punto pertenece a K, por ejemplo z', y el otro, z'' pertenece a U_ζ entonces se puede tomar por γ la poligonal compuesta de dos lados: del segmento rectilíneo que une z' con ζ, y del segmento rectilíneo que une ζ con z''. Como el segmento $z'\zeta$ pertenece a K (a excepción de su extremo ζ, situado en Γ), y el segmento $z''\zeta$ pertenece por completo a U_ζ (incluyendo su punto inicial ζ, que es el centro del círculo U_ζ), en este caso γ también estará contenido en D. Supongamos, finalmente, que z' y z'' pertenecen a dos entornos distintos $U_{\zeta'}$ y $U_{\zeta''}$. Entonces se puede tomar por γ la curva que consta del segmento rectilíneo $z'\zeta'$, del arco de la circunferencia $\zeta'\zeta''$ y del segmento rectilíneo $\zeta''z''$. Esta curva está contenida en D, puesto que el segmento $z'\zeta'$ está contenido en $U_{\zeta'}$, el segmento $\zeta''z''$ está contenido en $U_{\zeta''}$ y cada punto ζ del arco $\zeta'\zeta''$ de la circunferencia Γ pertenece al círculo correspondiente U_ζ cuyo centro es ζ.

Queda demostrado que D es un conjunto abierto y conexo, es decir, es un recinto. Definamos ahora en el recinto D la función

$\psi(z)$, haciendo $\psi(z) = \varphi(z)$ si $z \in K$, y $\psi(z) = \psi_\zeta(z)$ si $z \in U_\zeta$. Demostremos que esta función es uniforme y analítica en todo el recinto D. La demostración de la uniformidad es necesaria, puesto que un mismo punto z puede pertenecer al círculo K y a un círculo U_ζ o a dos círculos distintos $U_{\zeta'}$ y $U_{\zeta''}$ y entonces en el primer caso se debe tomar por $\psi(z)$ los valores de $\varphi(z)$ y $\psi_\zeta(z)$, y en el segundo caso, los valores de $\psi_{\zeta'}(z)$ y $\psi_{\zeta''}(z)$. Tenemos que convencernos que en uno y otro caso ambos resultados coinciden entre sí, es decir dan un valor único de $\psi(z)$.

En efecto, supongamos que $z \in K$ y $z \in U_\zeta$; esto significa que z pertenece a la parte común de los círculos K y U_ζ. Pero, según la definición de punto regular, $\varphi(z)$ y $\psi_\zeta(z)$ tienen que coincidir en esta parte común. Así, pues, $\varphi(z) = \psi_\zeta(z) = \psi(z)$. Supongamos ahora que $z \in U_{\zeta'}$ y $z \in U_{\zeta''}$. Esto significa que los círculos $U_{\zeta'}$ y $U_{\zeta''}$ de centros distintos ζ' y ζ'' tienen una parte común: la lúnula circular g (fig. 61), a la cual pertenece también el punto z. En la parte que es común para el círculo K y la lúnula g, que designaremos mediante d, los valores de $\psi_{\zeta'}(z)$ y $\psi_{\zeta''}(z)$ coinciden, puesto que d pertenece a la intersección de $U_{\zeta'}$ y K, en los puntos de la cual $\psi_{\zeta'}(z) = \varphi(z)$, y también a la intersección de $U_{\zeta''}$ y K, en los puntos de la cual $\psi_{\zeta''}(z) = \varphi(z)$. En virtud del teorema interior de unicidad, dos funciones analíticas en el recinto g, $\psi_{\zeta'}(z)$ y $\psi_{\zeta''}(z)$, que coinciden en una de sus partes d (que también es un recinto), tienen que coincidir también en todo el recinto g: $\psi_{\zeta'}(z) = \psi_{\zeta''}(z)$, y de nuevo obtenemos un valor único para $\psi(z)$. Por lo tanto, la función $\psi(z)$ que hemos definido es uniforme en el recinto D. Su analiticidad en este recinto se deduce de que cada punto $z \in D$ pertenece a uno de los círculos K o U_ζ, en los cuales $\psi(z)$, según su definición, coincide con la función analítica $\varphi(z)$ o $\psi_\zeta(z)$.

Obsérvese ahora que todos los puntos frontera del recinto D están situados en el exterior a la circunferencia Γ (puesto que los puntos del interior de Γ, es decir, los puntos del círculo K, y todos los puntos de la circunferencia Γ están contenidos en D y, por consiguiente, no son puntos frontera para D). De aquí que la distancia R_1 desde el punto z_0 hasta la frontera del recinto D, que tiene que coincidir con la distancia desde z_0 hasta cierto punto frontera del recinto D, es mayor que el radio de la circunferencia Γ, es decir, $R_1 > R$. Evidentemente, el círculo K_1: $|z - z_0| < R_1$ y la función $\psi(z)$ satisfacen a todas las condiciones del lema. A saber, la función $\psi(z)$ es analítica en el círculo K_1 de radio mayor que R, y coincide con $\varphi(z)$ en el círculo K.

La proposición está demostrada.

Consideremos una serie de potencias arbitraria

$$\varphi(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (6.3:1)$$

cuyo radio de convergencia satisfaga a la condición $0 < R < \infty$. Debido a la definición, la suma de esta serie $\varphi(z)$ es un elemento en el círculo K: $|z - z_0| < R$.

Demostremos el teorema siguiente:

Teorema. *En la frontera* Γ: $|z - z_0| = R$ *del círculo de convergencia de una serie de potencias está situado al menos un punto singular del elemento* $\varphi(z)$ *(es decir, de la suma de la serie de potencias).*

La demostración se hará por reducción a lo absurdo. Si el teorema no es cierto, entonces cada punto de la circunferencia Γ tiene que ser regular para el elemento $\varphi(z)$. Según lo demostrado anteriormente, tiene que existir una función $\psi(z)$, analítica en cierto círculo K_1: $|z - z_0| < R_1$, donde $R_1 > R$, que coincide con $\varphi(z)$ en el círculo K. De la igualdad $\varphi(z) = \psi(z)$, que se cumple en los puntos del círculo K, se deduce que el desarrollo de Taylor de la función $\psi(z)$ tiene que coincidir con la serie (6.3:1). Pero, según el teorema de Cauchy, el desarrollo de $\psi(z)$ tiene que converger en todo el círculo K_1 de radio $R_1 > R$, mientras que, según la hipótesis, el radio de convergencia de la serie (6.3:1) es igual a R. De la contradicción obtenida se deduce que el teorema enunciado es justo.

Consecuencia. *Para que el radio de convergencia R del desarrollo de Taylor de una función $f(z)$:*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (6.3:2)$$

que es analítica en cierto círculo $|z - z_0| < \rho$, *coincida con el radio* ρ *de este círculo, es necesario y suficiente que en la circunferencia* γ: $|z - z_0| = \rho$ *esté situado al menos un punto singular del elemento* $f(z)$.

En efecto, si $R = \rho$, entonces, según el teorema anterior, obtenemos que en la circunferencia γ está situado al menos un punto singular del elemento $f(z)$. Por eso, la condición enunciada es necesaria para la igualdad de R y ρ. Pero ésta es también suficiente para esta igualdad. En efecto, según el teorema de Cauchy, $R \geqslant \rho$. Suponiendo que en la circunferencia γ esté situado al menos un punto singular del elemento $f(z)$ y $R \neq \rho$, tiene que ser $R > \rho$. En este caso, la suma de la serie (6.3:2) representa una función analítica en el círculo $|z - z_0| < R$ que, por consiguiente, es analítica en cierto entorno de cada punto de la circunferencia γ y que coincide con $f(z)$ en el interior de γ. De aquí se deduce que cada punto de la circunferencia γ es regular para $f(z)$. De la contradicción obtenida se deduce que la afirmación es justa.

Como ejemplo, veamos la serie geométrica

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Su radio de convergencia es igual a la unidad y su suma es igual a $\frac{1}{1-z}$. Como ya se vio, en la frontera del círculo de convergencia $|z| = 1$ verdaderamente existe un punto singular que es, además, único: $z = 1$.

Se pueden señalar sin dificultad ejemplos de series de potencias para las cuales cada punto de la frontera del círculo de convergencia es singular. He aquí uno de los ejemplos más sencillos de este género.

Examinemos la serie:

$$f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + \ldots$$

Evidentemente, su radio de convergencia es igual a la unidad. Demostremos que para $z \to 1$ (por el interior del círculo unidad, a lo largo del radio, es decir, a lo largo del eje real), $f(z)$ tiende a ∞. En efecto, para cualquier natural n, la suma parcial de la serie $1 + x^2 + \ldots + x^{2^n}$ para $x \to 1$ tiende a $n + 1$ y, por consiguiente, satisface a la desigualdad

$$1 + x^2 + \ldots + x^{2^n} > n \quad \text{para} \quad 1 - x < \delta(n),$$

$$\text{es decir, para } x > 1 - \delta(n).$$

Pero, para estos mismos valores de x, se tiene:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} x^{2^k} > \sum_{0}^{\infty} x^{2^k} > n,$$

de donde se deduce que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty.$$

Basándose en este resultado nos convencemos fácilmente, igual que en el caso anterior de la progresión geométrica, que el punto 1 es singular para $f(z)$.

Obsérvese ahora la identidad:

$$f(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + [1 + (z^{2^n})^2 + (z^{2^n})^4 + \ldots].$$

Como la serie entre corchetes se diferencia de la inicial solamente en que aquí z se ha sustituido por z^{2^n}, sacamos la conclusión de que

$$f(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$$

para cualquier natural n.

Consideremos todas las raíces de la unidad de orden 2^n: $\sqrt[2^n]{1}$. Estas representan puntos situados en la circunferencia unidad en los vértices de un polígono regular de 2^n lados. Si ζ es uno de éstos y el punto z del círculo unidad está situado en el radio $O\zeta$, entonces z^{2^n},

evidentemente, es un número positivo y para $z \to \zeta$, se tiene que $z^{2^n} \to 1$. De aquí que $\lim\limits_{\substack{z \to \zeta \\ z \in O_\zeta}} f(z^{2^n}) = \infty$ y, por consiguiente,

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in O_\zeta}} f(z) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in O_\zeta}} [z^3 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + f(z^{2^n})] = \infty.$$

Así, pues, cada una de las raíces $\sqrt[2^n]{1}$ también es un punto singular de $f(z)$ (para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots$). Vemos que el conjunto de puntos singulares del elemento $f(z)$ es denso en toda la circunferencia unidad (es decir, está situado de tal modo que cualquier arco de la circunferencia, arbitrariamente pequeño, contiene puntos de este conjunto).

Pero de aquí se deduce que todos los puntos de la circunferencia unidad sin excepción son puntos singulares de $f(z)$, puesto que para un punto regular, si tal hubiese en la circunferencia unidad, existiría también un arco entero cuyos puntos todos tendrían que ser también regulares, lo cual en el caso dado es imposible.

Indiquemos un método general que permite averiguar, para cualquier punto ζ situado en la frontera Γ del círculo de convergencia de la serie de potencias (6.3:1), si éste es un punto regular o singular para la suma $\varphi(z)$ de la serie. Sea z_1 un punto del radio $z_0\zeta$, distinto de z_0 y ζ. Desarrollemos la suma $\varphi(z)$ de la serie en serie de potencias de $z - z_1$. Obtendremos:

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z - z_1) + \ldots + b_n(z - z_1)^n + \ldots, \qquad (6.3:3)$$

donde

$$b_n = \frac{\varphi^{(n)}(z_1)}{n!} = a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1}(z_1 - z_0) + $$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2} a_{n+2}(z_1 - z_0)^2 + \ldots \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Según el teorema de Cauchy, la serie de potencias obtenida es convergente en el círculo $|z - z_1| < \Delta$, donde Δ es la distancia desde z_1 hasta Γ, es decir, $\Delta = R - |z_1 - z_0|$. Por lo tanto, la serie (6.3:3) es convergente en el interior de una circunferencia γ con el centro en el punto z_1, que es tangente a la circunferencia Γ en el punto ζ. Calculemos el radio de convergencia de la serie (6.3:3). Según la fórmula de Cauchy-Hadamard, se tiene:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}}.$$

Si r coincide con Δ, en la circunferencia γ: $|z - z_0| = \Delta$ tiene que haber al menos un punto singular de la suma de la serie (6.3:3).

Pero ningún punto $\zeta' \in \gamma$, situado en el interior de K, puede ser singular para esta serie, puesto que en un entorno del punto ζ', perteneciente por completo a K, $\varphi(z)$ es una función analítica que en el interior de γ coincide con la suma de la serie (6.3:3). Por consiguiente, el punto ζ es singular. Evidentemente, ésto tiene que ser también singular para $\varphi(z)$, que es la suma de la serie (6.3:1). Suponiendo lo contrario tendríamos una función $\psi(z)$, analítica en cierto

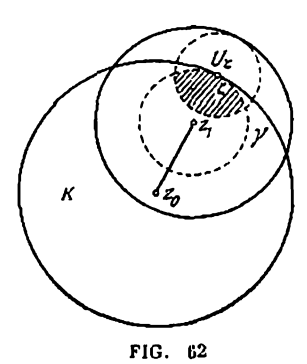


FIG. 62

entorno U_ζ del punto ζ, la cual coincidiría con $\varphi(z)$ en los puntos del entorno U_ζ situados en el interior de K. Pero entonces esta misma función coincidiría con la suma de la serie (6.3:3) en los puntos del entorno U_ζ situados en el interior de γ, es decir, ζ no sería un punto singular para la serie (6.3:3).

Así, pues, si

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}},$$

el punto ζ es singular para $\varphi(z)$. Demostremos que si $\Delta \neq r$, es decir, si $\Delta < r$, el punto ζ es regular para $\varphi(z)$.

En efecto, en este caso la suma de la serie (6.3:3) representa una función $\psi(z)$, que es analítica en el entorno U_ζ del punto ζ y coincide con $\varphi(z)$ en la parte del círculo U_ζ que está situada en el interior de γ (fig. 62). Pero $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ son funciones uniformes analíticas en la lúnula que representa la parte común de los círculos U_ζ y K. Como éstas coinciden en la parte de la lúnula que está rayada en el dibujo, según el teorema de unicidad, $\psi(z)$ coincide también con $\varphi(z)$ en toda la lúnula. En resumen, en este caso el punto ζ es regular para $\varphi(z)$.

Por lo tanto, queda demostrado que *el punto ζ será singular o regular para $\varphi(z)$ según que se cumpla la igualdad*

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}},$$

o la desigualdad

$$\Delta < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}.$$

Como ilustración del criterio obtenido demostremos el siguiente teorema de Pringsheim:

Si los coeficientes de la serie $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$, con el círculo unidad de convergencia, son números reales no negativos $a_n \geqslant 0$, el punto $z = 1$ es singular para la suma de la serie.

Para demostrarlo, tomemos algún punto $z_1 = x$ en el intervalo $(0, 1)$.

Suponiendo que el punto $z = 1$ no es singular para la suma de la serie, según lo que acabamos de demostrar, tiene que verificarse la desigualdad

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = 1 - x < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(x)|}{n!}}}. \qquad (6.3:4)$$

Consideremos ahora un punto arbitrario ζ de la circunferencia unidad; sea z_1 un punto del radio $O\zeta$, situado en la circunferencia $|z| = x$, es decir, $|z_1| = x$. Entonces para z_1 la distancia Δ hasta la circunferencia unidad será también igual a $1 - x$. Por otra parte,

$$\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!} = \left| a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} z_1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} a_{n+2} z_1^2 + \dots \right| \leqslant$$
$$\leqslant a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} x + \frac{(n+1)(n+2)}{2!} a_{n+2} x^2 + \dots = \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}} \geqslant \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}}}. \qquad (6.3:5)$$

Debido a esto, para el punto z_1, según las desigualdades (6.3:4) y (6.3:5), se tiene:

$$\Delta < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\varphi^{(n)}(z_1)}{n!}}},$$

de donde se deduce que para la suma de la serie de potencias $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ cualquier punto de la circunferencia unidad es regular. Pero, como ya se sabe, esto contradice a la hipótesis del teorema que estamos demostrando (que la circunferencia unidad es la frontera del círculo de convergencia).

Así, pues, el punto $z = 1$ tiene que ser un punto singular para la suma de la serie $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ si $a_n \geqslant 0$ y $R = 1$.

De la demostración del teorema se ve que, si en lugar del punto $z = 1$ se considera cualquier otro punto ζ de la circunferencia unidad, entonces, para que ζ sea un punto singular es suficiente que los números $a_n \zeta^n$ sean reales no negativos. Mejor dicho, es suficiente que estos números sean reales y no negativos solamente desde cierto $n \geqslant n_0$ en adelante, puesto que representando $\varphi(z)$ en la forma

$$\varphi(z) = \sum_{0}^{n_0-1} a_k z^k + \sum_{n_0}^{\infty} a_k z^k,$$

nos convencemos inmediatamente de que el punto ζ será singular para $\varphi(z)$ cuando, y sólo cuando, éste sea un punto singular para la suma de la serie $\sum_{n_0}^{\infty} a_k z^k$.

Consideremos, por ejemplo, la serie $\sum_{0}^{\infty} \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$. Aquí los coeficientes a_n son iguales a cero si $n \neq 2^k$, y son iguales a $\frac{1}{2^{k^2}}$ si $n = 2^k$. Por consiguiente,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{\frac{1}{2^{k^2}}} = 1,$$

de donde, según la fórmula de Cauchy-Hadamard, se deduce que el radio de convergencia de la serie es igual a la unidad.

Por lo tanto, según el teorema demostrado, el punto $z = 1$ es un punto singular para la suma $\varphi(z)$ de la serie. Pero, del mismo teorema (en virtud de la observación hecha anteriormente) se deduce que cada punto $\zeta = \sqrt[2^n]{1}$, donde n es un número natural arbitrario, también es un punto singular para $\varphi(z)$. En efecto, para $k \geqslant n$, se tiene:

$$\frac{\zeta^{2^k}}{2^{k^2}} = \frac{(\zeta^{2^n})^{2^{k-n}}}{2^{k^2}} = \frac{1}{2^{k^2}} > 0.$$

Así, pues, el conjunto de los puntos singulares de la función $\varphi(z)$ es denso en toda la circunferencia unidad. De aquí que en esta circunferencia no hay ningún punto regular del elemento $\varphi(z)$, es decir, todos los puntos ζ, $|\zeta| = 1$, son singulares.

Lo más admirable es que esta circunstancia no es un obstáculo para que la serie de potencias dada sea absoluta y uniformemente convergente en el círculo unidad cerrado y su suma $\varphi(z)$ sea una función infinitamente diferenciable en el conjunto $|z| \leqslant 1$ (en particular, en todos los puntos singulares). En efecto, para $|z| \leqslant 1$, se tiene:

$$\left|\frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}\right| \leqslant \frac{1}{2^{k^2}},$$

y como la serie $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{2^{k^2}}$ es convergente, la serie $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$ será absoluta y uniformemente convergente en el círculo cerrado, por lo cual su suma $\varphi(z)$ será una función continua en el círculo cerrado. Derivando ahora la serie dada término a término cualquier número m de veces, resulta la serie:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{2^k(2^k-1)\ldots(2^k-m+1)}{2^{k^2}} z^{2^k-m},$$

los módulos de cuyos términos para $|z| \leqslant 1$ satisfacen a las desigualdades

$$\left|\frac{2^k(2^k-1)\ldots(2^k-m+1)}{2^{k^2}} z^{2^k-m}\right| \leqslant \frac{2^{km}}{2^{k^2}} = \frac{1}{2^{k(k-m)}} < \frac{1}{2^k}$$

para $k > m$. Por consiguiente, las series que se obtienen derivando término a término la serie de potencias $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$ converge uniformemente en el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$. De aquí, según el teorema conocido para las funciones de variable real, que sin alteración alguna se extiende para las funciones de variable compleja (definidas, por ejemplo, en algún recinto convexo) se deduce que estas series representan las derivadas de $\varphi^{(m)}(z)$. En resumen, $\varphi(z)$ es una función continua e infinitamente diferenciable en el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$ y analítica en el interior del círculo, para la cual cada punto del círculo unidad es un punto singular.

Este ejemplo instructivo muestra que en algunos casos la existencia de puntos singulares de una función analítica en la frontera del recinto considerado (del círculo) puede no reflejarse a primera vista en el comportamiento de la función en la proximidad del punto

singular, o más exactamente, este último puede quedar desapercibido a pesar de que la función o sus derivadas dejen de ser continuas en el punto frontera ζ dado. Es necesario considerar todas las derivadas de $\varphi(z)$ en un punto z_1 del recinto dado para que de la comparación de la magnitud $\left[\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}\right]^{-1}$ con la distancia Δ desde el punto z_1 hasta el punto ζ se pueda decir si el punto ζ es singular o regular.

Las proposiciones establecidas en la pág. 336 permiten hallar frecuentemente el radio de convergencia del desarrollo de Taylor de una función analítica $f(z)$, sin tener que calcular los coeficientes de la serie, es decir, los números $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$. En este caso, todo se reduce a buscar los puntos singulares de los elementos. Hay que tener presente aquí que para la función dada $f(z)$, analítica en cierto recinto G, existe un conjunto infinito de elementos distintos y, correspondientemente, un conjunto infinito de círculos con diferentes centros, pertenecientes al recinto. Por lo tanto, suele haber puntos singulares de elementos distintos de una misma función analítica, pudiendo ocurrir que un punto que es singular para unos elementos sea regular para otros. Estos casos los aclararemos ahora en ejemplos sencillos. Obsérvese primero que, cuando la función analítica $f(z)$ viene dada por una fórmula que consta de un número finito de funciones elementales, los puntos singulares posibles de sus elementos se hallan fácilmente entre los puntos de discontinuidad de esta función, por ejemplo, entre los puntos en los que ésta se hace infinita y también entre los puntos de ramificación de la función $f(z)$.

E j e m p l o 1. Sea $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$. Esta función es uniforme y analítica en todo el plano, a excepción de los puntos $z=\pm i$, en los cuales se hace igual a ∞. Sea z_0 un punto arbitrario, distinto de $\pm i$; con el centro en el mismo, describamos una circunferencia γ: $|z-z_0|=\rho$, que pase por el punto $+i$ o $-i$ más próximo a z_0. Para precisar, supongamos que el punto más próximo es i. En el interior de γ la función $f(z)$ es analítica y, por consiguiente, representa un elemento. Cerciorémonos de que el punto i es un punto singular del elemento. En efecto, suponiendo lo contrario, tendremos que tener un entorno U del punto i y en el mismo, una función analítica $\psi(z)$, que coincide con $f(z)$ en la parte del entorno U que está situada en el interior de γ (esta parte la designaremos con d). Entonces en el punto i tiene que existir un límite finito

$$\psi(i)=\lim_{\substack{z\to i\\ z\in d}}\psi(z)=\lim_{\substack{z\to i\\ z\in d}}f(z)=\lim_{\substack{z\to i\\ z\in d}}\frac{1}{1+z^2},$$

lo cual, evidentemente, es imposible.

Así, pues, en γ está situado un punto singular del elemento $f(z)$ y, por consiguiente, el radio de convergencia R del desarrollo de Taylor de $f(z)$, en serie de potencias de $z - z_0$, coincide con el radio ρ de la circunferencia γ, es decir, con la distancia desde z_0 hasta el punto $\pm i$ más próximo al mismo.

En este caso, el desarrollo de Taylor es más fácil obtenerlo descomponiendo $\frac{1}{1+z^2}$ en fracciones simples y aplicando después la serie geométrica. Resulta:

$$\frac{1}{1+z^2} = -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-z} + \frac{1}{i+z}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{i-z_0}} + \frac{1}{i+z_0}\,\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{i+z_0}}\right).$$

Como $\left|\frac{z-z_0}{i-z_0}\right| < 1$ y $\left|\frac{z-z_0}{i+z_0}\right| < 1$ (el punto z está situado en el interior de γ, y los puntos $\pm i$ están situados ambos en γ o uno de ellos está situado en γ y el otro en el exterior de γ), cada una de las fracciones $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{i-z_0}}$, $\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{i+z_0}}$ puede representarse por una serie geométrica de razón $\frac{z-z_0}{i-z_0}$ o $\frac{z-z_0}{i+z_0}$. Resulta:

$$\frac{1}{1+z^2} = -\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-z_0}\sum_0^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{i-z_0}\right)^n + \frac{1}{i+z_0}\sum_0^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-z_0}{i+z_0}\right)^n\right] =$$
$$= \frac{1}{2i}\sum_0^{\infty}(-1)^{n+1}\left[(z_0+i)^{-n-1} - (z_0-i)^{-n-1}\right](z-z_0)^n.$$

Este es el desarrollo cuyo radio de convergencia R se determinó anteriormente. En particular, para $z_0 = 1$, obtenemos: $R = \rho = \sqrt{2}$, y el desarrollo toma la forma:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_0^{\infty}(-1)^n 2^{-\frac{n+1}{2}} \operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{4}(z-1)^n =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(z-1) + \frac{1}{4}(z-1)^2 - \frac{1}{8}(z-1)^4 + \ldots$$

E j e m p l o 2. Sea $F(z) = \frac{1}{\operatorname{Ln} z}$. Consideremos un recinto G cuya frontera es la parte no negativa del eje real X: $x \geqslant 0$, $y = 0$. En éste, la función multiforme $F(z)$ se descompone en ramas unifor-

mes analíticas, de las cuales consideraremos una:

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{Ln}_1 z} = \frac{1}{\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_1 z},$$

donde $\mathrm{Arg}_1 z$ satisface a las desigualdades:

$$0 < \mathrm{Arg}_1 z < 2\pi.$$

De la fórmula que define $F(z)$ (o $f(z)$) se deduce que los puntos singulares de los elementos de la función $F(z)$ pueden coincidir con $z = 0$ (punto de ramificación de $\mathrm{Ln}\, z$ y $F(z)$) o con el punto $z = 1$,

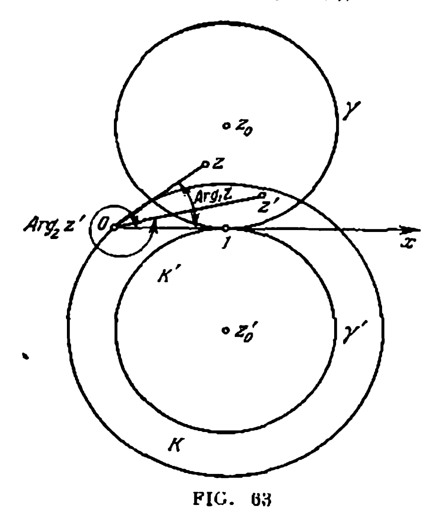


FIG. 63

en el cual se anula uno de los valores del logaritmo. Para precisar, hagamos $z_0 = 1 + i$. Entonces el punto más próximo a z_0 entre los dos puntos 0 y 1 será, evidentemente, el punto 1. Describiendo con el centro en z_0 una circunferencia γ de radio ρ, igual a 1 (fig. 63), hallaremos que $f(z)$ determina en el interior de γ un elemento $\varphi(z)$. Como al tender el punto z (situado en el interior de γ) al punto 1, situado en γ, $\ln|z|$ tiende a 0 y $\mathrm{Arg}_1 z$ también tiende a 0, los valores del elemento $\varphi(z)$ tienden a ∞, de donde, razonando del mismo modo que en el ejemplo anterior, sacamos la conclusión de que $z = 1$ es un punto singular del elemento considerado. Por lo tanto, el radio de convergencia R del desarrollo de Taylor de $\varphi(z)$ (el desarollo se toma en serie de potencias de $z - (1 + i)$) es igual a 1.

Consideremos ahora el punto $z'_0 = 1 - i$ situado en el semiplano inferior. Para éste el próximo de los dos puntos 0 y 1 será de nuevo el punto 1. Describiendo una circunferencia γ' de radio 1 con el centro en z'_0, tendremos en su interior un elemento determinado de la función $f(z)$, el cual designaremos mediante $\psi(z)$. Demostremos que todos los puntos de la circunferencia γ' son puntos regulares de este elemento. Con este fin, consideremos el círculo K: $|z - (1 - i)| < \sqrt{2}$, cuya frontera contiene el punto 0. En el interior del círculo K la función $\operatorname{Ln} z$ se descompone en ramas uniformes analíticas, una de las cuales coincide con $\operatorname{Ln}_1 z$ en el interior de la circunferencia γ' (es suficiente elegir una rama uniforme de $\operatorname{Ln} z$, cuyo valor coincida con $\operatorname{Ln}_1 z$ en el punto z'_0). Designemos esta rama uniforme de $\operatorname{Ln} z$ mediante $\operatorname{Ln}_2 z = \operatorname{Ln}|z| + i \operatorname{Arg}_2 z$. Como en el punto z'_0 el valor de $\operatorname{Arg}_2 z$ coincide con el valor de $\operatorname{Arg}_1 z$, igual a $\frac{7\pi}{4}$, y en el interior del círculo K los valores de $\operatorname{Arg}_2 z$ se diferencian en valor absoluto del valor en el centro de este círculo en una cantidad menor que $\frac{\pi}{2}$, en todos los puntos del círculo K, $\operatorname{Arg}_2 z$ satisface a las desigualdades

$$\frac{5\pi}{4} < \operatorname{Arg}_2 z < \frac{9\pi}{4}.$$

De aquí se deduce que $\operatorname{Ln}_2 z$ no se anula en el círculo K. Por esto la función $\frac{1}{\operatorname{Ln}_2 z}$ es analítica en este círculo. Pero ésta coincide con $\frac{1}{\operatorname{Ln}_1 z}$ en el círculo K: $|z - (1 - i)| < 1$, es decir, coincide con el elemento $\psi(z)$ de la función $f(z)$. De aquí que cada punto de la circunferencia γ' es regular para $\psi(z)$. En efecto, para cada punto $\zeta \in \gamma'$ existe un entorno U_ζ y en el mismo una función analítica $\frac{1}{\operatorname{Ln}_2 z}$, que coincide con $\psi(z)$ en la parte común a U_ζ y K'. En particular, el punto $z = 1$ también será un punto regular para $\psi(z)$. En este ejemplo se ve que un mismo punto $z = 1$ es singular para un elemento de la función analítica $f(z)$ (para $\varphi(z)$) y es regular para otro elemento de esta función (para $\psi(z)$).

Como todos los puntos de la circunferencia γ' son regulares para $\psi(z)$, el radio de convergencia del desarrollo de Taylor de este elemento en serie de potencias de $z - (1 - i)$ es mayor que el radio de la circunferencia γ', es decir, es mayor que 1. Pero en el círculo K' $\psi(z) = \operatorname{Ln}_2 z$, debido a lo cual los desarrollos de Taylor de las funciones $\psi(z)$ y $\operatorname{Ln}_2 z$ coinciden. Como $\operatorname{Ln}_2 z$ es una función analítica en el círculo $|z - (1 - i)| < \sqrt{2}$, el radio de convergencia R' de este desarrollo no puede ser menor que $\sqrt{2}$. Para demostrar que es exactamente igual a $\sqrt{2}$, es suficiente cerciorarse que al menos uno

de los puntos de la circunferencia Γ: $|z-(1-i)|=\sqrt{2}$ es un punto singular para $\frac{1}{\mathrm{Ln}_2 z}$. Tal punto es el origen de coordenadas. En efecto, $\left(\frac{1}{\mathrm{Ln}_2 z}\right)'=-\frac{1}{z(\mathrm{Ln}_2 z)^2}\to\infty$ cuando $z\to 0$ manteniéndose en el interior de Γ. De aquí se deduce que no existe ninguna función $\chi(z)$, analítica en un entorno U del origen de coordenadas, que coincida con $\frac{1}{\mathrm{Ln}_2 z}$ en los puntos comunes a U y K (suponiendo la existencia de tal función habría que suponer también la existencia del límite finito:

$$\chi'(0)=\lim_{z\to 0}\chi'(z)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{Ln}_2 z}\right)',$$

lo cual, como ya se observó, es imposible).

Proponemos al lector cerciorarse de que en este ejemplo, para cada punto z_0 del recinto G, situado en el semiplano superior, el radio de convergencia del desarrollo de Taylor de la función $f(z)$ en serie de potencias de $z-z_0$ es igual a la distancia desde z_0 hasta el punto más próximo al mismo del par 0 y 1, mientras que para los puntos z_0' situados en el semiplano inferior, la distancia desde z_0' hasta 1 no desempeña ningún papel al determinar el radio de convergencia de la serie correspondiente; este radio siempre coincide aquí con la distancia desde z_0' hasta el punto 0.

§ 7. METODOS DE DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS. COMPORTAMIENTO DE LA SERIE DE POTENCIAS EN LA FRONTERA DEL CIRCULO DE CONVERGENCIA

7.1. En este apartado nos dedicaremos a estudiar algunos métodos de desarrollos de las funciones analíticas en series de potencias. De principio, el problema de la búsqueda del desarrollo de Taylor se resuelve por las fórmulas de los coeficientes de la serie

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Pero la realización directa de los cálculos, que se basan en la determinación de las derivadas sucesivas de la función $f(z)$, puede resultar ser muy complicada o incluso difícil de efectuar. Sin embargo, en muchos casos, prácticamente muy importantes, se pueden obtener desarrollos de Taylor deduciéndolos de un modo determinado de otros desarrollos antes ya conocidos.

Supongamos que la función $f(z)$ se expresa en forma de una serie de funciones analíticas que converge uniformemente en el interior

de cierto entorno $|z - z_0| < \rho$ del punto z_0:

$$f(z) = \sum_1^{\infty} f_n(z). \qquad (7.1:1)$$

Entonces, en virtud del teorema de Weierstrass, tendremos:

$$f^{(k)}(z) = \sum_1^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

y

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \sum_1^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(z_0)}{k!}. \qquad (7.1:2)$$

Aquí $\frac{1}{k!} f_n^{(k)}(z_0)$ es el coeficiente de $(z - z_0)^k$ en el desarrollo de Taylor de la función $f_n(z)$, y $\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$, el coeficiente de $(z - z_0)^k$ en el desarrollo de Taylor de la función $f(z)$.

Por consiguiente, *los coeficientes de Taylor de la suma de una serie uniformemente convergente de funciones analíticas* $\sum_1^{\infty} f_n(z)$ *se obtienen sumando los coeficientes de Taylor homólogos* (o sea, los coeficientes de una misma potencia $(z - z_0)^k$, *tomados de los desarrollos de cada una de las funciones* $f_n(z)$.

He aquí dos ejemplos. Consideremos primero la suma de la serie

$$F(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}.$$

Los términos de esta serie son funciones de z, analíticas en el círculo unidad, y la serie $\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ es uniformemente convergente en el interior del círculo unidad. En efecto, si E es un conjunto cerrado de puntos de este círculo y $\delta > 0$ es la distancia desde E hasta la circunferencia unidad, entonces para cualquier punto $z \in E$, se tiene: $|z| \leqslant 1 - \delta = \rho < 1$; por consiguiente, $\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \leqslant$ $\leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho}$, y como la serie $\sum_1^{\infty} \frac{\rho^n}{1-\rho}$ es convergente (ésta es una progresión geométrica de razón ρ), la serie dada también será uniformemente convergente en E, es decir, será uniformemente convergente en el interior del círculo unidad. Para determinar el coeficiente de z^k en el desarrollo de Taylor de $F(z)$, por lo anterior, hay que sumar

los coeficientes de z^k en todos los desarrollos de Taylor de las funciones

$$\frac{z^n}{1-z^n} = z^n + z^{2n} + z^{3n} + \ldots$$

El coeficiente de z^k en tal desarrollo es igual a 0 si k no es divisible por n, y es igual a 1 si k es divisible por n. Por consiguiente, el coeficiente de z^k en el desarrollo de $F(z)$ es igual a una suma de unidades cuya cantidad es igual al número de todos los divisores naturales del número k. Designando este número mediante $\tau(k)$ ($\tau(1) = 1$, $\tau(2) = 2$, $\tau(3) = 2$, $\tau(4) = 3$, $\tau(5) = 2, \ldots$), tendremos:

$$F(z) = \sum_{1}^{\infty} \tau(k) z^k.$$

Este es el desarrollo buscado. Como $F(z)$ es una función analítica en el círculo unidad (según el teorema de Weierstrass), el desarrollo hallado es convergente en el círculo unidad.

Obsérvese también que, para $z = 1$, éste es divergente, puesto que la serie toma la forma $\sum_{1}^{\infty} \tau(k)$, donde todos los términos son números naturales. De aquí que el radio de convergencia es igual a 1.

Veamos también el ejemplo de la serie

$$\Phi(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

La función $\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$ es analítica en todo el plano, menos en los puntos $z = \pm n\pi$, donde se hace ∞. Por consiguiente, cada una de estas funciones es analítica en el círculo $|z| < \pi$. Demostremos que la serie dada es uniformemente convergente en el interior de este círculo. En efecto, si $|z| \leqslant \rho$, donde $\rho < \pi$, se tiene:

$$\left|\frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}\right| \leqslant \frac{2\rho}{n^2\pi^2 - \rho^2} = \frac{2\rho}{n^2\pi^2}\,\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{n^2\pi^2}} \leqslant \frac{2\rho}{n^2\pi^2}\,\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{\pi^2}},$$

y como en el segundo miembro ha resultado el término general de una serie convergente (la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente), la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$ será uniformemente convergente en el interior del círculo $|z| < \pi$. Por lo tanto, el coeficiente de z^k en el desarrollo de Taylor

de la función $\Phi(z)$ es igual a la suma de los coeficientes de la misma potencia de z en los desarrollos de Taylor de cada una de las funciones $\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$. Este último desarrollo tiene la forma:

$$\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}=-\frac{2z}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z}{n\pi}\right)^2}=$$

$$=-\frac{2z}{n^2\pi^2}-\frac{2z^3}{n^4\pi^4}-\frac{2z^5}{n^6\pi^6}-\ldots-\frac{2z^{2q-1}}{n^{2q}\pi^{2q}}-\ldots;$$

aquí el coeficiente de z^k es igual a cero si k es par, e igual a $-\frac{2}{n^{2q}\pi^{2q}}$ si $k=2q-1$ (impar). Por esta razón, el coeficiente de z^k en el desarrollo de la función $\Phi(z)$ es igual a cero si k es par, e igual a $-2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{2q}}$ si k es impar: $k=2q-1$.

Así, pues,

$$\Phi(z)=-2\sum_{q=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^{2q}}\right]z^{2q-1}.$$

Esta es la serie de potencias buscada. Esta serie tiene que ser convergente en el círculo $|z|<\pi$, puesto que la función $\Phi(z)$ es analítica en este círculo. En el punto $z=\pi$, para cada término de la serie obtenemos la desigualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^{2q}}\pi^{2q-1}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2q}}>\frac{1}{\pi},$$

de donde se deduce que no se cumple la condición necesaria de convergencia, y la serie es divergente. Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a π.

Supongamos que $f(z)$ viene expresada en la forma

$$f(z)=F[\varphi(z)], \tag{7.1:3}$$

donde

$$\varphi(z)=\alpha_0+\alpha_1z+\alpha_2z^2+\ldots+\alpha_nz^n+\ldots,\ |z|<r \tag{7.1:4}$$

y

$$F(w)=A_0+A_1(w-\alpha_0)+A_2(w-\alpha_0)^2+\ldots+A_m(w-\alpha_0)^m+\ldots$$
$$|w-\alpha_0|<R, \tag{7.1:5}$$

donde los coeficientes de las series de potencias para $\varphi(z)$ y $F(w)$ son conocidos. Como en estas condiciones $\varphi(z)\to\alpha_0$ para $z\to0$, se puede señalar un número ρ, $0<\rho\leqslant r$, tal que el módulo

$|\varphi(z)-\alpha_0|$ será menor que R para $|z|<\rho$. Debido a esto, el punto $w=\varphi(z)$ pertenecerá al círculo de convergencia de la serie (7.1:5), y, por consiguiente, la función $f(z)=F(w)=F[\varphi(z)]$ será analítica para $|z|<\rho$. De aquí que tiene que existir un desarrollo de la función $f(z)$ en serie de potencias de z, convergente para $|z|<\rho$. El problema consiste en calcular los coeficientes de esta serie.

Consideremos el desarrollo

$$f(z)=F[\varphi(z)]=\sum_{0}^{\infty} A_n[\varphi(z)-\alpha_0]^n, \qquad (7.1:6)$$

respecto del cual ya sabemos que es convergente para $|z|<\rho$. Para que sea posible alegar a la convergencia uniforme de esta serie, sustituyamos ρ por un número no mayor ρ', $0<\rho'\leqslant\rho$, de modo que en el círculo $|z|<\rho'$ se cumpla la desigualdad

$$|\varphi(z)-\alpha_0|<\frac{R}{2}.$$

Como la serie (7.1:5) es uniformemente convergente para $|w-\alpha_0|<\frac{R}{2}$, la serie (7.1:6) también lo será para $|z|<\rho'$. Por consiguiente, el coeficiente de z^k en el desarrollo de Taylor de la función $f(z)$ puede obtenerse tomando la suma de los coeficientes homónimos en los desarrollos de cada una de las funciones $A_n[\varphi(z)-\alpha_0]^n$.

Los últimos desarrollos se obtienen mediante una multiplicación n-ple de la serie de la función $\varphi(z)-\alpha_0$ por sí misma. En el caso dado, la multiplicación término a término de las series es legítima, puesto que se trata de una serie de potencias en su círculo de convergencia, donde ésta es absolutamente convergente.

En resumen, llegamos a obtener la siguiente proposición: *para obtener el desarrollo de Taylor de una función $f(z)=F[\varphi(z)]$, donde $\varphi(z)$ es una función analítica en el origen de coordenadas y $F(w)$ es una función analítica en un entorno del punto $\alpha_0=\varphi(0)$, se debe poner la serie de $w=\varphi(z)$ (7.1:4) en la serie de $F(w)$ (7.1:5), efectuar las elevaciones necesarias a potencias, es decir, multiplicar las series, y, finalmente, sumar los coeficientes de los términos que contienen iguales potencias de z. La serie obtenida será el desarrollo de Taylor buscado de la función $f(z)$. Esta será convergente en el círculo $|z|<\rho$, donde ρ se elige de tal modo que para $|z|<\rho$ sea $|\varphi(z)-\alpha_0|<R$.*

El método expuesto de obtención de desarrollos de potencias se llama s u s t i t u c i ó n d e u n a s e r i e e n o t r a. Ilustrémoslo con dos ejemplos.

Sea

$$f(z)=\sqrt{\cos z},$$

donde se considera aquella rama uniforme, en un entorno del origen de coordenadas, de esta función biforme que toma el valor 1 para $z = 0$. Para aplicar la regla anterior a este ejemplo, representemos $f(z)$ en la forma:

$$f(z) = [1-(1-\cos z)]^{\frac{1}{2}}.$$

En nuestro caso

$$w = \varphi(z) = 1-\cos z = \frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\ldots, \quad |z|<\infty,$$

$$F(w) = (1-w)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}w-\frac{1}{8}w^2-\frac{1}{16}w^3-\frac{5}{128}w^4-\ldots, \quad |w|<1.$$

Por consiguiente,

$$f(z) = F[\varphi(z)] = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}+\frac{z^6}{720}-\ldots\right)-$$
$$-\frac{1}{8}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}+\ldots\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{z^2}{2}-\ldots\right)^3-\ldots$$

Limitémonos a calcular los coeficientes de las primeras potencias, hasta la sexta inclusive. Entonces, evidentemente, los términos no escritos pueden ser desechados, puesto que todos ellos figurarán solamente en la formación de los términos de la serie que contengan potencias de z mayores de la sexta. Se tiene

$$\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}+\ldots\right)^2 = \frac{z^4}{4}-\frac{z^6}{24}+\ldots, \quad \left(\frac{z^2}{2}-\ldots\right)^3 = \frac{z^6}{8}-\ldots,$$

por consiguiente,

$$f(z) = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}+\frac{z^6}{720}-\ldots\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{z^4}{4}-\frac{z^6}{24}+\ldots\right)-$$
$$-\frac{1}{16}\left(\frac{z^6}{8}-\ldots\right)+\ldots = 1-\frac{z^2}{4}-\frac{z^4}{96}-\frac{19z^6}{5760}-\ldots$$

Como $f(z) = \sqrt{\cos z}$ es una función analítica en el círculo $|z| < \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{pues posee derivada en el mismo, igual a } -\frac{\operatorname{sen} z}{2\sqrt{\cos z}}\right)$, la serie de $f(z)$ tiene que converger para $|z| < \frac{\pi}{2}$. Si $z = \frac{\pi}{2}$, como fácilmente se comprueba, se tiene un punto singular de la función $f(z)$, de donde se deduce que el radio de convergencia de la serie es igual a $\frac{\pi}{2}$.

Consideremos también

$$f(z) = \exp\frac{1}{1-z}.$$

Representando $f(z)$ en la forma $f(z) = e \exp \frac{z}{1-z}$, hagamos:

$$w = \varphi(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \ldots \quad (|z| < 1) \quad \text{y} \quad F(w) = e^{w+1} =$$

$$= e\left(1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \ldots\right), \quad |w| < \infty.$$

Sustituyendo una serie en otra, resulta:

$$f(z) = e\left[1 + (z + z^2 + z^3 + \ldots) + \frac{(z + z^2 + z^3 + \ldots)^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \frac{(z + z^2 + z^3 + \ldots)^3}{3!} + \ldots\right].$$

En el ejemplo dado, donde $\varphi(z) = \frac{z}{1-z}$, se puede evitar la realización inmediata del producto de las series, observando que para $|z < |1$:

$$(z + z^2 + z^3 + \ldots)^k = \left(\frac{z}{1-z}\right)^k = z^k (1-z)^{-k} =$$

$$= z^k \cdot \left[1 + \frac{k}{1} z + \frac{k(k+1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{k \ldots (k+n-1)}{n!} z^n + \ldots\right],$$

y como

$$\frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{n!} = \frac{(k+n-1)(k+n-2)\ldots(n+1)}{(k-1)!} = \binom{k+n-1}{k-1},$$

resulta:

$$(z + z^2 + z^3 + \ldots)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k-1} z^{n+k}.$$

Por lo tanto,

$$f(z) = e\left[1 + \frac{1}{1!} \sum_{0}^{\infty} z^{n+1} + \frac{1}{2!} \sum_{0}^{\infty} (n+1) z^{n+2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!} \sum_{0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{2!} z^{n+3} + \ldots + \frac{1}{k!} \sum_{0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k-1} z^{n+k} + \ldots\right] =$$

$$= e\left\{1 + z + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) z^2 + \left(\frac{1}{1!} + 2\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) z^3 + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{1!} + 3\frac{1}{2!} + 3\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) z^4 + \ldots + \left[\frac{1}{1!} + \binom{n-1}{1}\frac{1}{2!} + \right.$$

$$\left.\left. + \binom{n-1}{2}\frac{1}{3!} + \ldots + \binom{n-1}{n-2}\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right] z^n + \ldots\right\}.$$

Esto es el desarrollo buscado. Como la función $f(z)$ es analítica en el círculo $|z| < 1$, la serie obtenida es convergente en el círculo unidad. Fácilmente se observa que $z = 1$ es un punto singular para $f(z)$. En efecto, cuando z tiende a 1, tomando valores positivos menores que la unidad, la función $\exp \frac{1}{1-z}$ tiende a ∞. De aquí se deduce que el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a la unidad.

7.2. Pasemos ahora a estudiar el problema de la d i v i s i ó n d e s e r i e s d e p o t e n c i a s.

Sean

$$a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots \qquad (7.2:1)$$

y

$$b_0 + b_1(z-a) + \ldots + b_n(z-a)^n + \ldots \qquad (7.2:2)$$

dos series de potencias con los radios de convergencia positivos r y ρ, donde el término independiente b_0 de la segunda serie es distinto de cero. Hagamos la notación $\sigma = \min(r, \rho)$ (si $r = \rho$, entonces $\sigma = r = \rho$). Entonces ambas series serán convergentes en el círculo $|z-a| < \sigma$. Si en este círculo hay ceros de la suma de la serie (7.2:2), tomamos un nuevo círculo de menor radio, en cuyo interior la suma de la serie (7.2:2) no se anule. (Tal círculo existe, puesto que el punto a no es un cero de la suma de la serie (7.2:2), debido a la condición $b_0 \neq 0$). Así, pues, existe un círculo $|z-a| < R$, en el cual ambas series son convergentes y la suma de la segunda serie carece de ceros. En el interior de este círculo la relación

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots}{b_0 + b_1(z-a) + \ldots + b_n(z-a)^n + \ldots} \qquad (7.2:3)$$

representa una función analítica, lo cual es consecuencia de la regla de derivación del cociente. Por lo tanto, existe una serie de potencias

$$c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \qquad (7.2:4)$$

que expresa a la función $f(z)$ en el interior del círculo $|z-a| < R$. A esta serie podemos llamarla c o c i e n t e de las series (7.2:1) (d i v i d e n d o) y (7.2:2) (d i v i s o r), y el proceso mismo de su búsqueda, d i v i s i ó n d e l a s s e r i e s.

Efectuemos primero la división de las series por el método de los c o e f i c i e n t e s i n d e t e r m i n a d o s. Para esto, escribamos la relación (7.2:3) en la forma:

$$[c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots] \times$$
$$\times [b_0 + b_1(z-a) + \ldots + b_n(z-a^n) + \ldots] =$$
$$= a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots$$

y observemos que las series de potencias consideradas, siendo convergentes en el interior del círculo $|z-a|<R$, tienen que ser aquí absolutamente convergentes. Por esta razón, se pueden multiplicar término a término las series que figuran en el segundo miembro de la última igualdad. Efectuando la multiplicación obtendremos:

$$\begin{aligned} &c_0b_0+(c_0b_1+c_1b_0)(z-a)+(c_0b_2+c_1b_1+c_2b_0)(z-a)^2+\ldots \\ &\ldots+(c_0b_n+c_1b_{n-1}+\ldots+c_nb_0)(z-a)^n+\ldots \\ &\ldots=a_0+a_1(z-a)+\ldots+a_n(z-a)^n+\ldots \end{aligned} \qquad (7.2{:}5)$$

Como las sumas de las series de potencias que figuran en el primero y segundo miembros coinciden en el círculo $|z-a|<R$, según el teorema de identidad para las series de potencias los coeficientes de ambas series tienen que ser iguales. Resultan las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &c_0b_0=a_0, \\ &c_0b_1+c_1b_0=a_1, \\ &c_0b_2+c_1b_1+c_2b_0=a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_0b_n+c_1b_{n-1}+c_2b_{n-2}+\ldots+c_nb_0=a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (7.2{:}6)$$

Este es un sistema infinito de ecuaciones lineales respecto de los coeficientes desconocidos $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ La particularidad de este sistema, que extremadamente simplifica su solución, consiste en que para cualquier n ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$) las primeras $n+1$ ecuaciones contienen a las primeras $n+1$ incógnitas. Determinando c_0 de la primera ecuación $c_0=\frac{a_0}{b_0}$ ($b_0\neq 0$, según la hipótesis) y sustituyéndolo en la segunda, obtenemos la ecuación $\frac{a_0}{b_0}b_1+$ $+c_1b_0=a_1$, de donde

$$c_1=\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}.$$

Supongamos que, en general, se han hallado los valores de los primeros n coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$. Sustituyéndolos en la $n+1$ ecuación, obtenemos:

$$c_n=\frac{a_n-c_0b_n-c_1b_{n-1}-\ldots-c_{n-1}b_1}{b_0^{n+1}}. \qquad (7.2{:}7)$$

De este modo se puede determinar el coeficiente con un índice previamente dado. Es fácil obtener una expresión para c_n mediante los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_0, b_1, \ldots, b_n$ en forma de un determinante. El determinante del sistema formado por las primeras

$n+1$ ecuaciones es igual a

$$\begin{vmatrix} b_0 0 & 0 & \ldots 0 \\ b_1 b_0 & 0 & \ldots 0 \\ b_2 b_1 & b_0 & \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_n b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots b_0 \end{vmatrix} = b_0^{n+1} \neq 0,$$

y, por consiguiente,

$$c_n = \frac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 0 & 0 & \ldots a_0 \\ b_1 b_0 & 0 & \ldots a_1 \\ b_2 b_1 & b_0 & \ldots a_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_n b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots a_n \end{vmatrix}. \qquad (7.2{:}8)$$

Esta fórmula resuelve completamente el problema de la división de las series.

Demostremos que el cociente (7.2:4) de dos series de potencias puede obtenerse dividiendo la serie (7.2:1) por la serie (7.2:2) según las mismas reglas por las que se dividen los polinomios, como si las series (7.2:1) y (7.2:2) fuesen polinomios dispuestos según las potencias crecientes de $z-a$. Para demostrar esto, empecemos a efectuar la operación indicada. Obtendremos:

$$\begin{array}{l|l} a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots & b_0 + b_1(z-a) + \ldots + b_n(z-a)^n + \ldots \\ \cline{2-2} a_0 + \frac{a_0}{b_0} b_1 (z-a) + \ldots + \frac{a_0}{b_0} b_n (z-a)^n + \ldots & \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}(z-a) + \ldots \\ \hline \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0}(z-a) + \ldots + \frac{a_n b_0 - a_0 b_n}{b_0}(z-a)^n + \ldots & \\ \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0}(z-a) + \ldots + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} b_n (z-a)^n + \ldots & \\ \hline \end{array}$$

Los primeros dos coeficientes del cociente obtenido coinciden con los valores de c_0 y c_1 hallados anteriormente de las ecuaciones (7.2:6). Supongamos que de este modo hemos obtenido que los primeros n coeficientes coinciden con los valores de $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, hallados al resolver las ecuaciones (7.2:6). Entonces, tendremos:

$$\begin{array}{l|l} a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots & b_0 + b_1(z-a) + \ldots + b_n(z-a)^n + \ldots \\ \cline{2-2} b_0 c_0 + b_1 c_0 (z-a) + b_2 c_0 (z-a)^2 + \ldots + b_n c_0 (z-a)^n + \ldots & c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_{n-1}(z-a)^{n-1} + \ldots \\ \hline (a_1 - b_1 c_0)(z-a) + (a_2 - b_2 c_0)(z-a)^2 + \ldots + (a_n - b_n c_0)(z-a)^n + \ldots & \\ \quad b_0 c_1 (z-a) + \quad b_1 c_1 (z-a)^2 + \ldots + \quad b_{n-1} c_1 (z-a)^n + \ldots & \\ \hline (a_2 - b_2 c_0 - b_1 c_1)(z-a)^2 + \ldots + (a_n - b_n c_0 - b_{n-1} c_1)(z-a)^n + \ldots & \\ \cdot & \\ \hline (a_n - b_n c_0 - b_{n-1} c_1 - \ldots - b_1 c_{n-1})(z-a)^n + \ldots & \\ \cdot & \end{array}$$

El primer término del n-ésimo residuo es: $(a_n - b_n c_0 - b_{n-1} c_1 - \ldots$ $\ldots - b_1 c_{n-1})(z-a)^n$, por lo cual, el término del cociente que sigue después de $c_{n-1}(z-a)^{n-1}$ es igual a

$$\frac{a_n - b_n c_0 - b_{n-1} c_1 - \ldots - b_1 c_{n-1}}{b_0}(z-a)^n.$$

Pero el coeficiente de este término coincide con el valor de c_n determinado de las ecuaciones (7.2:6) por la fórmula (7.2:7).

En resumen, *el método de los coeficientes indeterminados, al ser aplicado a la división de las series de potencias, da lugar al mismo resultado que se obtiene al operar por las reglas de la división de los polinomios dispuestos según las potencias crecientes de* $x = z - a$.

Veamos un ejemplo de división de series de potencias. Consideremos la función

$$F(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Esta función es analítica en todos los puntos del plano, a excepción de los ceros de la función $e^z - 1$, es decir, a excepción de los puntos: $0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$ Sustituyendo $e^z - 1$ por el desarrollo en serie:

$$e^z - 1 = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

y simplificando el numerador y denominador de la fracción por z, obtenemos la siguiente expresión para $F(z)$ (que determinará la función $F(z)$ también para $z = 0$):

$$F(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \ldots}$$

La serie que figura en el denominador es convergente para cualquier z y tiene todos los mismos ceros que la función $e^z - 1$, a excepción de un cero en el origen de coordenadas. (Todo esto se debe a que esta serie representa la función $\frac{e^z - 1}{z}$ (para $z \neq 0$)). Por esta razón, en el interior del círculo $|z| < 2\pi$ su suma no se anula. Por consiguiente, la función $F(z)$ se puede desarrollar en serie en este círculo aplicando la división de series. La primera de las ecuaciones (7.2:6) da:

$$c_0 \cdot 1 = 1, \text{ es decir, } c_0 = 1.$$

Como todos los coeficientes de la serie del dividendo, a excepción del coeficiente inicial, son iguales a cero, la $(n+1)$-ésima ecuación (7.2:6) tiene la forma

$$c_0 \frac{1}{(n-1)!} + c_1 \frac{1}{n!} + \ldots + c_{n-1} \frac{1}{2!} + c_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \quad (7.2:9)$$

Esta ecuación permite determinar los números c_n uno tras otro. Para determinar el coeficiente c_n se puede utilizar también la fórmula (7.2:8):

$$c_0 = 1, \quad c_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \ldots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Los números $c_n n!$ se llaman números de Bernoulli y se designan mediante $B_n : B_n = c_n n!$.

Mediante estos números se expresan simplemente los coeficientes de muchas relaciones importantes. Para calcularlos se tienen las fórmulas: $B_0 = c_0 \cdot 0! = 1$,

$$B_n = c_n n! = (-1)^n n! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

(7.2:10)

Por cierto, el cálculo de los números de Bernoulli es más cómodo efectuarlo sucesivamente, empleando la fórmula (7.2:9). De ésta obtenemos:

$$B_0 \cdot \frac{1}{0!\,(n+1)!} + B_1 \frac{1}{1!\,n!} + \ldots + B_n \frac{1}{n!\,1!} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

o bien, multiplicando ambos miembros de la igualdad por $(n+1)!$ y observando que $\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$ es el coeficiente binomial $\binom{n+1}{k}$,

$$B_0\binom{n+1}{0}+B_1\binom{n+1}{1}+\ldots+B_n\binom{n+1}{n}=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Esta fórmula puede representarse en la siguiente forma simbólica:

$$(1+B)^{n+1}-B^{n+1}=0. \qquad (7.2:11)$$

Después de elevar a la potencia según la fórmula binomial, todos los exponentes de la potencia se deben sustituir aquí por los subíndices.

Como $B_0=1$, sucesivamente hallamos:

$$B_0+2B_1=0; \quad B_1=-\frac{1}{2}B_0=-\frac{1}{2};$$

$$B_0+3B_1+3B_2=0; \quad B_2=-\frac{1}{3}B_0-B_1=\frac{1}{6};$$

$$B_0+4B_1+6B_2+4B_3=0; \quad B_3=-\frac{1}{4}B_0-B_1-\frac{3}{2}B_2=0;$$

$$B_0+5B_1+10B_2+10B_3+5B_4=0;$$

$$B_4=-\frac{1}{5}B_0-B_1-2B_2-2B_3=-\frac{1}{30};$$

$$B_0+6B_1+15B_2+20B_3+15B_4+6B_5=0;$$

$$B_5=-\frac{1}{6}B_0-B_1-\frac{5}{2}B_2-\frac{10}{3}B_3-\frac{5}{2}B_4=0;$$

$$B_0+7B_1+21B_2+35B_3+35B_4+21B_5+7B_6=0;$$

$$B_6=-\frac{1}{7}B_0-B_1-3B_2-5B_3-5B_4-3B_5=\frac{1}{42};$$

. . . .

En resumen,

$$B_0=1, \quad B_1=-\frac{1}{2}, \quad B_2=\frac{1}{6}, \quad B_3=0,$$

$$B_4=-\frac{1}{30}, \quad B_5=0, \quad B_6=\frac{1}{42}, \ \ldots$$

Demostremos que **todos los números de Bernoulli de subíndices impares mayores que la inidad son iguales a cero:**

$$B_{2k+1}=0 \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Para demostrar esto, sustituyamos z por $-z$ en el desarrollo

$$\frac{z}{e^z-1}=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

$$\ldots=B_0+\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{B_n}{n!}z^n+\ldots; \qquad (7.2:12)$$

obtenemos:

$$\frac{-z}{e^{-z}-1} = -\frac{ze^z}{(e^{-z}-1)\,e^z} = \frac{ze^z}{e^z-1} = B_0 - \frac{B_1}{1!}z + \frac{B_2}{2!}z^2 - \frac{B_3}{3!}z^3 + \ldots,$$

o bien, restando esta última relación de (7.2:12),

$$\frac{z}{e^z-1} - \frac{ze^z}{e^z-1} = -z = 2\frac{B_1}{1!}z + 2\frac{B_3}{3!}z^3 + \ldots + 2\frac{B_{2k+1}}{(2k+1)}z^{2k+1} + \ldots$$

De aquí, basándose en la unicidad del desarrollo en serie de potencias, se deduce que:

$$2B_1 = -1, \quad B_3 = B_5 = \ldots = B_{2k+1} = \ldots = 0,$$

como se quería demostrar.

Aplicando la propiedad demostrada de los números de Bernoulli, se puede escribir el desarrollo (7.2:12) en la forma:

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \qquad (7.2:13)$$

Como los puntos singulares de la función $\frac{z}{e^z-1}$ más próximos al origen de coordenadas son $z_1 = 2\pi i$ y $z_2 = -2\pi i$ (en estos puntos la función no está definida y no puede definirse de modo que se conserve la continuidad), el radio de convergencia de la serie (7.2:13) es igual a 2π. De aquí que, según la fórmula de Cauchy-Hadamard, se deduce que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|B_n|}{n!}} = \frac{1}{2\pi},$$

y como $B_{2k+1} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, se tiene:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[2k]{\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}} = \frac{1}{2\pi}.$$

Debido a esto, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto infinito de números B_{2k} que satisfacen a la desigualdad

$$|B_{2k}| > \frac{(2k)!}{(2\pi+\varepsilon)^{2k}},$$

es decir, que son extremadamente grandes en comparación con sus subíndices $2k$.

Del desarrollo (7.2:13) se pueden obtener sin dificultad los desarrollos de las funciones $z \operatorname{cotg} z$, $\operatorname{tg} z$ y $z \operatorname{cosec} z$. Representemos $\operatorname{cotg} z$ en la forma

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i + \frac{2i}{e^{2iz}-1},$$

de donde

$$z \operatorname{cotg} z = iz + \frac{2iz}{e^{2iz}-1}.$$

La función $\frac{2iz}{e^{2iz}-1}$ se puede desarrollar según la fórmula (7.2:13) si se sustituye en esta fórmula z por $2iz$. Como la serie (7.2:13) era convergente para $|z| < 2\pi$, la serie nuevamente obtenida será convergente para $|2iz| < 2\pi$, es decir, para $|z| < \pi$.

Así, pues,

$$\frac{2iz}{e^{2iz}-1} = 1 - \frac{2iz}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iz)^{2k} = 1 - iz + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

y, por consiguiente,

$$z \operatorname{cotg} z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}z^{2k}}{(2k)!}. \qquad (7.2:14)$$

Para obtener el desarrollo de Taylor de $\operatorname{tg} z$, es más fácil observar que

$$\operatorname{cotg} z - \operatorname{tg} z = 2 \operatorname{cotg} 2z,$$

de donde

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{cotg} z - 2 \operatorname{cotg} 2z.$$

Sustituyendo en la fórmula (7.2:14) z por $2z$, obtendremos una serie que es convergente para $|2z| < \pi$, es decir, para $|z| < \frac{\pi}{2}$:

$$2z \operatorname{cotg} 2z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{4k}B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \qquad (7.2:14')$$

Restando término a término (7.2:14′) de (7.2:14), hallaremos:

$$z \operatorname{cotg} z - 2z \operatorname{cotg} 2z = z \operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}(1-2^{2k})B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

o bien

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}. \qquad (7.2:15)$$

Del método mismo de obtención de esta serie se deduce que ésta es convergente si $|z| < \frac{\pi}{2}$, y que $\frac{\pi}{2}$ es el radio de conver-

gencia de la serie (esto se debe a que los puntos $z=\pm\frac{\pi}{2}$ son singulares para la suma de la serie).

Pasando a examinar la función $z \operatorname{cosec} z$, obsérvese que

$$\operatorname{cotg} z+\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\frac{\cos z\cos\frac{z}{2}+\operatorname{sen} z\operatorname{sen}\frac{z}{2}}{\operatorname{sen} z\cos\frac{z}{2}}=\frac{\cos\frac{z}{2}}{\operatorname{sen} z\cos\frac{z}{2}}=\operatorname{cosec} z.$$

Sustituyendo en (7.2:15) z por $\frac{z}{2}$, obtenemos una serie que será convergente para $\left|\frac{z}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$, es decir, para $|z|<\pi$. De aquí y del desarrollo (7.2:14), que también es convergente para $|z|<\pi$, hallamos:

$$z\operatorname{cosec} z=z\operatorname{cotg} z+z\operatorname{tg}\frac{z}{2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2^{2k}-2)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}. \qquad (7.2:16)$$

Hallemos, finalmente, el desarrollo de $\sec z$. Como los puntos singulares de la función más próximos al origen de coordenadas son: $z=-\frac{\pi}{2}$ y $z=\frac{\pi}{2}$, el desarrollo buscado posee el círculo de convergencia: $|z|<\frac{\pi}{2}$. Para hallarlo, apliquemos el método de división de series. Tendremos:

$$\sec z=\frac{1}{\cos z}=\frac{1}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}+\ldots}=$$
$$=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

Como $\sec z$ es una función par, todos los coeficientes de las potencias impares a_1, a_3, a_5, ... son iguales a cero:

$$\sec z=\frac{1}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots}=a_0+a_2z^2+a_4z^4+\ldots \qquad (7.2:17)$$

Está admitido escribir los coeficientes a_0, a_2, a_4, ... de este desarrollo en la forma

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{E_{2k}}{(2k)!} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Los números E_{2k}, determinados de este modo, se llaman **números de Euler**. Escribiendo de nuevo (7.2:17) del modo siguiente:

$$1=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)\left(E_0-\frac{E_2}{2!}z^2+\frac{E_4}{4!}z^4-\ldots\right)$$

y efectuando la multiplicación en el segundo miembro, hallaremos

$$1 = E_0 - \left(\frac{E_0}{2!} + \frac{E_2}{2!} \right) z^2 + \left(\frac{E_0}{4!} + \frac{E_2}{2!\,2!} + \frac{E_4}{4!} \right) z^4 - $$
$$- \left(\frac{E_0}{6!} + \frac{E_2}{4!\,2!} + \frac{E_4}{2!\,4!} + \frac{E_6}{6!} \right) z^6 + \ldots,$$

de donde

$$E_0 = 1;$$
$$\frac{E_0}{2!} + \frac{E_2}{2!} = 0;$$
$$\frac{E_0}{4!} + \frac{E_2}{2!\,2!} + \frac{E_4}{4!} = 0;$$
$$\frac{E_0}{6!} + \frac{E_2}{4!\,2!} + \frac{E_4}{2!\,4!} + \frac{E_6}{6!} = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Estas ecuaciones permiten hallar sucesivamente los números de Euler. Obtenemos:

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5; \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385, \ldots$$

Si, en general, se han hallado los números $E_0, E_2, \ldots, E_{2n-2}$, para determinar E_{2n} se tiene la ecuación

$$\frac{E_0}{(2n)!} + \frac{E_2}{(2n-2)!\,2!} + \frac{E_4}{(2n-4)!\,4!} + \ldots + \frac{E_{2n}}{(2n)!} = 0,$$

o bien

$$E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \binom{2n}{4} E_4 + \ldots + \binom{2n}{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0.$$

De aquí que, si los números $E_0, E_2, \ldots, E_{2n-2}$ son enteros, el número E_{2n} también lo será. Pero los primeros números hallados son enteros. Por consiguiente, todos los números de Euler son enteros

El desarrollo de $\sec z$ se escribe definitivamente en la forma

$$\sec z = \sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k}. \qquad (7.2:18)$$

Esta es convergente para $|z| < \frac{\pi}{2}$. Los números de Euler E_{2k}, que figuran en el desarrollo, se determinan completamente por las condiciones:

$$E_0 = 1, \quad E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \binom{2n}{4} E_4 + \ldots + \binom{2n}{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (7.2:19)$$

7.3. Aquí estudiaremos algunas cuestiones ligadas con el comportamiento de una serie de potencias en la frontera del círculo de convergencia. Los ejemplos más sencillos de series con el radio de convergencia $R = 1$ muestran que en la frontera del círculo de convergencia la serie puede ser divergente en cada

punto (la serie geométrica: $1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots$), puede ser convergente en unos puntos y ser divergente en otros $\left(\text{la serie } z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots\right.$ $\left.\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots \text{ es convergente para } z=1 \text{ y es divergente para } z=-1\right)$ y, finalmente, puede ser convergente en todos los puntos de la frontera $\left(\text{la serie } z+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^2}+\ldots+\frac{z^n}{n^2}+\ldots\right.$ es convergente y, además, absolutamente, en toda la circunferencia unidad$\left.\right)$.

Ocupémonos primero de establecer algunas relaciones entre la convergencia de la serie de potencias en algunos puntos de la frontera del círculo de convergencia y el comportamiento de la suma de la serie en este círculo.

Obsérvese que, en todos los casos, sin restringir la generalidad de los resultados, se pueden considerar series de potencias con el círculo unidad de convergencia y suponer que el punto frontera en el cual es convergente la serie de potencias es el punto $z=1$. En efecto, el caso general de la serie

$$\alpha_0+\alpha_1(\zeta-\zeta_0)+\ldots+\alpha_n(\zeta-\zeta_0)^n+\ldots$$

con el radio finito de convergencia R y con el punto de convergencia ζ_1, $|\zeta_1-\zeta_0|=R$ se reduce al indicado mediante la transformación lineal entera

$$z=\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta_1-\zeta_0}.$$

El primer resultado en este sentido, por el tiempo y su importancia, pertenece a Abel.

Segundo teorema de Abel. *Si la serie de potencias*

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots \tag{7.3:1}$$

es convergente en el punto frontera del círculo de convergencia $z=1$, entonces, si el punto z del círculo unidad tiende al punto 1 por el interior de cualquier ángulo g_0 de magnitud $2\theta<\pi$ con el vértice en el punto $z=1$, *el cual es simétrico respecto del eje real, la suma de la serie de potencias $f(z)$ tiende a un límite que es igual a la suma de la serie en el punto frontera, es decir,*

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in g_0}} f(z)=\sum_0^\infty a_n. \tag{7.3:2}$$

Demostración. Consideremos la diferencia

$$\Delta(z)=\sum_0^\infty a_k-f(z)=\sum_0^\infty a_k(1-z^k).$$

Representémosla en la forma

$$\Delta(z)=\sum_0^n a_k(1-z^k)+\sum_{n+1}^{\infty} a_k(1-z^k), \tag{7.3:3}$$

donde n es un número natural fijo.

El primer término del segundo miembro tiende a cero cuando z tiende a 1. Por lo tanto, para demostrar el teorema es suficiente cerciorarse que el segundo

término puede hacerse arbitrariamente pequeño en el interior del ángulo g_0 cuando n es suficientemente grande. Con este fin consideremos la suma

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_k (1-z^k) = (1-z) \sum_{n+1}^{n+p} a_k (1+z+\ldots+z^{k-1}).$$

Introduciendo las notaciones: $\sum_{n+1}^{m} a_k = \alpha_m \ (m > n)$, $\alpha_n = 0$, de modo que $a_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$ $(k = n+1, \ldots)$, haciendo luego $1 + z + \ldots + z^{k-1} = b_k$ y aplicando la transformación de Abel (cap. primero, ap. 3.4) tendremos:

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_k (1-z^k) = (1-z) \sum_{n+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) b_k =$$

$$= (1-z) \left[\alpha_{n+p} b_{n+p} - \sum_{n+1}^{n+p-1} \alpha_k (b_{k+1} - b_k)\right] =$$

$$= (1-z) \left[\sum_{n+1}^{n+p} a_k \sum_{0}^{n+p-1} z^k - \sum_{n+1}^{n+p-1} \left(\sum_{n+1}^{k} a_j\right) z^k\right]. \quad (7.3{:}4)$$

Como las sumas $\sum_{n+1}^{n+p} a_k (1-z^k) = \sum_{n+1}^{n+p} a_k - \sum_{n+1}^{n+p} a_k z^k$, $\sum_{n+1}^{n+p} a_k$ y $\sum_{0}^{n+p-1} z^k$ tienden a límites finitos cuando $p \to \infty$ (sus series correspondientes son convergentes), también tiene que tender a un límite la suma $\sum_{n+1}^{n+p} \left(\sum_{n+1}^{k} a_j\right) z^k$. Pasando a límites, de (7.3:4) obtenemos:

$$\sum_{n+1}^{\infty} a_k (1-z^k) = (1-z) \left[\sum_{n+1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{0}^{\infty} z^k - \sum_{n+1}^{\infty} \left(\sum_{n+1}^{k} a_j\right) z^k\right] =$$

$$= \sum_{n+1}^{\infty} a_k - (1-z) \sum_{n+1}^{\infty} \left(\sum_{n+1}^{k} a_j\right) z^k. \quad (7.3{:}5)$$

Sea ε un número positivo arbitrario. Tomemos n tan grande, $n > N(\varepsilon)$ que se cumpla la desigualdad.

$$\left|\sum_{n+1}^{k} a_j\right| < \frac{\varepsilon \cos\theta}{6}$$

para cualquier k natural. Entonces, en particular, tiene que ser:

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon \cos\theta}{6}.$$

Por consiguiente,

$$\left|\sum_{n+1} a_k (1-z^k)\right| \leqslant \frac{\varepsilon \cos\theta}{6} + \frac{\varepsilon \cos\theta}{6} |1-z| \sum_{n+1}^{\infty} |z|^k \frac{\varepsilon \cos\theta}{6} + \frac{\varepsilon}{6} \frac{|1-z| \cos\theta}{1-|z|}.$$

Pero cerca del vértice del ángulo g_0 y en su parte d_θ comprendida entre los lados del ángulo y el arco de la circunferencia con el centro en el origen de coordenadas que es tangente a los lados del ángulo (fig. 64), se tiene:

$$AB\cdot AB' = AC\cdot AC',$$

de donde

$$\frac{AB}{AC}=\frac{|1-z|}{1-|z|}=\frac{AC'}{AB'}<\frac{AD}{AE}<\frac{AD}{AF}=\frac{2}{\cos\theta}\ ,$$

es decir,

$$|1-z|\cos\theta<2(1-|z|).$$

Por lo tanto, para $z\in d_0$ y $n>N(\varepsilon)$ se verifica la desigualdad

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_k(1-z^k)\right|<\frac{\varepsilon\cos\theta}{6}+\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Fijando un $n>N(\varepsilon)$ y tomando después $\delta(\varepsilon)$ de modo que para

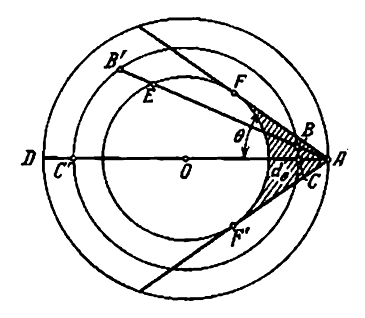


FIG. 64

$|1-z|<\delta(\varepsilon)$ en el interior de d_0 se cumpla la desigualdad

$$\left|\sum_{0}^{n} a_k(1-z^k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

obtendremos de (7.3:3):

$$|\Delta(z)|=\left|\sum_{0}^{\infty} a_k-f(z)\right|<\varepsilon\ (z\in d_0,\ |1-z|<\delta(\varepsilon)),$$

de donde se deduce que

$$\lim_{\substack{z\to1\\ z\in g_0}} f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_k.$$

Como ilustración del segundo teorema de Abel, consideremos la serie logarítmica $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$.

Demostremos, ante todo, que esta serie converge en cada punto $z=e^{i\theta}$ de la circunferencia unidad, distinto de -1.

Para esto apliquemos el teorema del ap. 3.4 del cap. primero.

Haciendo $a_k=(-1)^{k-1}e^{ik\theta}$ y $b_k=\frac{1}{k}$, tendremos:

$$\left|\sum_{1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{1}^{n}(-1)^{k-1}e^{ik\theta}\right|=\left|\frac{e^{i\theta}-(-1)^n e^{i(n+1)\theta}}{1+e^{i\theta}}\right|\leqslant\frac{2}{|1+e^{i\theta}|},$$

o sea, las sumas $\sum_{1}^{n}a_k$ están acotadas uniformemente (respecto de n) en valor absoluto.

Por otra parte, $|b_{k+1}-b_k|=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, por lo cual la serie $\sum_{1}^{\infty}|b_{k+1}-b_k|$ es convergente. De aquí, según el teorema citado, la serie $\sum_{1}^{\infty}a_kb_k=$ $=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{ik\theta}}{k}$ es convergente, lo cual se afirmaba.

Pero si $|z|<1$, la suma de la serie $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k}$ es $f(z)=\ln(1+z)=$ $=\ln|1+z|+i\arg(1+z)$. Por lo tanto, según el segundo teorema de Abel, para cualquier θ $(-\pi<\theta<\pi)$, se tiene

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{ik\theta}}{k}=\lim_{z\to e^{i\theta}}\ln(1+z)=\ln|1+e^{i\theta}|+$$
$$+i\arg(1+e^{i\theta})=\ln\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta}+$$
$$+i\arg\left[e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2}\right]=\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)+i\frac{\theta}{2}.$$

Separando las partes real e imaginaria en esta relación, obtenemos dos desarrollos en series trigonométricas que son convergentes para $-\pi<\theta<\pi$:

$$\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos k\theta}{k},$$

$$\frac{\theta}{2}=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\operatorname{sen} k\theta}{k}.$$

En particular, para $\theta=0$, de la primera fórmula resulta:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

y de la segunda, para $\theta=\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Veamos también como ejemplo la serie binomial $\sum\limits_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n$, donde $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}$ y α es un número complejo: $\alpha=\beta+i\gamma$. Supongamos primero que $\beta>-1$. Designando con λ_n el módulo de la razón $\binom{\alpha}{n}:\binom{\alpha}{n-1}$, se tiene:

$$\lambda_n=\left|\binom{\alpha}{n}:\binom{\alpha}{n-1}\right|=\left|\frac{\alpha-n+1}{n}\right|=\left|1-\frac{\alpha+1}{n}\right|=$$

$$=\left|1-\frac{1+\beta}{n}-\frac{i\gamma}{n}\right|=\sqrt{1-2\frac{1+\beta}{n}+\frac{(1+\beta)^2+\gamma^2}{n^2}}.$$

Sea β' un número real que satisfaga a la condición $\beta>\beta'>-1$. Entonces, para $n>N(\beta')$, tendremos:

$$\frac{(1+\beta)^2+\gamma^2}{n}<2(\beta-\beta')$$

y, por consiguiente,

$$\lambda_n<\sqrt{1-2\frac{1+\beta}{n}+2\frac{\beta-\beta'}{n}}=$$

$$=\sqrt{1-2\frac{1+\beta'}{n}}<1-\frac{1+\beta'}{n}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\beta'}} \text{ *)},$$

o bien

$$\lambda_n<\frac{n^{1+\beta'}}{(n+1)^{1+\beta'}}=\mu_n.$$

---

*) Como

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(1+\beta')}=1-\frac{1+\beta'}{n}+$$

$$+\frac{(1+\beta')\left(1+\frac{\beta'}{2}\right)}{n^2}-\frac{(1+\beta')\left(1+\frac{\beta'}{2}\right)\left(1+\frac{\beta'}{3}\right)}{n^3}+\ldots$$

y para $\frac{1+\beta'}{n}<1$ los términos de esta serie decrecen en valor absoluto, se tiene: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(1+\beta')}>1-\frac{1+\beta'}{n}$.

Escribiendo las desigualdades análogas para los valores $N(\beta')+1$, $N(\beta')+2$, ..., n y multiplicándolas término a término, obtendremos:

$$\lambda_{N(\beta')+1}\cdot\lambda_{N(\beta')+2}\ldots\lambda_n<\mu_{N(\beta')+1}\cdot\mu_{N(\beta')+2}\ldots\mu_n,$$

o bien, sustituyendo λ y μ por sus valores y simplificando:

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\right|<\frac{C(\beta')}{(n+1)^{1+\beta'}}.$$

Aquí mediante $C(\beta')$ se ha designado el valor, que no depende de n.

$$C(\beta')=\left|\binom{\alpha}{N(\beta')}\right|[N(\beta')+1]^{\beta'+1}.$$

De aquí que la sucesión de los coeficientes $\left\{\binom{\alpha}{n}\right\}$ de la serie binomial converge a cero si $\beta=\operatorname{Re}\alpha>-1$.

Cuando $\beta>0$, el número β', que está sujeto a la única condición $-1<\beta'<\beta$, se puede tomar positivo.

Como la serie $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{1+\beta'}}$ es convergente para $\beta'>0$, de las desigualdades obtenidas se deduce que la serie binomial es absoluta y uniformemente convergente en todos los puntos de la circunferencia unidad si $\beta=\operatorname{Re}\alpha>0$.

Observando que en el interior del círculo unidad la suma de la serie binomial es $(1+z)^\alpha=\exp[\alpha\ln(1+z)]$, en virtud del segundo teorema de Abel, hallamos:

$$\sum_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}e^{in\theta}=\lim_{z\to e^{i\theta}}(1+z)^\alpha.$$

Si $e^{i\theta}=-1$, obtenemos, que $\lim\limits_{z\to-1}(1+z)^\alpha=0$. Para $e^{i\theta}\neq-1$ $(-\pi<\theta<\pi)$, se tiene:

$$\lim_{z\to e^{i\theta}}(1+z)^\alpha=(1+e^{i\theta})^\alpha=\exp[\alpha\ln(1+e^{i\theta})]=$$
$$=\exp\left\{\alpha\left[\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)+i\,\frac{\theta}{2}\right]\right\}=$$
$$=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\alpha\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha\theta}{2}\right).$$

Por consiguiente,

$$\sum_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}e^{in\theta}=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\alpha\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha\theta}{2}\right).$$

En particular, si α es un número real, separando las partes real e imaginaria, obtenemos:

$$\sum_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cos n\theta=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\cos\frac{\alpha\theta}{2},\quad \sum_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\operatorname{sen} n\theta=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha\theta}{2}.$$

Del método de obtención de estas series se deduce que ellas son absoluta y uniformemente convergentes en el segmento $[0, 2\pi]$.

La proposición recíproca al segundo teorema de Abel no es justa. En efecto, para la serie geométrica $\sum_{0}^{\infty} z^n$ su suma $\frac{1}{1-z}$ tiende a un límite finito, igual a $\frac{1}{1-e^{i\theta}}$, cuando z se aproxima a cualquier punto $e^{i\theta}$ de la circunferencia unidad, distinto de la unidad, a pesar de que la serie $\sum_{0}^{\infty} e^{in\theta}$ es divergente en cada punto de la circunferencia unidad.

Sin embargo, imponiendo algunas restricciones especiales a los coeficientes de la serie, se puede afirmar que de la existencia del límite $\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ (aquí el punto $z = re^{i\theta}$ tiende al punto frontera $e^{i\theta}$ a lo largo del radio) se deduce la convergencia de la serie de potencias en el punto $e^{i\theta}$.

He aquí una de las proposiciones de este tipo.

Teorema de Tauber. *Si los coeficientes de una serie de potencias, con el círculo unidad de convergencia, satisfacen a la condición*

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0 \tag{7.3:6}$$

y existe el límite

$$\lim_{x\to 1} f(x) = A,$$

entonces la serie $\sum_{0}^{\infty} a_n$ *es convergente (su suma es igual a* A*).*

Demostración. Obsérvese primero que de la condición (7.3:6) se deduce también que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{1}^{m} n|a_n|}{m} = 0. \tag{7.3:7}$$

En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$ tendremos que tener $n|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n > N(\varepsilon)$. Fijemos un $n = n_0$ que satisfaga a esta condición y hallemos una cota para $\frac{\sum_{1}^{m} n|a_n|}{m}$ cuando $m > n_0$ del siguiente modo:

$$\frac{\sum_{1}^{m} n|a_n|}{m} = \frac{\sum_{1}^{n_0} n|a_n|}{m} + \frac{\sum_{n_0+1}^{m} n|a_n|}{m} < \frac{\sum_{1}^{n_0} n|a_n|}{m} +$$

$$+ \frac{(m-n_0)\varepsilon}{2m} < \frac{\sum_{1}^{n_0} n|a_n|}{m} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pero si m es suficientemente grande, $m > M$, tendremos, evidentemente:

$$\frac{\sum_{1}^{n_0} n\,|a_n|}{m} < \frac{\varepsilon}{2};$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\sum_{1}^{m} n\,|a_n|}{m} < \varepsilon \text{ para } m > \max\{N(\varepsilon), M\},$$

de donde se deduce la relación (7.3:7).

Examinemos el módulo de la diferencia

$$\left|\sum_{0}^{n} a_k - f(x)\right| = \left|\sum_{0}^{n} a_k (1-x^k) - \sum_{n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1-x)\sum_{0}^{n} |a_k|(1+x+\ldots+x^{k-1}) + \sum_{n+1}^{\infty} |a_k|\,x^k <$$

$$< n(1-x)\frac{\sum_{0}^{n} k\,|a_k|}{n} + \sum_{n+1}^{\infty} k\,|a_k|\cdot\frac{x^k}{k}. \qquad (7.3:8)$$

Sea $m\,|a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ y, además, $\frac{\sum_{0}^{m} k\,|a_k|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ para $m > M(\varepsilon)$; entonces para $n > M(\varepsilon)$, de la relación (7.3:8) deducimos que

$$\left|\sum_{0}^{n} a_k - f(x)\right| < n(1-x)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2n}\sum_{n+1}^{\infty} x^k =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\left[n(1-x) + \frac{1}{n}\,\frac{x^{n+1}}{1-x}\right] < \frac{\varepsilon}{2}\left[n(1-x) + \frac{1}{n(1-x)}\right].$$

Por consiguiente, para $1-x=\frac{1}{n}$ y $n > M(\varepsilon)$:

$$\left|\sum_{0}^{n} a_k - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| < \varepsilon,$$

de donde se deduce que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} f\left(1-\frac{1}{n}\right) = A,$$

o sea, la serie $\sum_{0}^{\infty} a_k$ es convergente (y su suma es igual a A).

El teorema queda demostrado.

En condiciones más generales también tienen lugar proposiciones análogas. Precisamente, es suficiente suponer que la sucesión $\{n \cdot a_n\}$ sea acotada, en lugar de exigir que converja a cero. La demostración de este teorema, perteneciente a Hardy y Littlewood, es mucho más complicada que la demostración del teorema de Tauber. Obsérvese que la sola tendencia a cero de los coeficientes de la serie de potencias no es suficiente para que sea cierto un teorema análogo al de Tauber.

En el ap. 6.3 se demostró que en la frontera del círculo de convergencia de una serie de potencias siempre existe al menos un punto singular de la suma de esta serie. Surge la pregunta: ¿Hay alguna relación entre la distribución de los puntos singulares en la frontera del círculo de convergencia de una serie de potencias y los puntos de convergencia o divergencia de esta serie en la misma frontera?

Los ejemplos con los que comenzamos este apartado muestran que aquí no hay una relación simple. Por ejemplo, en el caso de la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ el radio de convergencia es igual a 1 y, por consiguiente, en la circunferencia unidad existe al menos un punto singular de la suma de esta serie. No obstante, la serie es absoluta y uniformemente convergente en toda la circunferencia unidad, en particular, es absolutamente convergente también en el punto singular. En el caso de la serie geométrica $\sum_{0}^{\infty} z^n$, que representa el desarrollo de la función $\frac{1}{1-z}$, todos los puntos de la circunferencia unidad, distintos de $z = 1$, son regulares y el punto $z = 1$ es el único punto singular. Sin embargo, esta serie es divergente en todos los puntos de la circunferencia unidad, tanto en el punto singular como en los puntos regulares.

En los fenómenos que nos interesan se pueden observar algunas leyes sometiendo a ciertas restricciones las series de potencias consideradas. Así, por ejemplo, resulta la siguiente proposición.

T e o r e m a d e F a t o u. *Si los coeficientes de la serie de potencias* (7.3:1), *con el círculo unidad de convergencia, tienden a cero*: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *entonces la serie de potencias es convergente y, además, uniformemente, en todo arco de la circunferencia unidad, cuyos puntos son todos* (*incluyendo los extremos del arco*) *regulares para la suma de la serie.*

D e m o s t r a c i ó n. Como se deduce del enunciado, en el teorema se tienen en cuenta solamente aquellas series de potencias cuyos coeficientes tienden a cero, para las cuales existen puntos regulares en la circunferencia unidad. Puede servir de ejemplo la serie logarítmica

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n},$$

cuyos coeficientes tienden a cero y la suma $\ln(1+z)$ tiene el único punto singular $z = -1$. Y, en efecto, en la pág. 367 se demostró que la serie logarítmica es convergente en todos los puntos de la circunferencia unidad, a excepción del punto $z = -1$. Para la serie geométrica $\sum_{0}^{\infty} z^n$, cuya suma es igual a $\frac{1}{1-z}$ y, por consiguiente, todos los puntos de la circunferencia unidad, a excepción del punto $z = 1$, son regulares, el teorema, evidentemente, no es aplicable, puesto

que la serie geométrica es divergente en todos los puntos de la circunferencia unidad. Pero esta serie no satisface a las condiciones del teorema ya que sus coeficientes no tienden a cero.

Para demostrar el teorema, supongamos que cada punto de un arco σ de la circunferencia unidad es regular para la suma $f(z)$ de la serie. Esto significa que cada punto $\zeta \in \sigma$ (incluyendo los extremos del arco σ) posee un entorno U_ζ, en el cual existe una función analítica $\psi_\zeta(z)$ que coincide con $f(z)$ en los puntos comunes a U_ζ y a la circunferencia unidad. Adjuntando los puntos de todos los entornos U_ζ ($\zeta \in \sigma$) al círculo unidad K, resulta un recinto Δ, para el cual

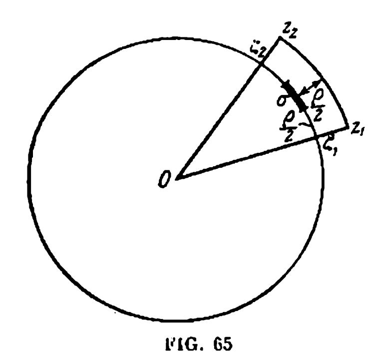


FIG. 65

todos los puntos del círculo K y todos los puntos del arco σ son interiores. (Compárese con los razonamientos del ap. 6.3, donde el papel del arco σ desempeñaba la circunferencia entera).

Definamos en el recinto Δ una función $\psi(z)$, haciéndola igual a $f(z)$ en los puntos del círculo K e igual a $\psi_\zeta(z)$ en los puntos de los entornos U_ζ. La función obtenida $\psi(z)$ será uniforme y analítica en el recinto Δ. Como ésta coincide con $f(z)$ en K, su serie de potencias coincide con la serie (7.3:1).

A continuación hablaremos precisamente de la función $\psi(z)$ y de la serie de potencias misma (7.3:1). Designando con $\rho > 0$ la distancia desde σ hasta la frontera del recinto Δ (esta frontera incluye una parte de la circunferencia unidad), tomemos en la circunferencia unidad dos puntos ζ_1 y ζ_2, no situados en el arco σ y separados de sus extermos próximos en $\frac{\rho}{2}$; entonces el arco $\widehat{\zeta_1\zeta_2}$ pertenecerá enteramente al recinto Δ y contendrá al arco σ. Tracemos los radios $O\zeta_1$ y $O\zeta_2$ y prolonguémoslos fuera de la circunferencia unidad en la longitud $\frac{\rho}{2}$. Unamos, finalmente, sus extremos mediante un arco de circunferencia, obtendremos un sector circular Oz_1z_2 (fig. 65) que, como se deduce de su construcción, está enteramente situado en el recinto Δ y contiene en su interior al arco σ.

Nuestra tarea consiste en demostrar que la serie $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge uniformemente en el arco σ. Demostraremos esto estableciendo a la vez que la suma

de la serie es igual a $\psi(z)$. Con este fin, consideremos la función

$$\omega_n(z)=\frac{\varphi_n(z)}{z^{n+1}}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2), \tag{7.3:9}$$

donde

$$\varphi_n(z)=\psi(z)-(a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n).$$

En el interior del círculo unidad, donde la serie $\sum_0^\infty a_kz^k$ es convergente, esta función puede expresarse en la forma

$$\omega_n(z)=\frac{\sum_0^\infty a_kz^k-\sum_0^n a_kz^k}{z^{n+1}}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)=(a_{n+1}+a_{n+2}z+\ldots)(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)$$

y, por consiguiente, es analítica en un entorno del origen de coordenadas. De la fórmula (7.3:9) se deduce que ésta es analítica también en todo el recinto Δ (donde la función $\varphi_n(z)=\psi(z)-\sum_0^n a_kz^k$ es analítica).

Para la acotación que necesitamos, la función $\omega_n(z)$ es más ventajosa que la función $\varphi_n(z)$. Precisamente, en los puntos de frontera del sector situados fuera del círculo unidad, puede utilizarse el hecho de que el módulo del denominador del quebrado $|z|^{n+1}$ es muy grande (para valores grandes de n), mientras que en los puntos de los radios que son próximos a ζ_1 o a ζ_2, las diferencias respectivas $z-\zeta_1$ y $z-\zeta_2$ son muy pequeñas en valor absoluto.

Después de estas explicaciones, acotemos superiormente el módulo de $\omega_n(z)$ en distintas partes de la frontera del sector.

Sea ε' un número positivo arbitrario. Elijamos $N(\varepsilon')$ de modo que sea $|a_k|<\varepsilon'$ para $k>N(\varepsilon')$. Entonces, en los puntos pertenecientes al intervalo $O\zeta_1$ (o al intervalo $O\zeta_2$), tendremos: $(n>N(\varepsilon'))$:

$$|\omega_n(z)|=\left|\frac{\psi(z)-\sum_0^n a_kz^k}{z^{n+1}}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\right|=$$

$$=\left|\sum_{n+1}^\infty a_kz^{k-n-1}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\right|\leqslant\varepsilon'\sum_{n+1}^\infty|z|^{k-n-1}|z-\zeta_1||z-\zeta_2|.$$

Observando que

$$\sum_{n+1}^\infty|z|^{k-n-1}=\frac{1}{1-|z|},\quad |z-\zeta_1|=1-|z|\ \text{y}\ |z-\zeta_2|<2,$$

obtenemos:

$$|\omega_n(z)|<2\varepsilon'\ \text{para}\ n>N'(\varepsilon).$$

Examinemos ahora $|\omega_n(z)|$ en el intervalo ζ_1z_1 (o en ζ_2z_2). Designemos el radio $1+\frac{\rho}{2}$ del arco del sector mediante R. Observando que $|z-\zeta_1|=|z|-1$, $|z-\zeta_2|<|z|+|\zeta_2|<2R$ y designando con M el max $|\psi(z)|$

en el conjunto de todos los puntos del sector, para $n > N(\varepsilon')$, tendremos:

$$|\omega_n(z)| = \left| \frac{\psi(z) - \sum_0^n a_k z^k}{z^{n+1}} (z-\zeta_1)(z-\zeta_2) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M + \sum_0^n |a_k| \, |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z|-1)\, 2R = 2R \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| \, |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z|-1) +$$

$$+ 2R \frac{\sum_{N(\varepsilon')+1}^{n} |a_k| \, |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z|-1) < 2R \left(M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| \, R^k \right) \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} +$$

$$+ 2R\varepsilon' \sum_{N(\varepsilon')+1}^{n} |z^k| \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} = 2R \left(M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_n| \, R^k \right) \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} +$$

$$+ 2R\varepsilon' \frac{|z|^{n+1} - |z|^{N(\varepsilon')+1}}{|z|-1} \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} < 2R \left(M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k R^k| \right) \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} + 2R\varepsilon'.$$

Pero

$$\frac{|z|-1}{|z|^{n+1}} < \frac{|z|-1}{|z|^{n+1}-1} = \frac{1}{|z|^n + \ldots + 1} < \frac{1}{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$|\omega_n(z)| < \frac{2R\left(M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| \, R^k\right)}{n+1} + 2R\varepsilon',$$

y podemos elegir el número $N_1(\varepsilon') \geqslant N(\varepsilon')$ de tal modo que, para $n > N_1(\varepsilon')$, el primer sumando del segundo miembro de la desigualdad sea también menor que ε', y, por consiguiente,

$$|\omega_n(z)| < (2R+1)\varepsilon' \text{ para } n > N_1(\varepsilon') \geqslant N(\varepsilon').$$

Hallemos, finalmente, una cota para el módulo $|\omega_n(z_n)|$ en los puntos del arco $\widehat{z_1 z_2}$ (incluyendo sus extremos z_1 y z_2). Aquí se tiene: $|z-\zeta_1| < 2R$, $|z-\zeta_2| < 2R$ y

$$|\omega_n(z)| < \frac{M + \sum_0^n |a_k| \, R^k}{R^{n+1}} 4R^2 = 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| \, R^k}{R^{n-1}} +$$

$$+ 4 \frac{\sum_{N(\varepsilon')+1}^{n} |a_k| \, R^k}{R^{n-1}} \leqslant 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| \, R^k}{R^{n-1}} + 4\varepsilon' \frac{\sum_{N(\varepsilon')+1}^{n} R^k}{R^{n-1}} <$$

$$< 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| \, R^k}{R^{n-1}} + \frac{4R^2\varepsilon'}{R-1} = 4 \frac{M + \sum_0^{N(\varepsilon')} |a_k| \, R^k}{R^{n-1}} + \frac{8R^2}{\rho} \varepsilon'.$$

Tomando $N_2(\varepsilon') \geqslant N_1(\varepsilon') \geqslant N(\varepsilon')$ de modo que el primer sumando del segundo miembro de la desigualdad sea menor que ε' para $n > N_2(\varepsilon')$, obtenemos:

$$|\omega_n(z)| < \left(\frac{8R^2}{\rho}+1\right)\varepsilon', \quad n > N_2(\varepsilon').$$

Obsérvese que en el punto $z=0$, $\omega_n(z)$ tiene el valor $a_{n+1}\cdot\zeta_1\zeta_2$ (igual al $\lim_{z\to 0}\omega_n(z)$), de modo que $|\omega_n(0)| = |a_{n+1}| < \varepsilon'$ para $n > N(\varepsilon')$ y en los puntos $z=\zeta_1$ y $z=\zeta_2$, $\omega_n(z)$ se anula. Por lo tanto, en todos los puntos de la frontera del sector, para $n > N_2(\varepsilon')$, se tiene:

$$|\omega_n(z)| < \left(\frac{8R^2}{\rho}+1\right)\varepsilon' = \max\left\{2\varepsilon',\ (2R+1)\varepsilon',\ \left(\frac{8R^2}{\rho}+1\right)\varepsilon'\right\}.$$

En virtud del principio del módulo máximo, esta desigualdad se verifica también en los puntos del arco σ. Pero

$$\omega_n(z) = \frac{\psi(z)-\sum\limits_{1}^{n} a_k z^k}{z^{k+1}}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)$$

y en los puntos del arco σ el módulo $|\omega_n(z)|$ satisface a la desigualdad

$$|\omega_n(z)| = \left|\psi(z)-\sum_{0}^{n} a_k z^k\right| |z-\zeta_1|\,|z-\zeta_2| > \left|\psi(z)-\sum_{0}^{n} a_k z^k\right| \left(\frac{\rho}{2}\right)^2,$$

de donde

$$\left|\psi(z)-\sum_{0}^{n} a_k z^k\right| < \frac{4(8R^2+\rho)}{\rho^3}\varepsilon' = \varepsilon \quad \text{para } n > N_1(\varepsilon').$$

Como ε' es arbitrariamente pequeño, de aquí se deduce el resultado pedido.

Como un ejemplo simple, consideremos de nuevo la serie binomial

$$\sum_{0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n = (1+z)^{\alpha}.$$

En la pág. 368 se demostró que $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n} = 0$ si $\operatorname{Re}\alpha > -1$. Por esta razón, la serie binomial tiene que converger en todos los puntos de la circunferencia unidad que son regulares para su suma $(1+z)^{\alpha}$, o sea, en todos los puntos $z = e^{i\theta} \neq -1$. La convergencia es uniforme en todo arco de la circunferencia que no contenga al punto $z = 1$ ni en su interior, ni como uno de sus extremos.

Obsérvese que del hecho de que los coeficientes de una serie de potencias, con el círculo unidad de convergencia, tiendan a cero y de que la serie sea uniformemente convergente en algún arco de la circunferencia unidad, no se deduce ni mucho menos que los puntos de este arco sean regulares. Esto nos muestra el ejemplo de la serie $\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{z^{2^k}}{2^{k^2}}$, para la cual, como ya se vio (pág. 340), todos los puntos de la circunferencia unidad son singulares.

En conclusión, veamos el ejemplo, perteneciente a N. Luzín, de una serie de potencias cuyos coeficientes tienden a cero y la cual es divergente en todos los puntos de la circunferencia unidad.

Consideremos el polinomio

$$g_p(z) = 1 + z + \ldots + z^{p-1} = \frac{1 - z^p}{1 - z}.$$

En el punto $\zeta = e^{i\theta}$, situado en la circunferencia unidad y distinto de 1, el módulo de $g_p(\zeta)$ tiene el valor siguiente:

$$|g_p(e^{i\theta})| = \left|\frac{1 - e^{ip\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{e^{\frac{ip\theta}{2}}\left(e^{\frac{ip\theta}{2}} - e^{\frac{-ip\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}\frac{p\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right|.$$

Como para $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2}{\pi}|\varphi| \leqslant |\operatorname{sen}\varphi| \leqslant |\varphi|,$$

para $0 < |\theta| \leqslant \frac{\pi}{p}$ obtenemos la desigualdad:

$$|g_p(e^{i\theta})| \geqslant \frac{\frac{2}{\pi}\frac{p|\theta|}{2}}{\frac{|\theta|}{2}} = \frac{2}{\pi}p.$$

Esta desigualdad es válida también para $\theta = 0$, puesto que $g_p(1) = p$. Evidentemente, para cualquier punto $\zeta_0 = e^{i\theta}$ existe un número entero k_0, $0 \leqslant k_0 \leqslant p-1$, tal que el punto $z = e^{-\frac{2\pi k_0 i}{p}}\zeta_0$ pertenece al arco de la circunferencia unidad para el cual $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{p}$. Para este valor k_0, obtenemos:

$$|g_p(e^{-\frac{2\pi k_0 i}{p}}\zeta_0)| \geqslant \frac{2}{\pi}p.$$

Por consiguiente,

$$\max_{k=0,\,1,\,\ldots,\,p-1} |g_p(e^{-\frac{2\pi k i}{p}}\zeta_0)| \geqslant \frac{2}{\pi}p.$$

Formemos ahora para cada número natural p el polinomio

$$H_p(z) = g_p(z) + z^p g_p(e^{-\frac{2\pi}{p}i}z) +$$
$$+ z^{2p} g_p(e^{-\frac{2\pi\cdot 2}{p}i}z) + \ldots + z^{(p-1)p} g_p(e^{-\frac{2\pi(p-1)}{p}i}z).$$

Como $g_p(z)$ contiene términos con potencias de z desde cero hasta $p-1$, $z^p g_p(e^{\frac{-2\pi}{p}i}z)$ contiene términos con potencias de z desde p hasta $2p-1$, . . . , $z^{(p-1)p} g_p(e^{\frac{-2\pi(p-1)}{p}i}z)$ contiene términos con potencias de z desde $(p-1)p$

hasta $p^2 - 1$, en la expresión de $H_p(z)$ no habrá términos semejantes y $H_p(z)$ será un polinomio de grado $p^2 - 1$, cuyos coeficientes todos son en valor absoluto iguales a la unidad.

Formemos, finalmente, la serie

$$H_1(z) + \sum_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} z^{1^2+2^2+\ldots+(p-1)^2} H_p(z). \qquad (7.3:10)$$

Como cada término de la serie que figura en el primer miembro representa un polinomio que contiene potencias de z desde $1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2$ hasta $1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2 + p^2 - 1$, dos términos de la serie no contienen potencias iguales de z. Escribiendo todas las potencias de z en orden de crecimiento con los mismos coeficientes que poseen en la expresión (7.3:10), obtenemos una serie de potencias:

$$\sum_0^{\infty} \alpha_n z^n. \qquad (7.3:11)$$

Como $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ($|\alpha_n| = \frac{1}{\sqrt{p}}$, donde p es un número natural que crece indefinidamente junto con n), la serie (7.3:11) es convergente en el interior del círculo unidad. Demostremos que ella es divergente en todo punto de la circunferencia unidad. Supongamos lo contrario, y sea convergente la serie $\sum_0^{\infty} \alpha_n \zeta^n$, donde $|\zeta| = 1$. Entonces tiene que ser convergente también la serie

$$\sum_{1\leq p<\infty,\ 0\leq m<p} \frac{1}{\sqrt{p}} \zeta^{1^2+\ldots+(p-1)^2} \zeta^{mp} g_p(e^{-\frac{2\pi m}{p}i}\zeta),$$

obtenida de (7.3:11) uniendo grupos determinados de términos vecinos en uno. Pero esta última serie no puede ser convergente, puesto que sus términos no tienden a cero:

$$\max_{m=0,\,1,\,\ldots,\,p-1} \left| \frac{1}{\sqrt{p}} \zeta^{1^2+\ldots+(p-1)^2} \zeta^{mp} g_p(e^{-\frac{2\pi m}{p}i}\zeta) \right| =$$

$$= \max_{m=0,\,1,\,\ldots,\,p-1} \frac{1}{\sqrt{p}} |g_p(e^{-\frac{2\pi m}{p}i}\zeta)| \geqslant \frac{2p}{\pi\sqrt{p}} = \frac{2}{\pi}\sqrt{p}.$$

Resumiendo, *la serie de Luzin* (7.3:11) *es una serie de potencias cuyos coeficientes tienden a cero y la cual no es convergente en ninguno de los puntos de la circunferencia unidad.*

Del teorema de Fatou se deduce que todos los puntos de la circunferencia unidad son singulares para la suma de la serie construida. En efecto, en los puntos singulares ésta tendría que converger.

Señalemos también que la serie de potencias

$$\alpha_0 - \alpha_0 z + \alpha_1 z^2 - \alpha_1 z^3 + \ldots + \alpha_k z^{2k} - \alpha_k z^{2k+1} + \ldots,$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ son los coeficientes de la serie de Luzin, es convergente en el punto $z = 1$ (ya que $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$) y es divergente en todos los demás puntos de la circunferencia unidad. En efecto, suponiendo que ésta fuese convergente en cierto punto $\zeta \neq 1$, $|\zeta| = 1$, tendría que ser convergente también la serie

$$\alpha_0 (1-\zeta) + \alpha_1\zeta^2 (1-\zeta) + \ldots + \alpha_k\zeta^{2k} (1-\zeta) + \ldots,$$

y, por consiguiente, la serie

$$\alpha_0 + \alpha_1\zeta^2 + \ldots + \alpha_k\zeta^{2k} + \ldots,$$

o sea, la serie de Luzin sería convergente en el punto $z = \zeta^2$ de la circunferencia unidad, lo cual es imposible.

CAPITULO

CUARTO

DIVERSAS SERIES. RESIDUOS. FUNCIONES INVERSAS E IMPLICITAS

§ 1. PRINCIPIO DE COMPACIDAD

1.1. Como ya se sabe, de una sucesión arbitraria de puntos $\{z_n\}$ siempre se puede extraer una sucesión parcial convergente $\{z_{n_k}\}$. No obstante, el límite de esta última puede ser un número impropio, es decir, infinito. Para que el límite siempre sea finito es suficiente exigir que la sucesión $\{z_n\}$ esté acotada. ¿Se verifican proposiciones análogas para una sucesión arbitraria de funciones $\{f_n(z)\}$, analíticas en un recinto G? ¿Es posible afirmar, por ejemplo, que cualquier sucesión tal contiene alguna sucesión parcial de funciones uniformemente convergente en el interior del recinto G (la función límite, según el teorema de Weierstrass, tiene que ser analítica en el recinto G)? Unos ejemplos sencillos muestran que para una sucesión arbitraria de funciones analíticas puede no existir tal sucesión parcial.

Consideremos, por ejemplo, la sucesión de funciones: z, $2z$, ..., nz, ... en el círculo unidad. Esta converge hacia cero si $z = 0$ y hacia ∞ si $z \neq 0$, y cada una de sus sucesiones parciales posee las mismas propiedades. Tomemos también la sucesión de funciones $z, z^2, z^3, \ldots, z^n, \ldots$ en el círculo $|z| < 2$. Esta converge uniformemente hacia cero en el interior del círculo unidad y hacia el infinito cuando $1 < |z| < 2$. Por consiguiente, cualquier sucesión parcial de la misma posee las mismas propiedades. Evidentemente, en cada uno de los ejemplos indicados no existe ninguna sucesión parcial que sea uniformemente convergente en el interior del recinto correspondiente (en el círculo $|z| < 1$ en el primer ejemplo, y en el círculo $|z| < 2$ en el segundo ejemplo).

Diremos que un conjunto infinito de funciones E (o una sucesión de funciones), analíticas en un recinto G, es c o m p a c t o en este recinto, si cualquier sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$, pertenecientes a E, posee una sucesión parcial $\{f_{n_k}(z)\}$ que es uniformemente

convergente en el interior de G. Los ejemplos anteriores muestran que la sucesión $\{nz\}$ no es compacta en el círculo unidad y la sucesión $\{z^n\}$ no es compacta en el círculo $|z| < 2$.

Demostremos la proposición siguiente:

L e m a. *Si la sucesión $\{f_n(z)\}$ está uniformemente acotada en el círculo K: $|z - z_0| < R$, o sea, que existe un número positivo M tal que para cualquier n se cumplen las desigualdades*

$$|f_n(z)| < M$$

en todos los puntos del círculo K, entonces esta sucesión es compacta en K.

D e m o s t r a c i ó n. Consideremos los desarrollos de las funciones $f_n(z)$ en series de potencias:

$$f_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}(z - z_0) + \ldots + A_k^{(n)}(z - z_0)^k + \ldots \quad (1.1:1)$$

En virtud de las desigualdades de Cauchy para los coeficientes de una serie de potencias (véase el tercer cap., ap. 5.4), para cada ρ, $0 < \rho < R$, se tiene:

$$|A_k^{(n)}| \leqslant \frac{M_n(\rho)}{\rho^k},$$

donde

$$M_n(\rho) = \max_{|z - z_0| = \rho} |f_n(z)| < M.$$

Cuando ρ tiende al límite R, para cualquier entero no negativo k, obtenemos:

$$|A_k^{(n)}| \leqslant \frac{M}{R^k}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (1.1:2)$$

De aquí se deduce que cualquier sucesión de coeficientes homónimos de Taylor de las funciones $f_n(z)$ (es decir, de coeficientes de una potencia fija de z) está acotada.

Utilizando esta propiedad, tomemos en la sucesión $\{f_n(z)\}$ una sucesión parcial

$$f_{n'_1}(z), \ f_{n'_2}(z), \ \ldots, \ f_{n'_m}(z), \ \ldots, \quad (1.1:3)$$

tal, que converja hacia cierto límite la sucesión de términos independientes $\{A_0^{(n'_m)}\}$ correspondientes a los desarrollos de Taylor. De la sucesión parcial obtenida extraemos una nueva:

$$f_{n''_1}(z), \ f_{n''_2}(z), \ \ldots, \ f_{n''_m}(z), \ \ldots \quad (1.1:4)$$

de modo que para ella sea convergente también la sucesión de los coeficientes de la primera potencia de $z - z_0$ en los desarrollos de Taylor de estas funciones. En general, si ya se ha elegido alguna

sucesión parcial de funciones

$$f_{n_1^{(m)}}(z),\ f_{n_2^{(m)}}(z),\ \ldots,\ f_{n_m^{(m)}}(z),\ \ldots \qquad (1.1:5)$$

de modo que para ella converjan hacia límites finitos las sucesiones de los coeficientes de los desarrollos de Taylor de las potencias $(z-z_0)^0, \ldots, (z-z_0)^{m-1}$, entonces extraemos de la misma una sucesión parcial

$$f_{n_1^{(m+1)}}(z),\ f_{n_2^{(m+1)}}(z),\ \ldots,\ f_{n_{m+1}^{(m+1)}}(z),\ \ldots$$

tal, que para ella converja también hacia un límite finito la sucesión de los coeficientes de $(z-z_0)^m$.

Supongamos que ya se han formado las sucesiones (1.1:5) para cualquier natural m, extraigamos de éstas una sucesión diagonal, formada por las funciones que ocupan el m-ésimo lugar en la sucesión de índice m. Obtendremos una sucesión

$$f_{\nu_1}(z),\ f_{\nu_2}(z),\ \ldots,\ f_{\nu_m}(z),\ \ldots, \qquad (1.1:6)$$

donde se ha hecho $\nu_m = n_m^{(m)}$ y

$$f_{\nu_m}(z) = A_0^{(\nu_m)} + A_1^{(\nu_m)}(z-z_0) + \ldots + A_k^{(\nu_m)}(z-z_0)^k + \ldots$$

Evidentemente, (1.1:6) es una sucesión parcial de la sucesión inicial $\{f_n(z)\}$. Además, para cualquier entero no negativo k, todas las funciones (1.1:6), comenzando desde la $(k+1)$-ésima función $f_{\nu_{k+1}}$, pertenecen a la sucesión parcial

$$f_{n_1^{(k+1)}}(z),\ f_{n_2^{(k+1)}}(z),\ \ldots,\ f_{n_k^{(k+1)}}(z),\ \ldots$$

Por consiguiente, para las funciones (2.1:6) son convergentes las sucesiones de los coeficientes $\{A_k^{(\nu_m)}\}$ para cualquier número entero fijo no negativo k. Hagamos

$$\lim_{m\to\infty} A_k^{(\nu_m)} = A_k.$$

Como cada uno de los coeficientes $A_k^{\nu_m}$ satisface a la desigualdad (1.1:2), esta misma desigualdad se verifica también para los números A_k:

$$|A_k| \leqslant \frac{M}{R^k} \quad (k=0, 1, 2, \ldots). \qquad (1.1:7)$$

De aquí se deduce que

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|A_k|} \leqslant \frac{1}{R}$$

y, en virtud de la fórmula de Cauchy-Hadamard (cap. 3, ap. 5.1), el radio de convergencia de la serie de potencias

$$A_0 + A_1(z-z_0) + \ldots + A_k(z-z_0)^k + \ldots \tag{1.1:8}$$

no es menor que R. Por esta razón, la suma $f(z)$ de la serie (1.1:8) representa una función que es analítica en el círculo K. Demostremos que la sucesión (1.1:6) converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de K. Es suficiente convencerse que la convergencia uniforme tiene lugar en todo círculo cerrado $|z-z_0| \leqslant \rho < R$.

Sea ε un número positivo arbitrario, tomemos un número natural n_0, de modo que se cumpla la desigualdad

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} M\left(\frac{\rho}{R}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.1:9}$$

Entonces, debido a las desigualdades (1.1:2) y (1.1:7),

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n^{(\nu_m)}|\rho^n \leqslant \sum_{n_0+1}^{\infty} M\left(\frac{\rho}{R}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3}$$

y

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n|\rho^n \leqslant \sum_{n_0+1}^{\infty} M\left(\frac{\rho}{R}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3},$$

y, por consiguiente, para $|z-z_0| \leqslant \rho$, tendremos:

$$|f_{\nu_m}(z) - f(z)| = \left|\sum_{0}^{\infty} (A_n^{(\nu_m)} - A_n)(z-z_0)^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0}^{n_0} |A_n^{(\nu_m)} - A_n|\rho^n + \sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n^{(\nu_m)}|\rho^n + \sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n|\rho^n <$$

$$< \sum_{0}^{n_0} |A_n^{(\nu_m)} - A_n|\rho^n + \frac{2}{3}\varepsilon. \tag{1.1:10}$$

Como n_0 está aquí fijado y $\lim\limits_{m\to\infty} A_n^{(\nu_m)} = A_n$, para $m > m_0$ suficientemente grande, se tiene:

$$\sum_{0}^{n_0} |A_n^{(\nu_m)} - A_n|\rho^n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por consiguiente,

$$|f_{\nu_m}(z) - f(z)| < \varepsilon \quad (|z-z_0| \leqslant \rho,\ m > m_0).$$

Por lo tanto, queda establecida la convergencia uniforme de la sucesión (1.1:6) en el interior del círculo K. Hemos demostrado que la sucesión (1.1:1) contiene una sucesión parcial (1.1:6), la cual es uniformemente convergente en el interior de K. Con esto, el lema queda demostrado.

Para enunciar la condición necesaria y suficiente para la compacidad en cualquier recinto G, convengamos en llamar a un conjunto de funciones E uniformemente acotado en el interior del recinto G, si para cualquier conjunto cerrado de puntos F del recinto G existe un número positivo $M(F)$ tal, que toda función $f(z) \in E$ satisface en todos los puntos del conjunto F a la desigualdad

$$|f(z)| \leqslant M(F).$$

Demostremos ahora la siguiente proposición:

Teorema de Montel. *Para que un conjunto E de funciones, analíticas en un recinto dado G, sea compacto en este recinto, es necesario y suficiente que esté uniformemente acotado en el interior de este recinto.*

La condición del teorema es necesaria para la compacidad del conjunto E. En efecto, supongamos que E es compacto y que no está uniformemente acotado en el interior de G. Entonces tiene que existir un conjunto cerrado F de puntos del recinto G, en el cual los módulos de las funciones pertenecientes a E pueden tomar valores arbitrariamente grandes. En otras palabras, para todo número natural n se pueden señalar una función $f_n(z) \in E$ y un punto $z_n \subset F$ tales, que en este punto se verifica la desigualdad.

$$|f_n(z_n)| > n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.1:11}$$

Como el conjunto E es compacto, de $\{f_n(z)\}$ se puede extraer una sucesión parcial $\{f_{n_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de G y, en particular, en F. La función límite $f(z)$ será analítica en G y, por consiguiente, continua en F. Designemos con M el $\max\limits_F |f(z)|$ $(< \infty)$. Como, en virtud de la convergencia uniforme, en todos los puntos del conjunto F tienen que verificarse las desigualdades

$$|f_{n_k}(z) - f(z) < 1 \text{ para } n_k > N,$$

se tiene:

$$|f_{n_k}(z)| \leqslant |f(z)| + 1 \leqslant M + 1$$

en todos los puntos del conjunto F y para todos $n_k > N$. Pero esto contradice al hecho de que los valores $|f_{n_k}(z_{n_k}|$ son arbitrariamente

grandes (son superiores a n_k). De esta contradicción se deduce que la condición del teorema es necesaria para la compacidad.

Demostremos que ésta es también suficiente. Supongamos que el conjunto de funciones E está uniformemente acotado en el interior del recinto G. Cerciorémonos primero que, para cualquier conjunto cerrado F de puntos del recinto G, de una sucesión arbitraria de funciones $\{f_n(z)\}$ pertenecientes a E, se puede extraer una sucesión parcial que sea uniformemente convergente en F. Con este fin, para cada punto z del conjunto F consideremos algún entorno U_z, perteneciente a G junto con su frontera, y sea u_z un entorno con el mismo centro pero de menor radio (por ejemplo, dos veces menor). Debido al lema de Heine-Borel, existe un número finito de tales entornos: $u_{z_1}, u_{z_2}, \ldots, u_{z_q}$, que cubren a F. En cada uno de los entornos correspondientes U_{z_j} $(j = 1, \ldots, q)$ los módulos de las funciones de la sucesión $\{f_n(z)\}$ estarán uniformemente acotados:

$$|f_n(z)| < M_j, \quad z \in U_{z_j} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Por consiguiente, según el lema demostrado, se puede extraer de $\{f_n(z)\}$ una sucesión parcial $\{f_{\nu'_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de U_{z_1}, se puede extraer de $\{f_{\nu'_k}(z)\}$ una sucesión parcial $\{f_{\nu''_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de U_{z_2}, etc., finalmente, se puede extraer de $\{f_{\nu_k^{(q-1)}}(z)\}$ una sucesión parcial $\{f_{\nu_k^{(q)}}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de U_{z_q}. Por la construcción misma, la sucesión $\{f_{\nu_k^{(q)}}(z)\}$ converge uniformemente en el interior de cada uno de los entornos U_{z_j} $(j = 1, \ldots, q)$, en particular, converge uniformemente en el interior de cada uno de los entornos u_{z_j} $(j = 1, \ldots, q)$ y, por consiguiente, también en el conjunto F que está cubierto por los entornos u_{z_j} $(j = 1, \ldots, q)$.

Así, pues, para cualquier conjunto cerrado $E \subset G$, la sucesión $\{f_n(z)\}$ contiene una sucesión parcial que converge uniformemente en F.

Consideremos una sucesión de conjuntos cerrados $\{F_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, de los cuales cada F_ν está formado por todos los puntos del recinto G cuays distancias hasta la frontera no son menores que $\frac{1}{\nu}$ (la causa de que el conjunto F_ν sea cerrado se debe a que la distancia $\rho(z, \Gamma)$ desde el punto z hasta la frontera del recinto G es una función continua de z (ap. 3.8. cap. primero) y, por consiguiente, si z_0 es un punto de acumulación para F_ν, entonces

para éste

$$\rho(z_0, \Gamma) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in F_\nu}} \rho(z, \Gamma) \geqslant \frac{1}{\nu} \Big) .$$

Está claro que si ν es suficientemente grande ($\nu \geqslant \nu_0$), todos los conjuntos F_ν no son vacíos; además, $F_{\nu+1} \supset F_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ y, finalmente, todo conjunto cerrado $F \subset G$ pertenece a todos los F_ν, comenzando desde cierto ν en adelante (si la distancia desde F hasta la frontera del recinto G es igual a $\rho > 0$, entonces es suficiente tomar $\frac{1}{\nu} < \rho$ para que sea $F \subset F_\nu$). En otras palabras, $\{F_\nu\}$ es una sucesión creciente de conjuntos cerrados que aproximan a G por el interior. Extraigamos de $\{f_n(z)\}$ una sucesión parcial $\{f_{n'_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en F_1, extraigamos luego de $\{f_{n'_k}(z)\}$ una sucesión parcial $\{f_{n''_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en F_2, etc. Resultan unas sucesiones parciales $\{f_{n_k^{(m)}}(z)\}$ ($m = 1, 2, \ldots$), de las cuales, cada una (correspondiente al índice m) está contenida en la anterior y converge uniformemente en F_m. Evidentemente, la sucesión diagonal

$$f_{n'_1}(z), \quad f_{n''_2}(z), \ldots, f_{n_m^{(m)}}(z), \ldots$$

está contenida en $\{f_n(z)\}$ y para cualquier natural n todos sus términos, comenzando desde $f_{n_m^{(m)}}(z)$, pertenecen a la sucesión parcial $\{f_{n_k^{(m)}}(z)\}$. Por lo tanto, la misma converge uniformemente en cualquier conjunto F_m y, por consiguiente, converge uniformemente en el interior del recinto G (puesto que, como se observó anteriormente, todo conjunto cerrado $F \subset G$ está contenido en F_m para m suficientemente grande). En resumen, cualquier sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ del conjunto E contiene una sucesión parcial que es uniformemente convergente en el interior del recinto G, con lo cual se termina la demostración del teorema de Montel.

En una serie de cuestiones de la teoría de funciones se introduce un concepto más general que el concepto considerado aquí de compacidad.

Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$, analíticas en un recinto G, c o n v e r g e u n i f o r m e m e n t e h a c i a e l i n f i n i t o e n e l i n t e r i o r d e l r e c i n t o G, si para cualquier conjunto cerrado $F \subset G$ y para cualquier número positivo M, existe un número $N = N(M, F)$ tal, que en todos los puntos del conjunto F y para cada $n > N = N(M, F)$ se verifican las desigualdades

$$|f_n(z)| > M.$$

Un conjunto E de funciones, analíticas en un recinto G, se llama familia normal de funciones en este recinto, si cualquier sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$, pertenecientes a E, posee una sucesión parcial $\{f_{n_k}(z)\}$ que converge uniformemente en el interior del recinto G hacia una función analítica o hacia el infinito.

Debido a esta definición todo conjunto compacto de funciones analíticas es también una familia normal. Por esta razón, la condición de acotación uniforme en el interior del recinto G, siendo una condición suficiente para la compacidad, será también suficiente para la normalidad. Claro que ahora esta condición no es necesaria, como esto se ve en el ejemplo de la sucesión de funciones $\{z + n\}$, la cual converge uniformemente hacia ∞ en el círculo unidad y, por consiguiente, es normal. Al final del capítulo octavo volveremos a estudiar las familias normales.

1.2. Una propiedad importante de los conjuntos compactos de funciones analíticas viene dada por la siguiente proposición.

Teorema de Vitali. *Si una sucesión $\{f_n(z)\}$ de funciones analíticas en un recinto G, es compacta en este recinto y converge en un conjunto de puntos $e \subset G$, que tiene por lo menos un punto de acumulación perteneciente al recinto, entonces esta sucesión converge uniformemente en el interior de G.*

Demostración. Debido a la compacidad de la sucesión $\{f_n(z)\}$, de cualquier sucesión parcial de la misma $\{f_{n_k}(z)\}$ se puede extraer otra sucesión parcial $\{f_{n_k^*}(z)\}$ que es uniformemente convergente en el interior de G. Demostremos que todas las sucesiones parciales de la sucesión $\{f_n(z)\}$, uniformemente convergentes en el interior de G, convergen hacia una misma función límite $f(z)$. En efecto, supongamos que $\lim_{k\to\infty} f_{\nu_k}(z) = f(z)$ y $\lim_{k\to\infty} f_{\mu_k}(z) = \varphi(z)$, donde $\{f_{\nu_k}(z)\}$ y $\{f_{\mu_k}(z)\}$ son dos sucesiones parciales de la sucesión $\{f_n(z)\}$, uniformemente convergentes en el interior de G. Las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en el recinto G (debido al teorema de Weierstrass); además, éstas coinciden en el conjunto e, que tiene puntos de acumulación en el recinto G (en los puntos del conjunto e existe el $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$; por esta razón, también tienen este mismo límite en estos puntos las sucesiones parciales $\{f_{\nu_k}(z)\}$ y $\{f_{\mu_k}(z)\}$). Por consiguiente, según el teorema de unicidad (cap. tercero, ap. 6.1), las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden en todo el recinto G: $\varphi(z) = f(z)$.

Demostremos que toda la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente en el interior de G hacia la función $f(z)$. Suponiendo que no

fuese cierta esta afirmación, tendría que haber un conjunto cerrado $F \subset G$, en el cual $\{f_n(z)\}$ no convergería uniformemente hacia $f(z)$. Por consiguiente, existirían un número positivo α y unos índices n_k y los puntos correspondientes z_k del conjunto F, tales que

$$|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| \geqslant \alpha\,(>0), \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad (1.2:1)$$

Consideremos la sucesión $\{f_{n_k}(z)\}$. Esta contiene una sucesión parcial $\{f_{n'_k}(z)\}$ uniformemente convergente en F, para la cual, según lo demostrado anteriormente, la función límite es $f(z)$. Por lo tanto,

$$|f_{n'_k}(z) - f(z)| < \alpha \quad \text{para } z \in F, \quad n'_k > N$$

y, en particular,

$$|f_{n'_k}(z_k) - f(z_k)| < \alpha \qquad (1.2:2)$$

para valores de k suficientemente grandes. Pero las desigualdades (1.2:2) contradicen a las desigualdades (1.2:1). Por consiguiente, la hipótesis de que la sucesión $\{f_n(z)\}$ no converge uniformemente en el interior de G hacia la función $f(z)$, no es cierta. Con esto se termina la demostración del teorema de Vitali.

Presentemos aquí una de las aplicaciones más simples del teorema de Vitali, a la cual haremos referencia a continuación. Sea G un recinto arbitrario del plano z y Γ, una curva rectificable del plano w. Consideremos una función de dos variables $F(z, w)$, analítica respecto de z en el recinto G para cada w perteneciente a Γ. Supongamos que esta función es continua respecto de w en Γ para cada $z \in G$ y está uniformemente acotada en valor absoluto en el interior del recinto G para todos los puntos $w \in \Gamma$. En estas condiciones, se puede afirmar que la función

$$f(z) = \int_{\Gamma} F(z, w)\, dw$$

es analítica en el recinto G, y que cualquier sucesión de sumas integrales

$$f_n(z) = \sum_{0}^{n} F(z, w_k^{(n)})\,(w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)}),$$

convergente hacia la integral para cada z perteneciente a G *), converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de G. En virtud

---

*) Si la ecuación de la curva Γ es $w = \varphi(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ y $w_k^{(n)} = \varphi(t_k^{(n)})$, es suficiente exigir que $\delta_n = \max\limits_{k=0,1,\ldots,n-1} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})$ tienda a cero cuando $n \to \infty$.

del teorema de Weierstrass sobre las series de funciones analíticas, es suficiente demostrar la última proposición. Pero ésta es consecuencia inmediata del teorema de Vitali, pues la sucesión $\{f_n(z)\}$ es convergente en el recinto G y está uniformemente acotada en cada conjunto cerrado acotado $E \subset G$:

$$|f_n(z)| \leqslant M_E \sum_0^n |w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)}| \leqslant M_E L,$$

donde M_E es el extremo superior de $|F(z, w)|$ para $z \in E$ y $w \in \Gamma$, y L es la longitud de la curva Γ. Del mismo teorema de Weierstrass se deduce que

$$f^{(m)}(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \frac{\partial^m F(z, w_k^{(n)})}{\partial z^m} (w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)}) = \int_\Gamma \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m} dw$$

para cualquier natural m.

Generalicemos la proposición obtenida para el caso muy importante en las aplicaciones en que Γ es una curva ilimitada: $w = \varphi(t)$, $\alpha \leqslant t < \beta$, $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = \infty$, para la cual cada arco Γ_τ: $\alpha \leqslant t \leqslant \tau < \beta$ es rectificable.

Sea $F(z, w)$ una función analítica respecto de z en un recinto G para cada w fijado en Γ, y continua respecto de w en Γ para cada z fijado en el recinto G. Supongamos luego que para cualquier $\tau < \beta$ esta función está uniformemente acotada en valor absoluto en el interior del recinto G para todos los puntos $w \in \Gamma_\tau$. En otras palabras, para cada conjunto cerrado y acotado $E \subset G$ y para cada τ, $\alpha \leqslant \tau < \beta$, existe un número $M_E(\tau) < \infty$ tal, que

$$|F(z, w)| \leqslant M_E(\tau) \text{ para } z \in E \text{ y } w \in \Gamma_\tau.$$

En estas condiciones, según lo anterior, las integrales

$$\int_{\Gamma_\tau} F(z, w)\, dw = f_\tau(z)$$

representan funciones analíticas en el recinto G.

Supongamos, finalmente, que estas integrales son absolutamente convergentes para $\tau \to \infty$, es decir, que para todo $z \in G$ existe un límite finito $\lim\limits_{\tau\to\beta} \int_{\Gamma_\tau} |F(z, w)|\, ds = \int_\Gamma |F(z, w)|\, ds$, y la función $\int_\Gamma |F(z, w)|\, ds$ está acotada en el interior del recinto G.

Entonces la familia de funciones analíticas $\{f_\tau(z)\}$ estará uniformemente acotada en el interior del recinto G (ya que $|f_\tau(z)| \leqslant$

$\leqslant \int\limits_{\Gamma_\tau} |F(z, w)|\, ds \leqslant \int\limits_{\Gamma} |F(z, w)|\, ds\Big)$, y, por consiguiente, y a ella o a cualquier sucesión $\{f_{\tau_n}(z)\}$, donde $\tau_n \to \beta$, puede aplicársele el teorema de Vitali.

Definitivamente, obtenemos que la integral impropia

$$\int\limits_{\Gamma} F(z, w)\, dw = f(z) = \lim_{\tau \to \beta} f_\tau(z),$$

bajo las hipótesis hechas, representa una función analítica en el recinto G.

Además, según lo anterior, para cada natural m y cada $\tau < \beta$, tendremos:

$$f_\tau^{(m)}(z) = \int\limits_{\Gamma_\tau} \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m}\, dw;$$

por lo tanto, basándose en la convergencia uniforme de la familia $\{f_\tau(z)\}$ en el interior del recinto G, obtenemos:

$$f^{(m)}(z) = \lim_{\tau \to \beta} f_\tau^{(m)}(z) = \lim_{\tau \to \beta} \int\limits_{\Gamma_\tau} \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m}\, dw = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m}\, dw.$$

Como ejemplo, consideremos la denominada t r a n s f o r m a c i ó n d e L a p l a c e d e l a f u n c i ó n $\varphi(t)$:

$$\int\limits_0^\infty e^{-zt}\varphi(t)\, dt.$$

Aquí la integración se efectúa a lo largo de la parte positiva del eje real (Γ: $x = t$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$) y $\varphi(t)$ es una función de variable real, definida y continua para $0 \leqslant t < \infty$. Haciendo

$$F(z, t) = e^{-zt}\varphi(t),$$

vemos que $F(z, t)$ es una función analítica respecto de z en todo el plano. Además, de la igualdad

$$|F(z, t)| = e^{-xt}|\varphi(t)|$$

se deduce que $|F(z, t)|$ está acotada en todo recinto acotado del plano z, para todos los t pertenecientes a un intervalo finito arbitrario fijo. Si suponemos además que para cierto número real C y para un número positivo α se verifica la desigualdad

$$|\varphi(t)| < \alpha e^{Ct} \text{ para } t > T(\alpha, C),$$

entonces, para cada z perteneciente al semiplano $x = \operatorname{Re} z > C$, tendremos:

$$|F(z, t)| < \alpha e^{-t(x-C)} \text{ para } t > T(\alpha, C).$$

De aquí se deduce, ante todo, que la integral

$$\int_0^\infty |F(z, t)| dt$$

es absolutamente convergente en el semiplano $\operatorname{Re} z > C$ y también que esta integral está acotada en cada semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant C + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$; si $x \geqslant C + \varepsilon$, entonces

$$\int_0^\infty |F(z, t)| dt < A + \alpha \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} dt = A + \frac{\alpha}{\varepsilon},$$

donde A es cualquier número positivo superior a

$$\int_0^{T(\alpha, C)} |F(z, t)| dt,$$

por ejemplo,

$$A = \int_0^{T(\alpha, C)} e^{-Ct} |\varphi(t)| dt.$$

Así, pues, de la condición

$$|\varphi(t)| < \alpha e^{Ct} \text{ para } t > T(\alpha, C)$$

se deduce que la *transformación de Laplace de la función* $\varphi(t)$

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \varphi(t) dt$$

representa una función uniforme y analítica en el semiplano $\operatorname{Re} z > C$. Para la derivada de orden m obtenemos en el mismo semiplano la fórmula:

$$f^{(m)}(z) = \int_0^\infty (-t)^m e^{-zt} \varphi(t) dt.$$

La comparación de la transformación de Laplace $\int_0^\infty e^{-zt} \varphi(t) dt$ con la serie de Dirichlet $\sum_1^\infty a_k e^{-\lambda_k z}$, que también representa una fun-

ción analítica en el semiplano (véase a continuación en el ap. 2.2), muestra que la primera se puede considerar como la analogía integral de la segunda, del mismo modo que, por ejemplo, la transformación de Fourier $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\varphi(t)\,dt$ se puede considerar como la analogía integral de la serie de Fourier (escrita en forma compleja) $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikx}$.

§ 2. SERIE DE LAURENT. SERIES DE DIRICHLET. TEOREMA DE RUNGE

2.1. Entre las clases de series de funciones analíticas, distintas de las series de potencias, las más próximas a estas últimas por su origen son las series dispuestas según las potencias enteras negativas de $z - z_0$:

$$A_0 + A_1(z-z_0)^{-1} + A_2(z-z_0)^{-2} + \ldots + A_n(z-z_0)^{-n} + \ldots \qquad (2.1:1)$$

Haciendo $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$, transformemos (2.1:1) a la forma

$$A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \ldots + A_n\zeta^n + \ldots \qquad (2.1:2)$$

El radio de convergencia de la última serie es $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|}}$; si $R = 0$, la serie (2.1:2) converge solamente en el punto $\zeta = 0$; si $0 < R < \infty$, la serie es absolutamente convergente en el círculo $|\zeta| < R$ y es divergente fuera del mismo; finalmente, si $R = \infty$, la serie es absolutamente convergente en todo punto finito del plano. De aquí y de la relación $|\zeta| = \frac{1}{|z-z_0|}$ se deduce que, si $\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|} = \infty$, la serie (2.1:1) es divergente en todo punto finito; si $0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|} < \infty$, la serie es absolutamente convergente para $|z-z_0| > \overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}$ y es divergente para $|z-z_0| < \overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}$; finalmente, si $\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|} = 0$, la serie es absolutamente convergente en todos los puntos del plano, a excepción del punto $z = z_0$. En otras palabras, el campo de convergencia de la serie (2.1:1) es el *exterior del círculo* de radio $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|}$ con el centro en z_0, el cual, para $r = \infty$ degenera en el punto del infinito, para $0 < r < \infty$ es el exterior del círculo en el sentido propio de la palabra y, finalmente, para $r = 0$ se con-

vierte en todo el plano, del cual se ha excluido el punto $z = z_0$. Supondremos que $r = \overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|} < \infty$; entonces, verdaderamente, existe un campo de convergencia de la serie (2.1:1) $|z - z_0| > r$, que designaremos mediante K. Como la serie (2.1:2) es uniformemente convergente en todo conjunto cerrado de puntos del círculo k: $|\zeta| < R$ y la transformación lineal $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$ transforma cualquier conjunto cerrado de puntos del círculo k en un conjunto cerrado de puntos del recinto K y viceversa, la serie (2.1:1) converge uniformemente en el interior del recinto K. En este recinto está determina una función $F(z)$:

$$F(z) = A_0 + A_1 (z-z_0)^{-1} + \ldots + A_n (z-z_0)^{-n} + \ldots, \quad (2.1:1')$$

que es analítica (según el teorema de Weierstrass) en todos los puntos finitos del recinto K. En el punto del infinito, $F(z)$ toma el valor A_0: $F(\infty) = A_0$. Por definición, diremos que la función $F(z)$ es analítica en el punto del infinito. Por lo tanto, la analiticidad de la función en el punto del infinito también se caracteriza por la existencia de un desarrollo de la forma (2.1:1'), que es convergente en un entorno del punto del infinito.

Una serie que generaliza el concepto de serie dispuesta solamente según las potencias enteras no negativas de $z - z_0$ (la serie de potencias) o solamente según las potencias enteras no positivas de $z - z_0$, es la serie de Laurent. Así se llama la serie de la forma

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n. \quad (2.1:3)$$

Esta serie se entiende como la suma de dos series:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ y } \sum_{1}^{\infty} a_{-m} (z-z_0)^{-m} \quad (2.1:4)$$

y se considera convergente cuando, y sólo cuando, son convergentes ambas series (2.1:4). Así, pues, por definición:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{0}^{\nu} a_n (z-z_0)^n + \lim_{\mu\to\infty} \sum_{1}^{\mu} a_{-m} (z-z_0)^{-m},$$

o, lo que es lo mismo,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \lim_{\substack{\nu\to\infty \\ \mu\to\infty}} \sum_{-\mu}^{\nu} a_n (z-z_0)^n. \quad (2.1:5)$$

Aquí μ y ν tienden hacia el infinito independientemente uno del otro. La última expresión tiene el sentido siguiente: para cada $\varepsilon > 0$

existe un $N(\varepsilon)$ tal, pue para $\nu > N(\varepsilon)$ y $\mu > N(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad:

$$\left| \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n - \sum_{-\mu}^{\nu} a_n (z-z_0)^n \right| < \varepsilon.$$

En virtud de la definición, las propiedades de convergencia absoluta y uniforme de la serie de Laurent coinciden con las propiedades correspondientes de las series (2.1:4).

Designemos el $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ con λ y el $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{-m}|}$ con r. Entonces la primera de las series (2.1:4) es convergente absoluta y uniformemente en el interior del recinto G, que representa el interior de la circunferencia Γ: $|z-z_0| = \frac{1}{\lambda} = R$, y es divergente en el exterior de esta circunferencia; la segunda de las series (2.1:4) es convergente absoluta y uniformemente en el interior del recinto g que representa el exterior de la circunferencia γ: $|z-z_0| = r$, y es divergente en el interior de esta circunferencia.

Los recintos G y g tienen puntos comunes cuando, y sólo cuando, se cumple la desigualdad

$$r < R. \qquad (2.1:6)$$

En este caso, la parte común de los recintos G y g representa un anillo circular D:

$$r < |z-z_0| < R. \qquad (2.1:7)$$

En el interior del recinto (2.1:7) ambas series convergen absoluta y uniformemente; por consiguiente, en el interior de este recinto converge también la serie de Laurent (2.1:3), que representa en D una función analítica:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad r < |z-z_0| < R. \qquad (2.1:8)$$

En cada punto situado fuera del recinto D es divergente una de las series (2.1:4), mientras que la otra serie continúa siendo convergente; de aquí que la serie de Laurent es divergente fuera del recinto D. En resumen, *el campo de convergencia de la serie de Laurent es un anillo circular* (con la condición (2.1:6)). A continuación, hablando de las series de Laurent, siempre se supondrá que se cumple la condición (2.1:6), sin la cual no existe campo de convergencia de la serie.

Si $r < \rho < R$, la serie (2.1:8) es uniformemente en la circunferencia γ: $|z-z_0| = \rho$; ésta también será uniformemente convergente en γ después de que todos los términos se hayan multiplicado

por $\frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^{-k-1}$, donde k es un número entero arbitrario. Integrando la serie obtenida sobre γ, resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-z_0)^{n-k-1}\,dz.$$

Como muestra un simple cálculo, todas las integrales del segundo miembro son iguales a cero, menos una de ellas, correspondiente a $n=k$ e igual a $2\pi i$ (hay que emplear la ecuación de la circunferencia γ: $z=z_0+\rho e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$). Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz=a_k \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \qquad (2.1:9)$$

Hemos obtenido la expresión de los coeficientes de la serie de Laurent mediante la suma de esta serie. De aquí se deduce que, si las sumas de las series de Laurent:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k \text{ y } \varphi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k(z-z_0)^k,$$

que son convergentes en los anillos circulares D y Δ y que contienen una misma circunferencia $|z-z_0|=\rho$, coinciden en los puntos de esta circunferencia, entonces los coeficientes de ambas series son iguales dos a dos:

$$a_k=b_k \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

es decir, las series son idénticas. En particular, las series serán idénticas si los anillos D y Δ coinciden entre sí y $f(z)=\varphi(z)$ en todos los puntos del anillo D. De lo expuesto se deduce que *los desarrollos en serie de Laurent poseen la propiedad de identidad* (*propiedad de unicidad*).

Basándose en la propiedad de identidad, del mismo modo que en el ap. 5.2 del cap. tercero obtendremos que, si el desarrollo $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ representa una función par, entonces son iguales a cero todos los coeficientes de potencias impares de z, y si es una función impar, entonces son iguales a cero todos los coeficientes de potencias pares.

Demostremos la siguiente proposición importante:

Teorema de Laurent. *Toda función $f(z)$, uniforme y analítica en un anillo circular D: $r<|z-z_0|<R$, se expresa en este anillo por una serie de Laurent convergente*:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Obsérvese que en las condiciones de este teorema, el anillo puede degenerar en un círculo con el centro excluido ($r = 0$, $R < \infty$), en el exterior de un círculo con el punto del infinito excluido ($0 < r$, $R = \infty$) y, finalmente, en todo el plano con dos puntos excluidos: z_0 y ∞ ($r = 0$ y $R = \infty$). En la demostración ulterior no quedan excluidos los casos indicados.

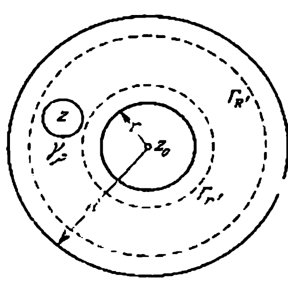


FIG. 66

Sea z algún punto del anillo D. Formemos un nuevo anillo D':

$$r' < |\zeta - z_0| < R',$$

situado en el interior del anillo inicial y que contiene el punto z (fig. 66). Para construirlo es suficiente tomar:

$$r < r' < |z - z_0| < R' < R.$$

Supongamos también que $|\zeta - z| = \rho$ es una circunferencia con el centro en z, situada en el interior de D'. Como

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

es una función analítica de ζ en el recinto D, a excepción del punto $\zeta = z$, según el teorema integral de Cauchy para un sistema de circuitos (ap. 2.5. cap. tercero), tendremos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad (2.1:10)$$

donde $\Gamma_{R'}$, $\Gamma_{r'}$ y γ_ρ denotan, respectivamente, las circunferencias:

$$|\zeta - z_0| = R', \qquad |\zeta - z_0| = r' \quad \text{y} \quad |\zeta - z| = \rho,$$

recorridas, al integrar, en sentido contrario al de las agujas del reloj. Pero la última integral en la fórmula (2.1:10) es la integral de

Cauchy y, por consiguiente, es igual a $f(z)$. Por lo tanto,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r'}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (2.1:11)$$

Expresemos $\frac{1}{\zeta-z}$ bajo el signo de la primera integral ($\zeta\in\Gamma_{R'}$) en forma de serie geométrica de razón $\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$, cuyo módulo

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{R'}=\theta<1.$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_0^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}. \qquad (2.1:12)$$

Como para todos los puntos ζ pertenecientes a $\Gamma_{R'}$, el módulo del término general de la última serie es

$$\left|\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|=\frac{1}{R'}\,\theta^n \qquad (0<\theta<1),$$

la serie (2.1:12) es uniformemente convergente en $\Gamma_{R'}$ (respecto de ζ). También será uniformemente convergente la serie obtenida de (2.1:12) multiplicando ésta por $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ (acotada en valor absoluto en $\Gamma_{R'}$):

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_0^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,(z-z_0)^n.$$

De aquí que esta última serie puede integrarse término a término sobre $\Gamma_{R'}$. Resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_0^{\infty}a_n\,(z-z_0)^n, \qquad (2.1:13)$$

donde

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R'}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \qquad (n=0,\ 1,2,\ \ldots). \qquad (2.1:14)$$

Así, pues, la primera de las integrales del segundo miembro de la igualdad (2.1:11) la hemos desarrollado en una serie convergente de potencias no negativas de $z-z_0$.

Refiriéndonos a la segunda integral del segundo miembro de la

igualdad (2.1:11), expresemos $-\frac{1}{\zeta - z}$ ($\zeta \in \Gamma_{r'}$) en forma de serie geométrica de razón $\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}$, cuyo módulo

$$\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r'}{|z - z_0|} = \vartheta < 1.$$

Obtenemos:

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0}\,\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}. \qquad (2.1:15)$$

Observando que esta serie también es uniformemente convergente en $\Gamma_{r'}$, multiplicando todos sus términos por $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ e integrando término a término, hallamos:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}, \qquad (2.1:16)$$

donde

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2.1:17)$$

Resumiendo, la segunda integral en el segundo miembro de la igualdad (2.1:11) la hemos expresado en forma de una serie convergente de potencias negativas de $z - z_0$.

Sustituyendo los desarrollos obtenidos (2.1:13) y (2.1:16) en el segundo miembro de la igualdad (2.1:11), obtenemos el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Laurent para un punto arbitrario $z \in D$:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \qquad (2.1:18)$$

Los coeficientes de este desarrollo se calculan, unos por las fórmulas (2.1:14), otros por las fórmulas (2.1:17). Tomando una circunferencia arbitraria Γ: $|z - z_0| = \lambda$, donde $r < \lambda < R$, nos convencemos mediante el teorema integral de Cauchy para el caso de un sistema de circuitos, que cada uno de ellos se puede calcular efectuando la integración sobre la circunferencia Γ:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (2.1:19)$$

Este resultado concuerda con el obtenido anteriormente (véase la fórmula (2.1:9)).

2.2. Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \qquad (2.2:1)$$

donde a_n son coeficientes complejos y λ_n son números reales no negativos que satisfacen a las condiciones

$$\lambda_{n+1} > \lambda_n \qquad (n=1, 2, \ldots), \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \qquad (2.2:2)$$

se llama **serie de Dirichlet (general)**, y los números λ_n se llaman **exponentes de la serie**.

Haciendo, en particular, $\lambda_n = \ln n$, obtenemos: $e^{-\lambda_n z} \frac{1}{n^z}$, y la serie toma la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z};$$

ésta es una **serie de Dirichlet ordinaria** (clásica), que tiene aplicaciones en la teoría de número.

Si en la serie general de Dirichlet se hace la sustitución $w = e^{-z}$, resulta la serie:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n w^{\lambda_n},$$

dispuesta según las potencias arbitrarias positivas e indefinidamente crecientes de w (por lo general, no enteras). Desde este punto de vista, la serie de Dirichlet puede considerarse como una generalización de la serie de potencias para el caso de exponentes arbitrarios que satisfacen a las condiciones (2.2:2).

Las series de Dirichlet poseen muchas propiedades análogas a las de las series de potencias. Solamente que aquí el campo de convergencia no es un círculo sino un semiplano.

Demostremos para ellas el siguiente teorema fundamental.

Teorema. *Si la serie* (2.2:1) *es convergente en un punto* $z_0 = x_0 + iy_0$, *entonces es convergente también en todos los puntos del semiplano* $x = \operatorname{Re} z > x_0$, *y la convergencia de la serie es uniforme en todo recinto* g_0 *de la forma*: $|\arg (z - z_0)| \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ (fig. 67).

El enunciado de este teorema recuerda el primer teorema de Abel. Solamente que aquí, como ya se indicó, en lugar del círculo aparece un semiplano, y después se demuestra que la convergencia, por lo general, no es absoluta.

Para demostrar el teorema, efectuemos una acotación de la magnitud $\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_k e^{-\lambda_k z}\right|$, aplicando el hecho de que la serie $\sum_{1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z_0}$ es convergente. Hagamos

$$\alpha_m = \sum_{n+1}^{m} a_k e^{-\lambda_k z_0} \,(m > n \quad \text{y} \quad \alpha_n = 0,$$

de modo que

$$a_k e^{-\lambda_k z_0} = \alpha_k - \alpha_{k-1} \qquad (k = n+1, n+2, \ldots);$$

haciendo también para abreviar

$$e^{-\lambda_k (z-z_0)} = b_k,$$

obtenemos:

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_k e^{-\lambda_k z} = \sum_{n+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_{k-1})\, b_k = \alpha_{n+p} b_{n+p} - \sum_{n+1}^{n+p-1} \alpha_k (b_{k+1} - b_k). \quad (2.2{:}3)$$

Esta última identidad ha sido escrita basándose en la transformación de Abel (véase el cap. primero, ap. 3.4).

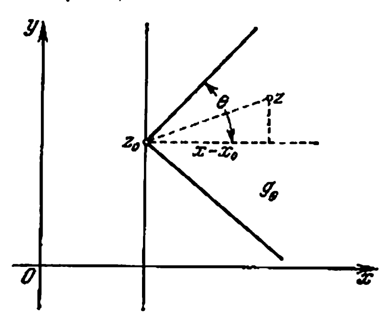


FIG. 67

Sea ε un número positivo arbitrario. En virtud de la convergencia de la serie (2.2:1), en el punto z_0 para $n > M(\varepsilon)$ y para cualquier $m \geqslant n$, tendremos:

$$|\alpha_m| = \left| \sum_{n+1}^{m} a_k e^{-\lambda_k z_0} \right| < \varepsilon \cos \theta. \quad (2.2{:}4)$$

Además,

$$|b_{n+p}| = |e^{-\lambda_{n+p}(z-z_0)}| = e^{-\lambda_{n+p}(x-x_0)} \quad (2.2{:}5)$$

y

$$|b_{k+1} - b_k| = \left| (z-z_0) \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-t(z-z_0)}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant |z-z_0| \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-t(x-x_0)}\, dt = \frac{|z-z_0|}{x-x_0} \left| e^{-\lambda_k (x-x_0)} - e^{-\lambda_{k+1}(x-x_0)} \right|.$$

(2.2:6)

Si el punto z pertenece al recinto g_θ, entonces $x - x_0 > 0$ y $\dfrac{|z-z_0|}{x-x_0} < \dfrac{1}{\cos\theta}$. Por lo tanto, de (2.2:3) y de las desigualdades (2.2:4), (2.2:5)

y (2.2:6) se deduce la siguiente desigualdad:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_k e^{-\lambda_k z}\right| \leqslant \varepsilon \cos\theta e^{-\lambda_{n+p}(x-x_0)} +$$

$$+\varepsilon\cos\theta \sum_{n+1}^{n+p-1} \frac{|z-z_0|}{x+x_0} |e^{-\lambda_k (x-x_0)} - e^{-\lambda_{n+1}(x-x_0)}| <$$

$$< \varepsilon e^{-\lambda_{n+1}(x-x_0)} < \varepsilon,$$

con lo cual queda demostrada la convergencia uniforme de la serie de Dirichlet en el recinto g_0 $\left(\text{para cualquier } \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ y a la vez, la convergencia ordinaria en todo el semiplano $x > x_0$.

Excluyendo el caso de una serie de Dirichlet que no converja en ningún punto del plano z, quedan todavía dos posibilidades:

la serie de Dirichlet converge en cualquier punto del plano;

existen puntos en los cuales la serie es convergente y también puntos en los cuales es divergente.

Detengámonos en este último caso. Sea $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto de convergencia de la serie de Dirichlet y $z_1 = x_1 + iy_1$ un punto de divergencia. De la proposición demostrada se deduce que $x_1 \leqslant x_0$. Por otra parte, la serie tiene que ser convergente en todos los puntos del semiplano $x > x_0$ y divergente en todos los puntos del semiplano $x < x_1$ (si fuese convergente en un punto z para el cual $x < x_1$, entonces, en virtud del teorema demostrado, tendría que converger también en el punto z_1, lo cual contradice a la hipótesis). Puede ocurrir que $x_1 = x_0$; entonces se tiene una recta $x = x_0$, a un lado de la cual la serie (2.2:1) es convergente y al otro lado, divergente. Sea $x_1 < x_0$; consideremos entonces el extremo inferior C de las partes reales de aquellos puntos z para los cuales la serie es convergente. Tendremos: $x_1 \leqslant C \leqslant x_0$.

Cerciorémonos que la serie es convergente para $x > C$ y divergente para $x < C$. En efecto, si $\operatorname{Re} z = x > C$, entonces en el semiintervalo (C, x), en virtud de la definición del número C, tiene que haber al menos un número ξ que es la parte real de un punto $\zeta = \xi + i\eta$ para el cual la serie es convergente. De aquí, por lo demostrado, se deduce que la serie converge también en el punto dado z. Si $\operatorname{Re} z = x < C$, entonces, suponiendo que la serie fuese convergente en el punto $z = x$, obtendríamos una contradicción con la definición del número C como extremo inferior.

Resumiendo, se puede decir que, para una serie de Dirichlet arbitraria, existen tres posibilidades:

a) la serie es divergente en todos los puntos;

b) existe una recta $x = C$ tal, que la serie es convergente en el semiplano $x > C$ y es divergente en el semiplano $x < C$;

c) la serie es convergente en todos los puntos;

Llamando al número C abscisa de convergencia y al semiplano $x > C$, semiplano de convergencia de la serie de Dirichlet, podemos considerar los casos a) y b) como casos límites, en los cuales $C = +\infty$ y $C = -\infty$, respectivamente.

Considerando solamente los casos b) y c), cuando $C < +\infty$, se puede afirmar, debido a la convergencia uniforme de la serie, que la suma de la serie de Dirichlet es una función analítica en el semiplano de convergencia. Sin embargo, no cualquier función, ni mucho menos, analítica en un semiplano, puede desarrollarse en serie de Dirichlet con unos exponentes dados $\{\lambda_n\}$. Así, por ejemplo, en el caso más simple en que todos los números λ_n son enteros, la

suma de la serie

$$\sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

tiene que poseer período $2\pi i$. Incluso esta condición necesaria no es suficiente: respecto de una función cualquiera $f(z)$, analítica en un semiplano $\text{Re}\, z > C$ y que posea en el mismo el período $2\pi i$, se puede afirmar solamente que ésta es desarrollable en una serie de la forma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-nz},$$

que es absoluta y uniformemente convergente en el interior de este semiplano. Para llegar a este desarrollo, que generaliza a la serie de Dirichlet en el mismo sentido en el que la serie de Laurent generaliza a la serie de Taylor, es suficiente realizar la transformación $\zeta = e^{-z}$. Como resultado, $f(z)$ se transformará en una función $f^*(\zeta)$, uniforme y analítica en el círculo $|\zeta| < e^{-C}$, a excepción, posiblemente, de su centro. En este círculo se tiene:

$$f^*(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n,$$

o bien, volviendo a la variable z:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-nz}.$$

Hasta ahora no dijimos nada de la convergencia absoluta de la serie de Dirichlet en el caso general.

Demostremos que *si la serie (2.2:1) es absolutamente convergente en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces esta serie es absoluta y uniformemente convergente en el semiplano $x \geqslant x_0$.*

En efecto, si $x \geqslant x_0$, entonces

$$|a_n e^{-\lambda_n z}| = |a_n e^{-\lambda_n z_0}|\, |e^{-\lambda_n (z-z_0)}| = |a_n e^{-\lambda_n z_0}|\, e^{-\lambda_n (x-x_0)} \leqslant |a_n e^{-\lambda_n z_0}|.$$

De aquí que, en virtud de la convergencia de la serie $\sum_{1}^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n z_0}|$, de coeficientes constantes no negativos, la serie (2.2:1) es absoluta y uniformemente convergente en el semiplano $x \geqslant x_0$.

Razonando del mismo modo que se hizo para el caso de la convergencia simple, es fácil establecer que, en lo que se refiere a una serie arbitraria de Dirichlet, existen tres posibilidades:

a′) la serie no converge absolutamente en ningún punto del plano:

b′) existe una recta $x = A$, $A \geqslant C$, tal que en el semiplano $x > A$ la serie es absolutamente convergente mientras que en el semiplano $x < A$ la serie no converge absolutamente en ningún punto;

c′) la serie es absolutamente convergente en todos los puntos del plano.

Llamando al número A abscisa de convergencia absoluta de la serie de Dirichlet y al semiplano $x > A$, semiplano de convergencia absoluta, podemos considerar los casos a′) y c′) como casos límites, en los cuales $A = +\infty$ y $A = -\infty$, respectivamente.

Si los exponentes λ_n satisfacen a la condición complementaria

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} < +\infty \qquad (2.2:7)$$

(esta condición se cumple tanto en el caso de la serie ordinaria de Dirichlet, para la cual $\lambda_n = \ln n$ y $L = 1$, como en el caso correspondiente a la serie de potencias, para la cual $\lambda_n = n$ y $L = 0$), *entonces la abscisa de convergencia C y la abscisa de convergencia absoluta A satisfacen a la condición*

$$0 \leqslant A - C \leqslant L. \tag{2.2:8}$$

En efecto, sea $C < +\infty$. Tomemos un punto $x = C + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$; como x pertenece al semiplano de convergencia de la serie de Dirichlet, se tiene, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n e^{-\lambda_n(C+\varepsilon)} = 0$ y, por consiguiente, la sucesión $\{a_n e^{-\lambda_n(C+\varepsilon)}\}$ está acotada: $|a_n e^{-\lambda_n(C+\varepsilon)}| < M$. Por lo tanto, para los puntos $x_1 = C + L + 3\varepsilon$, tendremos:

$$|a_n e^{-\lambda_n (C+L+3\varepsilon)}| = |a_n e^{-\lambda_n (C+\varepsilon)}| e^{-\lambda_n (L+2\varepsilon)} < M e^{-\lambda_n (L+2\varepsilon)}.$$

Pero, para valores de $n > N$ suficientemente grandes, en virtud de (1.2:7), se tiene:

$$\frac{\ln n}{\lambda_n} < L + \varepsilon,$$

es decir,

$$\ln n < (L+\varepsilon)\lambda_n \quad \text{y} \quad e^{-\lambda_n (L+2\varepsilon)} = |e^{-\lambda_n (L+\varepsilon)}|^{\frac{(L+2\varepsilon)}{L+\varepsilon}} < \frac{1}{n^{1+\delta}},$$

donde $\delta = \frac{\varepsilon}{L+\varepsilon} > 0$. Así, pues, para $n > N$ se verifican las desigualdades

$$|a_n e^{-\lambda_n (C+L+3\varepsilon)}| < \frac{M}{n^{1+\delta}},$$

de donde se deduce que la serie de Dirichlet es absolutamente convergente en el punto $x_1 = C + L + 3\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por consiguiente,

$$C + L + 3\varepsilon \geqslant A,$$

o bien, pasando a límites para $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$A - C \leqslant L,$$

que es lo que se quería demostrar.

Los números A y C pueden ser, verdaderamente, distintos entre sí, como esto se deduce del ejemplo de la serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}. \tag{2.2:9}$$

Esta es una serie ordinaria de Dirichlet, para la cual $L = 1$, y, por consiguiente, en virtud de lo demostrado, tiene que ser:

$$A - C \leqslant 1.$$

Evidentemente, la serie (2.2:9) es divergente en el punto $z = 0$. Por otra parte, en cada punto $z = \delta > 0$ sus términos representan números reales, decrecientes en valor absoluto, que tienden a cero y son alternativamente positivos y negativos. Por consiguiente, (según el criterio de Leibniz), la serie es convergente. De aquí se deduce que la abscisa de convergencia de la serie es

$C = 0$. Pero en los puntos $z = x = \delta > 0$ para $\delta \leqslant 1$ la serie converge no absolutamente, puesto que la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\delta}}$ es divergente si $\delta \leqslant 1$. Por otra parte, si $\delta > 1$, la serie de valores absolutos $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\delta}}$ es convergente. Así, pues, la abscisa de convergencia absoluta de la serie (2.2:9) $A = 1$. Vemos, pues, que para la serie (2.2:9) existe una franja $0 < x < 1$, en la cual ésta es convergente pero no absolutamente.

Cuando $L = 0$ (como ya se indicó, la serie de Taylor corresponde a este caso), los números A y C coinciden, lo cual se deduce de la desigualdad (2.2:8).

Por lo tanto, para las series de Dirichlet que satisfacen a la condición

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0, \tag{2.2:10}$$

el semiplano de convergencia es a la vez el semiplano de convergencia absoluta.

Demostremos que *con la condición* (2.2:10), *el valor común de los números A y C se expresa por la fórmula*

$$A = C = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}, \tag{2.2:11}$$

que es una analogía (y a la vez una generalización) de la fórmula de Cauchy — Hadamard.

En efecto, sea $\overline{\lim} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = \Lambda < +\infty$. Tomemos un punto arbitrario $z_0 = x_0 + iy_0$ en el semiplano $x > \Lambda$, y sea $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}(x_0 - \Lambda)$. Entonces, debido a la definición del número Λ, para $n > N_1(\varepsilon)$, se tiene:

$$\frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} < \Lambda + \varepsilon \quad \text{o sea} \quad |a_n| < e^{\lambda_n(\Lambda+\varepsilon)}.$$

Por consiguiente, para $n > N_1(\varepsilon)$ se verifican las desigualdades

$$|a_n e^{-\lambda_n z_0}| = |a_n| e^{-\lambda_n x_0} < e^{-\lambda_n (x_0 - \Lambda - \varepsilon)} < e^{-2\lambda_n \varepsilon}.$$

Pero de la condición (2.2:10) se deduce que para $n > N_2(\varepsilon)$

$$\frac{\ln n}{\lambda_n} < \varepsilon, \text{ es decir, } n < e^{\lambda_n \varepsilon}, \text{ o sea, } e^{-\lambda_n \varepsilon} < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, si $n > N = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$, obtenemos:

$$|a_n e^{-\lambda_n z_0}| < \frac{1}{n^2},$$

lo cual significa que la serie de Dirichlet es absolutamente convergente en el punto z_0, el cual es un punto arbitrario del semiplano $x > \Lambda$; así, pues, $A = C \leqslant \Lambda$.

Por otra parte, si el punto $z_1 = x_1 + iy_1$ pertenece al semiplano $x < \Lambda$, o sea, si $x_1 < \Lambda$, entonces para ε, $0 < \varepsilon < \Lambda - x_1$, tiene que existir una sucesión de números naturales $\{n_k\}$ tales, que

$$\frac{\ln |a_{n_k}|}{\lambda_{n_k}} > \Lambda - \varepsilon > x_1, \quad \text{o sea,} \quad |a_{n_k}| > e^{\lambda_{n_k} x_1}.$$

Entonces tendremos:

$$|a_{n_k}e^{-\lambda_{n_k}x_1}|=|a_{n_k}|e^{-\lambda_{n_k}x_1}>e^{\lambda_{n_k}x_1}e^{-\lambda_{n_k}x_1}=1.$$

En resumen, la condición necesaria para la convergencia de la serie (2.2:1) no se cumple en ningún punto z_1 perteneciente al semiplano $x<\Lambda$. Por consiguiente, la serie de Dirichlet es divergente en este semiplano. Hemos obtenido que $\Lambda\leqslant A=C$. Confrontando los resultados obtenidos, hallamos finalmente que:

$$A=C=\Lambda.$$

La fórmula (2.2:11) queda establecida.

2.3. Sea E un conjunto infinito de puntos arbitrario, cuyos puntos son todos de acumulación para E (E es un conjunto denso en sí). Diremos que una función $f(z)$, definida y uniforme en E, es localmente analítica en E, si para cada punto $z_0\in E$ existe una serie de potencias $\sum\limits_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ y un entorno U_0 tales, que en todos los puntos de E pertenecientes a U_0, la función $f(z)$ se expresa en forma de una serie

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n.$$

Cuando E es un recinto, el concepto de función localmente analítica coincide con el concepto de función uniforme y analítica en el recinto.

Como ejemplo, consideremos una división del plano en cuadrados Δ_1, Δ_2, ..., ..., Δ_n, ... con los lados paralelos a los ejes de coordenadas y de longitud igual a uno; supongamos que E es el conjunto de los puntos interiores de todos estos cuadrados. Entonces, haciendo $f(z)=z^n$ para $z\in\Delta_n$, obtenemos una función que es localmente analítica en E.

Sea $E=O$ un conjunto abierto arbitrario. Si es conexo, entonces O es un recinto; si es desconexo, entonces O consta de un conjunto finito o numerable de recintos que carecen de puntos comunes dos a dos. Consideremos alguna división del plano en cuadrados iguales, con los lados paralelos a los ejes coordenados, tal que el origen de coordenadas sea el vértice de uno de ellos. Tomemos solamente aquellos cuadrados que pertenecen a O junto con los ocho cuadrados adyacentes al mismo. Los puntos situados en el interior de los cuadrados elegidos, los puntos de los lados que son comunes a dos cuadrados de este tipo y los vértices, comunes para cuatro cuadrados, forman un conjunto abierto O' tal, que $\overline{O'}\subset O$ (fig. 68).

Supongamos que la longitud del lado del cuadrado de la división es igual a $\frac{1}{3^n}$. Designemos con O_n la intersección del conjunto O' con el cuadrado $-3^n<x<3^n$, $-3^n<y<3^n$.

O_n es un conjunto abierto acotado tal, que $\overline{O}_n\subset O$. La frontera del conjunto O_n consta de un número finito de curvas cerradas de Jordan rectificables, cada una de las cuales está formada por un número finito de segmentos rectilíneos.

Además, evidentemente, se cumplen las siguientes propiedades:

1) O_n junto con su frontera está situado en el interior de O_{n+1};

2) para todo conjunto cerrado acotado F, $F\subset O$, se puede hallar un número positivo $N(F)$ tal, que para $n\geqslant N(F)$, $F\subset O_n$.

Expresando estas propiedades, diremos que $\{O_n\}$ es una sucesión creciente de conjuntos abiertos que aproximan a O.

Sea $f(z)$ una función localmente analítica en O. Designando con Γ_m la frontera del conjunto O_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, para $z \in \overline{O}_m$, tendremos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{m+1}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (2.3:1)$$

Aquí la integral sobre Γ_{m+1} se debe entender como la suma de integrales tomadas sobre las curvas cerradas de Jordan rectificables separadas, de las cuales se compone Γ_{m+1}. Si $z \in \overline{O}_m$, el punto z estará situado en el interior de una componente O_{m+1}, cuya frontera designaremos con γ. Entonces la integral $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = f(z)$, mientras que las integrales análogas sobre las fronteras de las demás

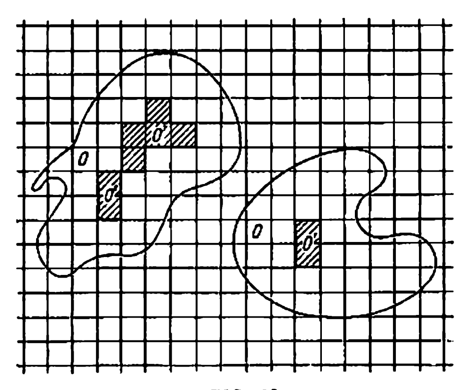


FIG. 68

componentes O_{m+1} serán iguales a cero. Sumándolas todas estas conjuntamente obtenemos la igualdad (2.3:1). Demostremos que para un $\varepsilon > 0$ arbitrario se puede hallar para la integral (2.3:1) una suma integral tal

$$S^{(m+1)}(z) = S^{(m+1)}(z, \varepsilon),$$

que para todos los puntos z del conjunto $\overline{Q}_m$ se cumpla la desigualdad:

$$|f(z) - S^{(m+1)}(z, \varepsilon)| < \varepsilon. \qquad (2.3:2)$$

Esto se deduce del teorema de Vitali (ap. 1.2). En efecto, formemos para la integral (2.3:1) una sucesión de sumas integrales

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{n} \frac{f(\zeta_h')}{\zeta_h' - z} (\zeta_h'' - \zeta_h') \right\},$$

convergente hacia el mismo. Aquí ζ_h' y ζ_h'' son los puntos inicial y final, respectivamente, del arco σ_h perteneciente a la división de Γ_{m+1}. Generalmente, ζ_h'' coincide con ζ_{h+1}', pero esto no ocurre cuando σ_h y σ_{h+1} pertenecen a distintas

curvas que forman Γ_{m+1} (no olvidemos que Γ_{m+1} puede ser un conjunto desconexo). Para que la sucesión de las sumas integrales sea uniformemente convergente en $\overline{O}_m$ es suficiente, según el teorema de Vitali, que esta sucesión esté uniformemente acotada en el interior de O_{m+1}. Pero esto, verdaderamente, es así, puesto que para cualquier conjunto cerrado $F \subset O_{m+1}$, se tiene:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\zeta_k')}{\zeta_k'-z}(\zeta_k''-\zeta_k')\right| \leqslant \frac{M_{m+1}}{2\pi\delta(F)}L_{m+1} \quad (n=1, 2 \ldots),$$

donde $M_{m+1} = \max |f(z)|$ en Γ_{m+1}, $\delta(F)$ es la distancia desde F hasta Γ_{m+1} y L_{m+1} es la longitud de Γ_{m+1}. Por esta razón, para todo $\varepsilon > 0$ se puede hallar un $N(\varepsilon)$ tal, que para $n \geqslant N(\varepsilon)$ cada una de las sumas integrales consideradas se puede tomar por $S^{(m+1)}(z, \varepsilon)$ en la desigualdad (2.3:2).

Haciendo $\varepsilon = \varepsilon_m$, $\varepsilon_m \to 0$ para $m \to \infty$, obtendremos una sucesión de funciones racionales $S^{(m+1)}(z) = S^{(m+1)}(z, \varepsilon_{m+1})$ que converge uniformemente hacia $f(z)$ en cada conjunto cerrado $\overline{O}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ y que, por consiguiente, converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de O. En resumen, obtenemos el siguiente teorema:

Para cualquier conjunto abierto O y para cualquier función uniforme $f(z)$, localmente analítica en O, existe una sucesión de funciones racionales $R_n(z) = S^{(n+1)}(z)$ que converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de O.

L e m a. *Sea F un conjunto cerrado acotado y ζ, un punto situado fuera de F. Sea $R(z)$ una función racional con el único polo en ζ: $R(z) = \dfrac{P(z)}{(z-\zeta)^k}$ (el grado del polinomio $P(z)$ no es superior a k). Si el punto $\mathfrak{z}$ pertenece al mismo recinto g, adjunto con F, al cual pertenece también el punto ζ, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede construir una función racional $\widetilde{R}(z)$: $\widetilde{R}(z) = \dfrac{\widetilde{P}(z)}{(z-\mathfrak{z})^{\widetilde{k}}}$ (el grado de $\widetilde{P}(z)$ no es superior a $\widetilde{k}$) tal que $|\widetilde{R}(z) - R(z)| < \varepsilon$ $(z \in F)$.*

Para demostrar esto, unamos los puntos ζ y $\mathfrak{z}$ en el interior de g por una curva continua γ y designemos por ρ, $\rho > 0$, la distancia entre γ y F. Dividiendo γ en arcos $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, cuyos diámetros sean menores que $\frac{\rho}{2}$ y designando los puntos de división mediante $\zeta_0 = \zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_m = \mathfrak{z}$, formemos una función racional

$$R_1(z) = \frac{P(z)}{(z-\zeta)^k}\left[1-\left(\frac{\zeta-\zeta_1}{z-\zeta_1}\right)^{n_1}\right]^k = \frac{P_1(z)}{(z-\zeta_1)^{n_1 k}}$$

(el grado de $P_1(z)$ no es superior a $k + n_1 k - k = n_1 k$). Para $z \in F$, tendremos:

$$|R_1(z) - R(z)| = |R(z)|\left|\left[1-\left(\frac{\zeta-\zeta_1}{z-\zeta_1}\right)^{n_1}\right]^k - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\left[\binom{k}{1}\left(\frac{\frac{\rho}{2}}{\rho}\right)^{n_1} + \ldots\right] < M\frac{2^k}{2^{n_1}},$$

donde $M = \max\limits_F |R(z)|$.

Tomando n_1 suficientemente grande, obtendremos que

$$|R_1(z) - R(z)| < \frac{\varepsilon}{m} \quad (z \in F).$$

Reiterando este razonamiento, en la m-ésima vez obtendremos la función pedida $\widetilde{R}(z) = \widetilde{R}_m(z)$.

Teorema de Runge. *Sea O un conjunto (finito o numerable) de recintos simplemente conexos sin puntos comunes dos a dos, que no contienen al punto ∞. Para cada función $f(z)$, uniforme y localmente analítica en O, se puede construir una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$ que converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de O.*

Obsérvese que, en las condiciones del teorema, cada componente del conjunto O_n representa un recinto simplemente conexo, puesto que la frontera de

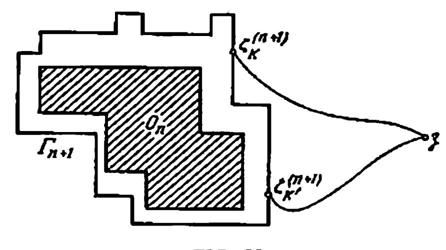


FIG. 69

tal componente es una curva cerrada de Jordan perteneciente a una de las componentes del conjunto O. Por lo tanto, cada punto de la frontera Γ_{n+1} del conjunto O_{n+1}, y, en particular, cada punto $\zeta_h'^{(n+1)}$, puede unirse mediante un arco de Jordan que no tenga puntos comunes con $\overline{O}_n$, con un mismo punto $\mathfrak{z}$ situado fuera del círculo $|z| < R_n$ que contiene a $\overline{O}_n$ (fig. 69). Aplicando el lema a las funciones racionales

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta_k'^{(n+1)})}{\zeta_k'^{(n+1)} - z}\,(\zeta_{k+1}'^{(n+1)} - \zeta_k'^{(n+1)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N^{(n+1)})$$

para $\varepsilon = \frac{\varepsilon_n}{N^{(n+1)}}$, construyamos una función racional $\widetilde{S}_n(z)$ con el único polo en $\mathfrak{z}$: $\widetilde{S}_n(z) = \frac{\widetilde{P}(z)}{(z-\mathfrak{z})^{\widetilde{n}}}$ (el grado de $\widetilde{P}(z)$ no es superior a $\widetilde{n}$), que satisfaga en todos los puntos del conjunto $\overline{O}_n$ a la desigualdad:

$$|\widetilde{S}_n(z) - S^{(n+1)}(z)| < \varepsilon_n$$

y, por consiguiente, a la desigualdad:

$$|f(z) - \widetilde{S}_n(z)| < 2\varepsilon_n.$$

Pero la función $\widetilde{S}_n(z)$ es analítica en el círculo $|z| < R_n$, y, por consiguiente, en el conjunto $\overline{O}_n$ situado en el interior de este círculo se la puede sustituir por una serie de potencias. Tomando un segmento $P_n(z)$ de la serie de potencias suficientemente grande, tendremos:

$$|f(z) - P_n(z)| < 3\varepsilon_n, \qquad z \in \overline{O}_n.$$

La sucesión $\{P_n(z)\}$ satisface a todas las condiciones del teorema.

Corolario. *Sea P un conjunto perfecto acotado cuyo complemento C respecto del plano ampliado es conexo, es decir, es un recinto. Entonces, para cualquier función $f(z)$, uniforme y localmente analítica en P, y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $Q(z)$ tal, que*

$$|f(z)-Q(z)|<\varepsilon \qquad (z \in P).$$

Demostración. Para cada punto z_0, $z_0 \in P$, existe un círculo K_{z_0} de radio ρ_{z_0} con el centro en z_0 tal, que en todos los puntos del conjunto P situados en el interior de este círculo, $f(z)$ se representa por una serie de potencias

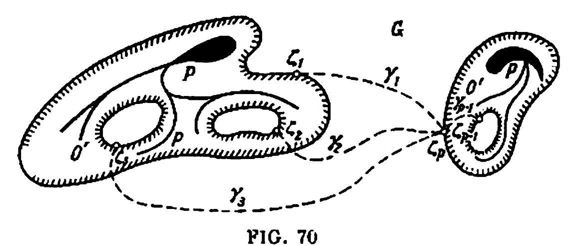


FIG. 70

de $z-z_0$. De un cubrimiento del conjunto P mediante círculos $\tilde{K}_{z_0}: |z-z_0| < \frac{1}{2}\rho_{z_0}$ elegimos un subcubrimiento finito: $\tilde{K}_{z_1}, \ldots, \tilde{K}_{z_p}$. La unión de estos círculos forma un conjunto abierto O' que contiene a P. Si dos círculos $\tilde{K}_{z_i}$ y $\tilde{K}_{z_j}$ tienen una parte común, entonces, de la desigualdad $|z_i - z_j| < \frac{1}{2}(\rho_{z_i}+\rho_{z_j})$ se desprende que $|z_i-z_j| < \max(\rho_{z_i}, \rho_{z_j})$. Sea, por ejemplo, $\max(\rho_{z_i}, \rho_{z_j}) = \rho_{z_i}$. Entonces el círculo $K_{z_i}: |z-z_i| < \rho_{z_i}$ contiene en su interior a z_j y, por consiguiente, también un conjunto infinito de puntos de P. Las sumas de las series de potencias, dispuestas según $z-z_i$ y $z-z_j$, coinciden en el conjunto de puntos señalado y, por consiguiente, coinciden también en toda la parte común de los círculos $\tilde{K}_{z_i}$ y $\tilde{K}_{z_j}$. En resumen, las series de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_j^{(k)}(z-z_j)^k$ $(j=1, \ldots, p)$, que representan a la función $f(z)$ en sus círculos correspondientes, determinan en O' una función uniforme analítica que coincide con $f(z)$ en P. Si O' es la unión de recintos simplemente conexos, sin puntos comunes dos a dos, entonces no queda más que aplicar el teorema de Runge al conjunto O' y a la función $f(z)$. Supongamos que entre las componentes del conjunto O' hay recintos múltiplemente conexos. La frontera del conjunto O' consta de una cantidad finita p de continuos, sin puntos comunes dos a dos y situados en el recinto G. Tomando un punto en cada uno de ellos —sean éstos $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$— unamos los puntos $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$ con ζ_p por el interior de G mediante arcos de Jordan $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}$. Entonces, $O' - O' \cap (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{p-1}) = O$ será un conjunto abierto, que contiene a P, cuyas componentes serán recintos simplemente conexos sin puntos comunes (fig. 70). No queda más que agregar que $P \subset O \subset O'$, y nos encontramos en condiciones de aplicación del teorema de Runge.

Basándose en el corolario demostrado, es fácil demostrar un teorema más fuerte que el de Runge:

T e o r e m a. *Sea O un conjunto abierto que no contenga al punto ∞ y que represente la unión de unos recintos simplemente conexos sin puntos comunes. Supongamos que P es un conjunto perfecto acotado, sin puntos comunes con O, cuyo complemento es conexo, es decir, es un recinto. Si $f(z)$ es una función uniforme y localmente analítica en O, y $\varphi(z)$ es una función uniforme y localmente analítica en P, entonces se puede construir una sucesión de polinomios que converge hacia $f(z)$ en O* y hacia $\varphi(z)$ en P, y que es uniformemente convergente en todo conjunto $F+P$, donde F es cualquier conjunto cerrado acotado contenido en O.

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $\{O_n\}$ es una sucesión de conjuntos abiertos, construidos para el conjunto O del modo que se indicó anteriormente en la pág. 405 En las condiciones del teorema, cada conjunto O_n es la unión de unos recintos simplemente conexos sin puntos comunes, $\overline{O}_n \subset O$ y, por consiguiente, $\overline{O}_n$ y P no tienen puntos comunes. Por lo tanto, la función $F(z)$, igual a $f(z)$ en $\overline{O}_n$ y a $\varphi(z)$ en P, es uniforme y localmente analítica en el conjunto perfecto $\overline{O}_n + P$. Además, el complemento de $\overline{O}_n + P$ es un conjunto conexo. Por consiguiente, para cualquier $\varepsilon_n > 0$ existe un polinomio $P_n(z)$ que satisface a la condición

$$|F(z) - P_n(z)| < \varepsilon_n, \qquad z \in \overline{O}_n + P.$$

La sucesión $\{P_n(z)\}$ es la buscada.

He aquí tres ejemplos que sirven de ilustración del teorema demostrado.

E j e m p l o 1. Sea dada alguna división del plano en cuadrados, con los lados paralelos a los ejes de coordenadas y de longitud igual a uno. Supongamos, para precisar, que el origen de coordenadas coincide con uno de los vértices de estos cuadrados.

Demostremos, basándose en el teorema de Runge, que se puede construir una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$, convergente en todo el plano, de modo que su límite sea igual a una función entera arbitraria $g(z)$ en el interior de cada cuadrado y sea igual a otra función entera $h(z)$ en los lados.

Consideremos un cuadrado $-n \leqslant x \leqslant n$, $-n \leqslant y \leqslant n$, para un valor natural n arbitrario, y sustituyamos cada uno de los cuadrados de la división considerada por el conjunto de cinco cuadrados y cuatro rectángulos, representados en la fig. 71, donde se muestran también las dimensiones de estas figuras. Evidentemente, cualquier punto del plano, para n suficientemente grande, caerá en el interior de una de estas figuras: el punto situado en los lados de uno de los cuadrados iniciales resultará en el interior de uno de los cuadrados pequeños con el centro en un vértice del cuadrado inicial o en el interior de uno de los rectángulos que se extienden a lo largo de los lados, mientras que el punto situado en el interior del cuadrado inicial resultará en el interior del cuadrado concéntrico con el mismo, cuya longitud del lado es igual a $1 - \frac{2}{3n}$.

El conjunto de las figuras construidas para un valor dado n, es un conjunto perfecto acotado F_n, cuyo complemento es conexo. Definamos en este conjunto una función uniforme y localmente analítica $f_n(z)$, haciendo $f_n(z) = g(z)$ en los cuadrados concéntricos con los iniciales, y $f_n(z) = h(z)$ en los demás cuadrados y rectángulos que están en la periferia respecto de los iniciales. En virtud del corolario del teorema de Runge, existe un polinomio $P_n(z)$ que satisface a la desigualdad

$$|f_n(z) - P_n(z)| < \frac{1}{n}, \qquad z \in F_n.$$

Evidentemente, la sucesión $\{P_n(z)\}$ satisface a todas las condiciones del problema planteado.

E j e m p l o 2. Construyamos mediante el teorema de Runge una función entera $f(z)$ que posea las propiedades siguientes: cualquiera que sea el recinto acotado simplemente conexo G y la función analítica en el mismo $\varphi(z)$, se puede hallar una sucesión de números naturales $\{n_k\}$ tal, que la sucesión $\{f(z+n_k)\}$ converge uniformemente hacia $\varphi(z)$ en el interior de G. En otras palabras, la función entera buscada es una función universal, mediante la cual (efectuando

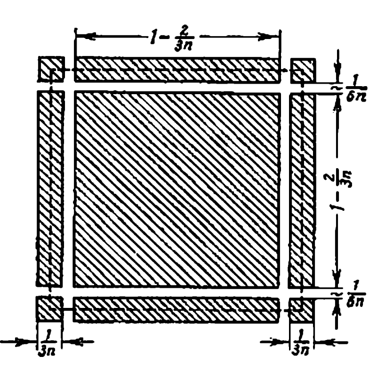


FIG. 71

solamente traslaciones del plano z en las magnitudes respectivas n_k) se pueden aproximar en cualquier recinto simplemente conexo cualesquiera funciones analíticas.

Para la construcción, consideremos todos los polinomios posibles con coeficientes cuyas partes reales e imaginarias sean todas números racionales. Evidentemente, el conjunto de todos estos polinomios es numerable, de modo que puede disponerse en forma de una sucesión: $\{\Pi_n(z)\}$.

Consideremos ahora una sucesión de círculos cerrados K_n: $|z-n^3|\leqslant n$. Estos no tienen puntos comunes y cada uno de ellos, para $n>1$, está contenido en el anillo circular

$$(n-1)^3+(n-1)^2+(n-1)+1<|z|<n^3+n^2+n+1.$$

Tomemos ahora un polinomio arbitrario $P_1(z)$; suponiendo que ya está definido el polinomio $P_{n-1}(z)$ $(n>1)$, definiremos el siguiente polinomio $P_n(z)$ mediante el teorema de Runge, de modo que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$|P_n(z)-P_{n-1}(z)|<\frac{1}{2^n} \quad \text{para} \quad |z|<(n-1)^3+(n-1)^2+(n-1)+1,$$

$$|P_n(z)-\Pi_n(z-n^3)|<\frac{1}{2^n} \quad \text{para} \quad |z-n^3|\leqslant n.$$

Evidentemente, la serie de polinomios

$$P_1(z)+\sum_{2}^{\infty}[P_n(z)-P_{n-1}(z)]=f(z)$$

es uniformemente convergente en cualquier círculo $|z| < R$, puesto que los módulos de sus términos, comenzando desde uno de ellos, es menor que los términos de la serie convergente $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Por consiguiente, $f(z)$ es una función analítica en el plano finito, es decir, es entera. En cada círculo K_n ésta satisface a la desigualdad

$$|f(z)-\Pi_n(z-n^3)| \leqslant |f(z)-P_n(z)|+|P_n(z)-$$

$$-\Pi_n(z-n^3)| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} |P_k(z)-P_{k-1}(z)|+|P_n(z)-$$

$$-\Pi_n(z-n^3)| < \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

(Aquí hemos utilizado el hecho de que K_n está situado en el interior del círculo $|z| < n^3+n^2+n+1$). Por lo tanto, en el círculo $|z| < n$ tiene que verificarse la desigualdad

$$|f(z+n^3)-\Pi_n(z)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Sea G un recinto acotado arbitrario, simplemente conexo y $\varphi(z)$, una función analítica en el mismo. Según el teorema de Runge, existe una sucesión de polinomios $\{p_m(z)\}$, uniformemente convergente hacia $\varphi(z)$ en el interior de G. Pero, para cada polinomio $p_m(z)$ se puede señalar un conjunto infinito de polinomios $\Pi(z)$ con coeficientes cuyas partes reales e imaginarias son números racionales, que satisfacen a la desigualdad

$$|p_m(z)-\Pi(z)| < \frac{1}{m}, \qquad z \in \overline{G}.$$

Los polinomios $\Pi(z)$ pertenecen a la sucesión $\{\Pi_n(z)\}$; como hay una infinidad de ellos, sus índices en esta sucesión son arbitrariamente grandes. Tomemos $\Pi(z) = \Pi_{n_m}(z)$ de modo que el índice n_m sea mayor que m. Obtendremos:

$$|p_m(z)-\Pi_{n_m}(z)| < \frac{1}{m}, \qquad z \in \overline{G}.$$

Evidentemente, la sucesión de polinomios $\{\Pi_{n_m}(z)\}$ converge uniformemente hacia $\varphi(z)$ en el interior de G. No queda más que observar que, si n_m es tan grande que G está contenido en el círculo $|z| < n_m$, entonces, según la construcción misma de la función entera $f(z)$, en el recinto cerrado $\overline{G}$ tiene que cumplirse la desigualdad:

$$|\Pi_{n_m}(z)-f(z+n_m^3)| < \frac{1}{2^{n_m-1}}.$$

Por consiguiente, la sucesión $\{f(z+n_m^3)\}$ también converge uniformemente hacia $\varphi(z)$ en el interior de G, de donde se deduce que ésta satisface a todo lo que se pedía en el problema.

E j e m p l o 3. Construyamos una función $f(z)$, analítica en el círculo unidad y que no tenga límite en ninguno de los radios al aproximarse al punto correspondiente de la circunferencia unidad (respecto de las funciones de este

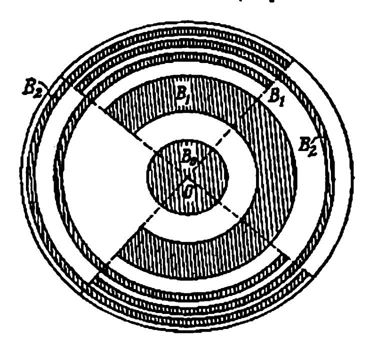


FIG. 72

género, se dice que en ningún sitio tienen v a l o r e s f r o n t e r a r a d i a l e s).

Sea

$$0 < r_0 < r_1 < \ldots, < r_n < \ldots, \lim r_n = 1.$$

Definamos los conjuntos abiertos:

$$B_0 (|z| < r_0),$$

$$B_1 \left(r_1 < |z| < r_2 \quad \text{y} \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}, \quad \text{o bien} \quad r_3 < |z| < \right.$$

$$\left. < r_4 \quad \text{y} \quad |\arg z| > \frac{\pi}{4} \right),$$

$$B_2 \left(r_5 < |z| < r_6 \quad \text{y} \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}, \quad \text{o bien} \quad r_7 < |z| < \right.$$

$$\left. < r_8 \quad \text{y} \quad |\arg z| > \frac{\pi}{4} \right)$$

y, en general, B_n:

$$r_{4n-3} < |z| < r_{4n-2} \quad \text{y} \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4},$$

o sea,

$$r_{4n-1} < |z| < r_{4n} \quad \text{y} \quad |\arg z| > \frac{\pi}{4} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(fig. 72). Construyamos ahora una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$ haciendo $P_0(z) = 0$ y sometiendo $P_{2n-1}(z)$ y $P_{2n}(z)$ (suponiendo que ya se han construido $P_0(z), \ldots, P_{2n-2}(z)$) a las condiciones siguientes:

$$|P_{2n-1}(z) - P_{2n-2}(z) < \frac{1}{2^{2n-1}} \quad \text{para} \quad |z| < r_{8n-8}$$

y

$$|P_{2n-1}(z)-1|<\frac{1}{2^{2n-1}} \quad \text{para} \quad z\in B_{2n-1};$$

$$|P_{2n}(z)-P_{2n-1}(z)|<\frac{1}{2^{2n}} \quad \text{para} \quad |z|<r_{8n-4}$$

y

$$|P_{2n}(z)|<\frac{1}{2^{2n}} \quad \text{para} \quad z\in B_{2n}.$$

La sucesión $\{P_n(z)\}$ es uniformemente convergente en todo conjunto cerrado de puntos situado en el círculo unidad. En efecto, tal conjunto F pertenece al círculo $|z|<r_{4n}$ para $n\geqslant N(F)$. Por lo tanto, para $n>N(F)$, se tiene: $|P_{n+1}(z)-P_n(z)|<\frac{1}{2^{n+1}}$ $(z\in F)$. El límite de la sucesión $\{P_n(z)\}$ representa una función $F(z)$ uniforme y analítica en el círculo unidad, que satisface a la condición

$$|F(z)-1|\leqslant|F(z)-P_{2n-1}(z)|+$$

$$+|P_{2n-1}(z)-1|=\left|\sum_{j=2n-1}^{\infty}[P_{j+1}(z)-P_j(z)]\right|+$$

$$+|P_{2n-1}(z)-1|<\sum_{j=2n-1}^{\infty}\frac{1}{2^{j+1}}+\frac{1}{2^{2n-1}}=\frac{1}{2^{2n-2}}$$

donde $z\in B_{2n-1}$, y a la condición

$$|F(z)|\leqslant|P_{2n}(z)|+\left|\sum_{j=2n}^{\infty}[P_{j+1}(z)-P_j(z)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{2n}}+\sum_{j=2n}^{\infty}\frac{1}{2^{j+1}}=\frac{1}{2^{2n-1}} \quad \text{para} \quad z\in B_{2n}$$

Debido a estas desigualdades y a la posición relativa de los conjuntos B_n, sacamos la conclusión de que $F(z)$ no tiene valores frontera al aproximarse a los puntos de la circunferencia unidad por los radios.

Sea O un conjunto abierto que no contenga al punto del infinito, y supongamos que entre las componentes del conjunto O hay al menos un recinto múltiplemente conexo. Entonces, entre los puntos frontera del conjunto O hay tales puntos ζ que pertenecen al interior de alguna curva cerrada de Jordan Γ contenida en O. Si $\{P_n(z)\}$ es la sucesión de polinomios que converge uniformemente en cada conjunto cerrado de puntos contenido en O, entonces, ella converge uniformemente en Γ y, por consiguiente, también en el interior de Γ. Por lo tanto, la función $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(z)$ tiene que ser analítica en el punto ζ. De aquí sacamos la conclusión de que toda función $f(z)$ que pueda expresarse por una sucesión de polinomios uniformemente convergente en cada conjunto

cerrado de puntos de O, necesariamente tiene que ser uniforme y analítica en el conjunto $\tilde{O}$, el cual representa la unión de todos los recintos mínimos simplemente conexos que contienen a las componentes del conjunto abierto O.

En virtud del teorema demostrado al principio de este apartado, para cada función $f(z)$ localmente analítica en O, existe una sucesión de funciones racionales $\{R_n(z)\}$ (no polinomios) que converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de O. Según la construcción de la función $R_n(z)$, todos sus polos están situados en la frontera Γ_{n+1} del conjunto abierto O_{n+1} que contiene a $\bar{O}_n$ y que está contenido en O. El complemento de $\bar{O}_n$ respecto del plano ampliado consta de un número finito de recintos $D_1^{(n)}, \ldots, D_{\nu_n}^{(n)}$. Cada uno de éstos contiene al menos un punto frontera o exterior a O y, por consiguiente, contiene al menos una poligonal cerrada que forma parte de Γ_{n+1}. Fijemos en los recintos $D_j^{(n)}$ sendos puntos $\alpha_j^{(n)}$ que sean puntos exteriores o puntos frontera de O. Entonces, debido al lema que nos sirvió para demostrar el teorema de Runge, la función $R_n(z)$ se puede sustituir por otra función racional $\tilde{R}_n(z)$, cuyos polos se agotan todos con los puntos $\alpha_j^{(n)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \gamma_n)$, y que satisface a la condición $|\tilde{R}_n(z) - R_n(z)| < \frac{1}{n}$ en el conjunto $\bar{O}_n$. De aquí se deduce que para la función $f(z)$ existe una sucesión de funciones racionales $\{\tilde{R}_n(z)\}$, uniformemente convergente hacia $f(z)$ en el interior de O, cuyos polos son todos puntos exteriores o puntos frontera de O y, como se ve de lo anterior, en cierta medida se eligen arbitrariamente. Para apreciar claramente el grado de arbitrariedad, supongamos, en particular, que O es un recinto de conexión finita cuya frontera consta de $p \geqslant 2$ curvas de Jordan, sin puntos comunes dos a dos. Cada una de estas curvas γ_j es la frontera de un recinto sin puntos comunes con O. Tomemos en estos recintos sendos puntos α_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$. Entonces se puede exigir que todos los polos de la función $\tilde{R}_n(z)$ estén contenidos entre los puntos α_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

Si, por ejemplo, O es un anillo circular: $0 < r < |z - z_0| < R < \infty$, entonces $p = 2$ y se puede hacer: $\alpha_1 = z_0$ y $\alpha_2 = \infty$. La función $\tilde{R}_n(z)$ tendrá que tener la forma

$$\tilde{R}_n(z) = \frac{A_0^{(n)} + A_1^{(n)}(z - z_0) + \ldots + A_{\mu_n}^{(n)}(z - z_0)^{\lambda_n}}{(z - z_0)^{\mu_n}} = \sum_{j=-\mu_n}^{\lambda_n - \mu_n} A_j^{(n)}(z - z_0)^j.$$

Por lo tanto, cada función $f(z)$, uniforme y analítica en el anillo circular, puede expresarse en la forma siguiente:

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \tilde{R}(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=-\mu_n}^{\lambda_n - \mu_n} A_j^{(n)}(z - z_0)^j.$$

Ya sabemos que el teorema de Laurent permite afirmar en este caso algo más, pues, según éste, se puede considerar que los coeficientes $A_j^{(n)}$ no dependen de n, de modo que para $f(z)$ resulta el desarrollo:

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j(z - z_0)^j.$$

Teorema de Montel. *Sea O un conjunto abierto arbitrario que no contenga al punto $z = \infty$, y sea $f(z)$ una función uniforme y localmente analítica en este conjunto. Entonces existe una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$ convergente hacia $f(z)$ en O* (por lo general, no uniformemente).

Demostración. Sea $\{O_n\}$ la sucesión creciente de conjuntos abiertos construida anteriormente. Representemos O_n en la forma

$$O_n = O_1 + (O_2 - O_1) + \ldots + (O_n - O_{n-1}) = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n.$$

Debido a la construcción, ω_j está formado por cuadrados iguales de lado $\frac{1}{3^j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Cada uno de estos cuadrados los sustituimos por nueve rectángulos, señalados en la fig. 71 (sustituyendo la longitud del lado del cuadrado por $\frac{1}{3^j}$). Considerando cada rectángulo como un conjunto cerrado, designemos por R_n la unión de todos los rectángulos correspondientes a los cuadrados $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Fácilmente se ve que R_n es un conjunto perfecto, que no contiene al punto del infinito y cuyo complemento es conexo. Además, $R_n \subset O$ (e incluso $R_n \subset O_{n+1}$), debido a lo cual para cualquier $\varepsilon_n > 0$ se puede hallar un polinomio $P_n(z)$ que satisfaga en R_n a la desigualdad

$$|P_n(z) - f(z)| < \varepsilon_n$$

(véase el corolario del teorema de Runge en la pág. 409).

La sucesión $\{P_n(z)\}$ satisface a todas las condiciones del teorema, si la sucesión $\{\varepsilon_n\}$ tiende a cero.

En efecto, cada punto z, $z \in O$, pertenece a alguno de los conjuntos ω_n. Supongamos que $z \in \omega_j$. Entonces z pertenece a uno de los cuadrados de lado $\frac{1}{3^j}$ que forman ω_j, y si z está situado en uno de los vértices del cuadrado, entonces este punto pertenece a todos los R_n para $n \geqslant j$; si z es distinto de los vértices, pero está situado en la periferia del cuadrado, entonces caerá en el interior de uno de los rectángulos de la periferia para n suficientemente grande y en adelante se mantendrá en el interior de este rectángulo, es decir, pertenecerá de nuevo a todos R_n, comenzando desde uno de ellos; finalmente, si z está situado en el interior del cuadrado principal, entonces caerá en un cuadrado concéntrico para n suficientemente grande y se mantendrá en su interior, es decir, pertenecerá también a todos R_n, comenzando desde uno de ellos. En resumen, en cualquier punto z, $z \in O$, para n suficientemente grande, $n > N(z)$, se verifica la desigualdad: $|P_n(z) - f(z)| < \varepsilon_n$, y, por consiguiente, $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(z) = f(z)$ (puesto que $\varepsilon_n \to 0$ para $n \to \infty$).

§ 3. PUNTOS SINGULARES AISLADOS. RESIDUOS. PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

3.1. Consideremos una función uniforme $f(z)$, analítica en un entorno de un punto z_0, a excepción, posiblemente, de este mismo punto. Entonces $f(z)$ es analítica en cierto recinto D:

$$0 < |z - z_0| < R.$$

Sea z_1 un punto del recinto D que satisfaga a la condición: $0 < |z_1 - z_0| < \frac{R}{2}$. En el círculo k_{z_1}: $|z - z_1| < |z_0 - z_1|$,

$f(z)$ es una función uniforme analítica y, por consiguiente, representa un elemento $\varphi_{z_1}(z)$ (cap. tercero, ap. 6.3). Todos los puntos de la circunferencia γ_{z_1}: $|z - z_1| = |z_0 - z_1|$ serán regulares para éste, a excepción, posiblemente, del punto z_0. Demostremos que si el punto z_0 también es regular para el elemento considerado, entonces será también regular para cualquier otro elemento $\varphi_{z_2}(z)$ de la función $f(z)$, correspondiente a un punto cualquiera z_2, $0 < |z_2 - z_0| < \frac{R}{2}$. En efecto, en estas condiciones, todos los puntos de la circunferencia γ_{z_1} serán regulares para $\varphi_{z_1}(z)$, por lo cual la serie de potencias $\sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n$ será convergente en cierto círculo K_{z_1}: $|z - z_1| < \rho_1$ cuyo radio $\rho_1 > |z_0 - z_1|$, y por consiguiente, el punto z_0 será interior para K_{z_1}. Como la suma de la serie $\psi(z)$ coincide con $\varphi_{z_1}(z) = f(z)$ en el círculo k_{z_1}, según el teorema de unicidad, ésta tiene que coincidir también con $f(z)$ en todos los puntos comunes a K_{z_1} y D. En particular, ésta coincide con $f(z)$ en todos los puntos de un entorno U del punto z_0 (a excepción del mismo punto z_0, en el cual por ahora la función $f(z)$ no está definida). Tomemos ahora un punto cualquiera $z_2 \neq z_1$, $|z_2 - z_0| < \frac{R}{2}$, el círculo que le corresponde k_{z_2}: $|z - z_2| < |z_2 - z_0|$ y el elemento $\varphi_{z_2}(z)$ (que no representa otra cosa más que la función $f(z)$ en el círculo k_{z_2}). Entonces z_0 está situado en la curcunferencia γ_{z_2}: $|z - z_2| = |z_2 - z_0|$. Como en su entorno U existe una función analítica $\psi(z)$ que coincide con $f(z)$ en todos los puntos de U distintos de z_0, ella coincide con $\varphi_{z_2}(z)$ en los puntos comunes para U y k_{z_2}, de donde se deduce que z_0 es un punto regular para $\varphi_{z_2}(z)$.

Resumiendo, si se consideran todos los elementos que representan la función $f(z)$ en el interior de las circunferencias que pasan por z_0, y el punto z_0 es regular para uno de estos elementos $\varphi_{z_1}(z)$, entonces éste es regular también para cualquier otro elemento $\varphi_{z_2}(z)$. En este caso, llamamos a la función $f(z)$ regular en el punto z_0 y completamos su definición haciendo $f(z_0) = \psi(z_0)$ De este modo, la función resulta analítica en todos los puntos del círculo $|z - z_0| < R$ y, por consiguiente, es desarrollable en serie de Taylor, dispuesta según las potencias de $z - z_0$, convergente en el interior de este círculo.

Consideremos ahora el caso en que el punto z_0 sea singular para algún elemento $\varphi_{z_1}(z)$. Entonces, en nuestras condiciones, éste tiene que ser también singular para cualquier otro elemento $\varphi_{z_2}(z)$. En efecto, suponiendo que fuese regular para $\varphi_{z_2}(z)$, según lo demostrado, tendríamos que sacar la conclusión de que sería también regular para $\varphi_{z_1}(z)$, en contra de lo supuesto.

En resumen, si z_0 es un punto singular para uno de los elementos $\varphi_{z_1}(z)$ que representan nuestra función uniforme $f(z)$ en el interior de una circunferencia que pasa por el punto z_0, entonces será también un punto singular para cualquier otro elemento $\varphi_{z_2}(z)$. En este caso, diremos que la función $f(z)$ posee un punto singular $z=z_0$, o mejor dicho, que posee un p u n t o s i n g u l a r a i s l a d o d e c a r á c t e r u n i f o r m e.

La serie de Laurent es el instrumento principal para la representación y estudio de una función analítica en el entorno de un punto singular aislado z_0. Apliquemos el teorema de Laurent a la función $f(z)$ en el recinto D: $0<|z-z_0|<R$. Este recinto es una degeneración de un anillo circular con el radio interior $r=0$. Obtenemos:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad z\in D, \tag{3.1:1}$$

donde

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

y γ_ρ es una circunferencia de radio ρ, $0<\rho<R$, con el centro en el punto z_0. El desarrollo (3.1:1) puede utilizarse también cuando z_0 es un punto regular. En este caso, la serie de Laurent se convierte en la serie de Taylor, y se tiene: $a_{-1}=a_{-2}=\ldots=0$.

Demostremos la siguiente proposición fundamental.

T e o r e m a. *Para que una función $f(z)$, uniforme y analítica en el recinto D: $0<|z-z_0|<R$, sea regular en el punto z_0, es necesario y suficiente que exista un entorno U del punto z_0 en el cual $f(z)$ esté acotada en valor absoluto.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que el punto z_0 es regular para $f(z)$. Entonces, en cierto entorno del punto z_0, $f(z)$ coincide con una función $\psi(z)$ que es analítica en este entorno. Tomando el entorno U de modo que éste quede situado junto con su frontera en el interior del recinto donde $\psi(z)$ es analítica, y teniendo en cuenta que esta última es por lo tanto continua, hallaremos que existe un $M<\infty$ tal, que

$$|f(z)=|\psi(z)|<M, \qquad z\in U.$$

Por lo tanto, queda demostrado que la condición del teorema es necesaria.

Demostremos ahora que es suficiente. Supongamos que existen un entorno U del punto z_0 y un número positivo $M<\infty$ tal, que

$$|f(z)|<M \text{ para todos los puntos } z\in U.$$

Entonces, eligiendo ρ, $0 < \rho < R$, de modo que la circunferencia γ_ρ pertenezca a U, para los módulos de los coeficientes a_n de la serie de Laurent (3.1:1) obtenemos las siguientes acotaciones:

$$|a_n| < \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}}, \quad \text{o sea,} \quad |a_n| < \frac{M}{\rho^n}.$$

Consideremos aquí solamente los coeficientes de las potencias negativas de $z - z_0$, o sea, supongamos que $n < 0$. Evidentemente, cuando ρ tiende a cero (con la única condición de que $0 < \rho < R$), obtenemos:

$$a_n = 0, \quad \text{para} \quad n = -1, \ -2, \ -3, \ \ldots$$

Así, pues, la serie de Laurent se convierte en la serie de Taylor:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n,$$

de donde se deduce que $f(z)$ coincide en el recinto D con una función que es analítica en un entorno del punto z_0 (con la suma de la serie de potencias hallada), es decir, el punto z_0 es regular para $f(z)$.

Del teorema demostrado se deduce que, para que z_0 sea un punto singular aislado de la función $f(z)$, es necesario y suficiente que en cualquier entorno del mismo no esté acotado el módulo $|f(z)|$, es decir, se cumpla la condición

$$\overline{\lim_{z \to z_0}} |f(z)| = \infty. \tag{3.1:2}$$

De aquí que, *a priori*, hay dos posibilidades para el comportamiento de $f(z)$ en un entorno de un punto singular aislado:

a) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$;

b) no existe ningún límite (ni finito ni infinito) de la función $f(z)$ cuando z tiende hacia z_0.

Cada uno de estos casos subsiste en la realidad.

Hagamos $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n}$, donde n es un número natural. Evidentemente, esta función es analítica para $0 < |z - z_0|$ y $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Por lo tanto, en este ejemplo se verifica el caso a).

Como segundo ejemplo, tomemos $f(z) = e^{\frac{1}{z - z_0}}$. Esta función también es analítica para $0 < |z - z_0|$, pero, a diferencia del ejemplo anterior, el $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe. En efecto, si, por ejemplo, el punto z está situado en la recta que pasa por el punto z_0 y es paralela al eje real, de modo que $z - z_0 = x - x_0$ es un número real,

entonces, para $x > x_0$ y $x \to x_0$, se tiene $e^{\frac{1}{x-x_0}} \to \infty$, y para $x < x_0$ y $x \to x_0$, se tiene, $e^{\frac{1}{x-x_0}} \to 0$. Por lo tanto, en este ejemplo se verifica el caso b). En la fig. 73 está representada la superficie $u = \left| \exp \frac{1}{z} \right|$, que es el relieve de la función considerada (para $z_0 = 0$) *).

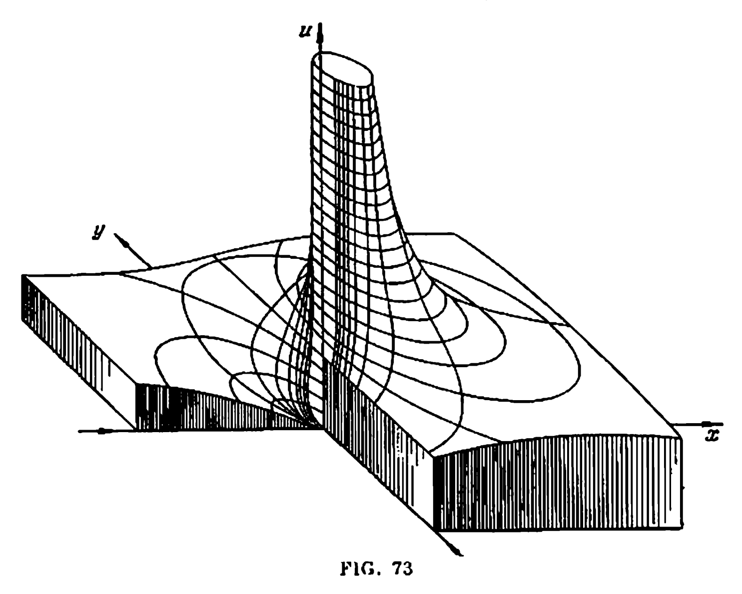


FIG. 73

Un punto singular aislado z_0 de carácter uniforme, para el cual se cumple la condición a): $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, se llama **p o l o d e l a f u n c i ó n a n a l í t i c a**. En el segundo capítulo ya nos encontramos con los polos de las funciones elementales.

Un punto singular aislado z_0 de carácter uniforme, para el cual se cumple la condición b): $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe (ni finito ni infinito), se llama **p u n t o s i n g u l a r e s e n c i a l d e l a f u n c i ó n**.

*) El dibujo ha sido adoptado de las «Tablas de funciones» de Jahnke y Emde.

Estudiemos detalladamente cada uno de estos dos tipos de puntos singulares.

Sea z_0 un polo de la función $f(z)$. Entonces $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ y, por consiguiente, existe un entorno $|z - z_0| < \delta < R$ del punto z_0, en el cual $f(z)$ satisface a la desigualdad $|f(z)| > 1$. Evidentemente, la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ es analítica en todo este entorno, a excepción, posiblemente, del punto z_0. Pero, como $|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < 1$, de aquí según el teorema de este apartado, se deduce que z_0 es un punto regular de $\varphi(z)$. El valor de esta función en el punto z_0 es igual a $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Por lo tanto, el punto z_0 es un cero de la función $\varphi(z)$.

Recíprocamente; si se sabe que $\varphi(z)$ es una función uniforme y analítica en un entorno del punto z_0, y z_0 es un cero de esta función, siendo $\varphi(z) \not\equiv 0$, entonces se puede señalar un $\Delta > 0$ tan pequeño, que $\varphi(z)$ no posea en el círculo $|z - z_0| < \Delta$ otros ceros, a excepción del punto z_0 (véase el ap. 6.1, cap. tercero). Formemos la función $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$; ésta es uniforme y analítica para $0 < |z - z_0| < \Delta$ y tiende a ∞ cuando z tiende hacia z_0. Por consiguiente, z_0 es un polo de $f(z)$.

Así, pues, queda demostrada la siguiente proposición: *para que el punto z_0 sea un polo de la función $f(z)$ es necesario y suficiente que este punto sea un cero de la función* $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Debido a esta propiedad, la cual establece una correspondencia entre los ceros y los polos, se crea la posibilidad de introducir el concepto de m u l t i p l i c i d a d u o r d e n d e m u l t i p l i c i d a d (abreviadamente, o r d e n) de un polo. Se dirá que z_0 es un polo de orden de multiplicidad k ($k \geqslant 1$) de la función $f(z)$, si este punto es un cero de orden k de la función $\frac{1}{f(z)}$. Cuando $k = 1$, el polo se llamará s i m p l e; cuando $k > 1$, se dirá que es m ú l t i p l e.

En un entorno de un polo de orden k el desarrollo de Laurent tiene un carácter determinado, que observaremos inmediatamente. Demostremos, precisamente, la siguiente proposición:

Para que el punto z_0 sea un polo de orden k de la función $f(z)$, es necesario y suficiente que el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en un entorno del punto z_0 no contenga miembros con potencias inferiores a $-k$, y que el coeficiente de $(z - z_0)^{-k}$ sea distinto de cero. En otras palabras, el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ tiene que tener

la forma

$$f(z)=a_{-k}(z-z_0)^{-k}+\ldots+a_{-1}(z-z_0)+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots, \quad (3.1:3)$$

donde $a_{-k}\neq 0$.

En efecto, sea z_0 un polo de la función $f(z)$ de orden k. Entonces para $\frac{1}{f(z)}$ tenemos que tener en este punto un cero de orden k, de donde

$$\frac{1}{f(z)}=A_k(z-z_0)^k+A_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots, \qquad A_k\neq 0,$$

en cierto entorno del punto z_0. Por lo tanto,

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^k}\,\frac{1}{A_k+A_{k+1}(z-z_0)+\ldots}. \quad (3.1:4)$$

La serie de potencias $A_k+A_{k+1}(z-z_0)+\ldots$ representa una función analítica que no se anula en cierto entorno del punto z_0 (puesto que $A_k\neq 0$). Por esta razón, la función $\frac{1}{A_k+A_{k+1}(z-z_0)+\ldots}$ es analítica en un entorno del punto z_0 y admite un desarrollo de la forma $\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\ldots$, donde $\alpha_0=\frac{1}{A_k}\neq 0$. Poniendo esta última serie en la fórmula (3.1:4), obtenemos para $f(z)$ el desarrollo:

$$f(z)=\alpha_0(z-z_0)^{-k}+\alpha_1(z-z_0)^{-k+1}+\ldots \qquad (\alpha_0\neq 0),$$

el cual, en virtud de la unicidad del desarrollo en serie de Laurent, representa el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$. Este coincide con (3.1:3) salvo las designaciones ($\alpha_n=a_{n-k}$, $n=0, 1, 2, \ldots$).

Así, pues, la condición del teorema demostrado es necesaria. Demostremos ahora que ésta es suficiente. Supongamos que $f(z)$ posee en un entorno del punto z_0 un desarrollo de la forma (3.1:3), donde $a_{-k}\neq 0$. Escribiéndolo en la forma

$$f(z)=\frac{a_{-k}+a_{-k+1}(z-z_0)+\ldots}{(z-z_0)^k},$$

sacamos la conclusión de que

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^k\,\frac{1}{a_{-k}+a_{-k+1}(z-z_0)+\ldots},$$

o bien, sustituyendo la función $\frac{1}{a_{-k}+a_{-k+1}(z-z_0)+\ldots}$ por su desarrollo en serie de Taylor según las potencias de $z-z_0$:

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^k[\beta_0+\beta_1(z-z_0)+\ldots]=$$
$$=\beta_0(z-z_0)^k+\beta_1(z-z_0)^{k+1}+\ldots,$$

donde $\beta_0=\frac{1}{a_{-k}}\neq 0$.

Hemos obtenido que el punto z_0 es un cero de orden k de la función $\frac{1}{f(z)}$. Por consiguiente, este mismo punto es un polo de orden k de la función $f(z)$. El teorema queda demostrado.

Examinemos el caso de un punto singular esencial. El comportamiento de la función en un entorno de un punto singular esencial se caracteriza por la siguiente proposición:

Teorema de Sojotski-Cassorati-Weierstrass *). *Cualquiera que sea el número complejo A* (propio o impropio), *existe una sucesión de puntos* $\{z_n\}$, *convergente hacia un punto singular esencial* z_0, *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

Demostración. Si $A = \infty$, el teorema es cierto, puesto que la función $f(z)$ no está acotada en valor absoluto en cualquier entorno del punto singular esencial. Supongamos ahora que $A \neq \infty$; demostremos el teorema por reducción a lo absurdo. Si en un entorno arbitrario del punto z_0 no se pueden hallar puntos en los cuales los valores de la función sean arbitrariamente próximos a A, entonces tienen que existir un entorno $0 < |z - z_0| < \delta$ y un número $\alpha > 0$ tales, que $|f(z) - A| > \alpha$ para $0 < |z - z_0| < \delta$. Examinemos la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$; ésta es analítica en el entorno $0 < |z - z_0| < \delta$. Además, satisface en este entorno a la desigualdad

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} < \frac{1}{\alpha}.$$

Por consiguiente, según el primer teorema de este apartado, $\varphi(z)$ es regular en el punto z_0 y su valor en este punto tiene que ser igual al límite $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z) - A}$. Pero $f(z)$ no está acotada en ningún entorno del punto z_0. Por lo tanto, el límite indicado solamente puede ser cero, o sea, $\varphi(z_0) = 0$. En resumen, la función $\frac{1}{f(z) - A}$ tiene un cero en el punto z_0, de donde se deduce que la función $f(z) - A$ y, por consiguiente, también $f(z)$, tiene un polo en este punto. Esto contradice a la condición del teorema, de donde se deduce que este último es cierto.

Ilustremos este teorema con dos ejemplos.

---

*) Este teorema fue publicado, independientemente uno del otro, por Sojotski y el matemático italiano Cassorati, en el año 1868, y por Weierstrass en el año 1876; a continuación, para abreviar, lo llamaremos teorema de Sojotski.

E j e m p l o 1. $f(z) = \text{sen}\,\frac{1}{z}$. Aquí, el origen de coordenadas es un punto singular esencial. En efecto, si z tiende a cero, $\text{sen}\,\frac{1}{z}$ no tiende a ningún límite, ni finito ni infinito, lo cual se observa inmediatamente considerando solamente los valores reales de z.

Si $A = \infty$, entonces haciendo, por ejemplo, $z_n = \frac{i}{n}$ y, por consiguiente, $\frac{1}{z_n} = -in$, obtenemos: $\text{sen}\,\frac{1}{z_n} = -i\,\text{sh}\,n \to \infty$ para $n \to \to \infty$.

Supongamos ahora que $A \neq \infty$. Para obtener la sucesión $\{z_n\}$, de la que se trata en el teorema de Sojotski, resolvamos la ecuación.

$$\text{sen}\,\frac{1}{z} = A.$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{z} = \text{Arcsen}\,A = \frac{1}{i}\,\text{Ln}\,(iA + \sqrt{1 - A^2}),$$

de donde

$$z = \frac{i}{\text{Ln}\,(iA + \sqrt{1 - A^2})} = \frac{i}{\ln|iA + \sqrt{1 - A^2}| + 2k\pi i}.$$

Haciendo

$$z_n = \frac{i}{\ln|iA + \sqrt{1 - A^2}| + 2n\pi i}$$

y asignando a n los valores 1, 2, 3, ..., obtenemos una sucesión $\{z_n\}$ que converge hacia cero y satisface a la condición

$$f(z_n) = A \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

E j e m p l o 2. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. En este caso, el origen de coordenadas también es un punto singular esencial, puesto que de nuevo no existe el límite $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$.

Si $A = \infty$, tomamos $z_n = \frac{1}{n}$. Resulta: $f(z_n) = e^n \to \infty$ para $n \to \infty$ es decir, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ satisface a la tesis del teorema de Sojotski para $A = \infty$. Supongamos ahora que $A = 0$. Entonces, haciendo $z_n = -\frac{1}{n}$, tendremos: $f(z_n) = e^{-n}$ para $n \to \infty$, o sea, queda también comprobada la tesis del teorema en este caso. Supongamos, finalmente, que $A \neq 0$, $A \neq \infty$. Aquí es más sencillo elegir

los puntos correspondientes z_n resolviendo la ecuación

$$e^{\frac{1}{z}} = A.$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{z} = \mathrm{Ln}\, A,$$

de donde

$$z = \frac{1}{\mathrm{Ln}\, A} = \frac{1}{\ln |A| + 2k\pi i}.$$

Haciendo

$$z_n = \frac{1}{\ln |A| + 2n\pi i} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

tendremos una sucesión $\{z_n\}$ que converge hacia cero y satisface a la condición $f(z_n) = A$; por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Del teorema de Sojotski se deduce que, si z_0 es un punto singular esencial de la función $f(z)$ y E_δ es el conjunto de valores que toma la función en un entorno arbitrariamente pequeño $|z - z_0| < \delta$ de este punto, entonces la clausura del conjunto E_δ (es decir, E_δ junto con todos los puntos de acumulación de este conjunto) coincide con el plano complejo ampliado.

En efecto, todo punto A del plano complejo es el límite para una sucesión $\{f(z_n)\}$ de puntos pertenecientes a E_δ, y, por consiguiente, A pertenece a la clausura del conjunto E_δ.

En los ejemplos 1 y 2 se vio que, salvo ciertas excepciones ($A = \infty$ en el primer ejemplo, $A = \infty$ y $A = 0$, en el segundo), en lugar de la sucesión de puntos $\{z_n\}$, para la cual se verifica la igualdad límite

$$\lim_{z_n \to z_0} f(z_n) = A,$$

se consiguen hallar tales sucesiones para las cuales se verifican las igualdades exactas:

$$f(z_n) = A, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Resulta que, en el caso general, también tiene lugar una situación análoga. De esto trata la proposición siguiente:

Teorema grande de Picard. *Si z_0 es un punto singular esencial de la función $f(z)$, entonces para todo $A \neq \infty$, a excepción, posiblemente, de un valor $A = A_0$, existe una sucesión infinita de A-puntos de la función $f(z)$ que converge hacia z_0.*

En el ejemplo $f(z) = \operatorname{sen}\frac{1}{z}$ no hay ningún valor excepcional, en el ejemplo $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ éste es igual a 0, puesto que la función $e^{\frac{1}{z}}$ siempre es distinta de cero.

Este teorema lo demostraremos más adelante (cap. octavo). Señalemos aquí que, como fácilmente se comprueba, el teorema de Sojotski está contenido en las tesis del teorema de Picard.

Del último teorema se deduce que el conjunto de los valores que toma la función $f(z)$ en un entorno arbitrario $|z - z_0| < \delta$ de un punto singular esencial z_0, coincide con todo el plano finito $|z| < \infty$, excluyendo del mismo a lo sumo un punto A_0 (A_0 no depende de δ).

El desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno de un punto singular esencial z_0 tiene que tener, indispensablemente, un conjunto infinito de términos de potencias negativas de $z - z_0$ (se sobrentiende que los coeficientes de éstas son distintos de cero). En efecto, si en este desarrollo no hubiese tales términos, entonces el punto z_0 sería regular para $f(z)$, y si solamente hubiese un número finito de ellos, entonces el punto z_0 sería un polo de $f(z)$ (según el teorema de la pág. 421). Recíprocamente: cada vez que el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno de cierto punto z_0 contenga un conjunto infinito de términos con potencias negativas de $z - z_0$, z_0 será un punto singular esencial de la función $f(z)$. En efecto, éste no puede ser ni regular para $f(z)$ (puesto que no tiene que haber términos con potencias negativas), ni polo (puesto que en este caso tendría que haber solamente un número finito de tales términos).

Como ejemplo, consideremos la función $\exp \frac{1}{z^4}$; ésta admite el siguiente desarrollo, convergente para cualquier $z \neq 0$:

$$\exp \frac{1}{z^4} = 1 + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2!\,z^8} + \frac{1}{3!\,z^{12}} + \ldots$$

Evidentemente, puede considerarse que éste es el desarrollo de Laurent de la función en el entorno del punto $z = 0$. Como este desarrollo contiene un conjunto infinito de potencias negativas de z, $z = 0$ es un punto singular esencial de la función. Naturalmente, esto mismo puede demostrarse observando el comportamiento de esta función en un entorno del origen de coordenadas. El lector comprobará fácilmente que ella tiende a ∞, cuando z se aproxima al origen de coordenadas manteniéndose en los ejes coordenados, y a 0, cuando z se aproxima al origen de coordenadas, manteniéndose en las bisectrices de los ángulos coordenados. Por consiguiente, $\lim\limits_{z\to 0} \exp \frac{1}{z^4}$ no existe y $z = 0$ es un punto singular esencial de la función $\exp \frac{1}{z^4}$.

De todo lo expuesto se deduce que, para caracterizar un punto singular, desempeña un papel definitivo el conjunto de los términos de potencias negativas en el desarrollo de Laurent de la

función $f(z)$ en el entorno de este punto. Por esta razón, la serie $\sum_{1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}$ se llama **parte principal del desarrollo de Laurent** $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ en el entorno del punto z_0. La serie $\sum_{0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, que consta de todos los términos del desarrollo cuyas potencias son no negativas, representa una función regular en el punto z_0 y, por lo tanto, se llama **parte regular** de la serie de Laurent.

Aplicando las proposiciones enunciadas debe tenerse en cuenta que en ellas se trata solamente de aquellos desarrollos de Laurent que son convergentes en cierto entorno $0 < |z - z_0| < R$ del punto que se estudia.

Como ejemplo, veamos la serie de Laurent:

$$\ldots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \ldots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \ldots$$

Esta contiene un conjunto infinito de términos con potencias negativas de z. No obstante, antes de afirmar que $z = 0$ es un punto singular esencial para la suma de la serie, hay que aclarar si es convergente o no lo es en algún entorno de este punto. Obsérvese que la serie considerada representa una suma de dos progresiones: $\sum_{1}^{\infty} z^{-n}$ y $\sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$. La primera de éstas es convergente para $|z| > 1$ y representa la función $\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}$; la segunda es convergente para $|z| < 2$ y representa la función $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2-z}$. Por consiguiente, el recinto de convergencia de la serie dada es el anillo $1 < |z| < 2$, el cual, naturalmente, no es un entorno del origen de coordenadas. La suma de la serie en este anillo es igual a $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z} = \frac{1}{z^2-3z+2}$; para esta función el origen de coordenadas es un punto regular y todos los puntos singulares se reducen a dos polos simples: $z = 1$ y $z = 2$.

3.2. Para determinar rápidamente la posición y el carácter de los puntos singulares de una función en casos concretos conviene

tener en cuenta las siguientes proposiciones elementales que se deducen de los teoremas del ap. 3.1.

a) Si $f(z)$ y $\varphi(z) \not\equiv 0$ son dos funciones uniformes y analíticas en un recinto dado G, entonces la función $F(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$ puede tener puntos singulares en el recinto G, precisamente polos, solamente en los ceros de la función $\varphi(z)$. Sea ζ un cero de orden k de la función $\varphi(z)$ $(k \geqslant 1)$ y un cero de orden l de la función $f(z)$ $(l \geqslant 0)$ (si ζ no es un cero de la función $f(z)$, hacemos $l = 0$). Entonces, en un entorno del punto ζ se tiene:

$$F(z) = \frac{\frac{f^{(l)}(\zeta)}{l!}(z-\zeta)^l + \ldots}{\frac{\varphi^{(k)}(\zeta)}{k!}(z-\zeta)^k + \ldots} = (z-\zeta)^{l-k}\,\frac{\frac{f^{(l)}(\zeta)}{l!} + \ldots}{\frac{\varphi^{(k)}(\zeta)}{k!} + \ldots},$$

donde $f^{(l)}(\zeta \neq) \neq 0$ y $\varphi^{(k)}(\zeta) \neq 0$. De esto se deduce que $F(z)$ tiene en el punto ζ un polo de orden $k - l$ si $k > l$, y un punto regular si $k \leqslant l$; además, este último será un cero de la función $F(z)$ de orden $l - k$ si $k < l$.

b) Si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son dos funciones que no tienen en el recinto G otros puntos singulares más que polos, entonces su suma, diferencia, producto y cociente (este último se forma solamente cuando $\varphi(z) \not\equiv 0$) tampoco tienen otros puntos singulares más que polos.

En particular, consideremos la diferencia de estas funciones $f(z) - \varphi(z)$, y sea ζ un punto en cuyo entorno los desarrollos de Laurent de las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ tienen la forma

$$f(z) = \frac{a_{-l}}{(z-\zeta)^l} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-\zeta} + a_0 + a_1(z-\zeta) + \ldots,$$

$$\varphi(z) = \frac{b_{-k}}{(z-\zeta)^k} + \ldots + \frac{b_{-1}}{z-\zeta} + b_0 + b_1(z-\zeta) + \ldots$$

Aquí l y k designan el orden del punto ζ, considerado respectivamente como polo de una u otra función. Para mayor generalidad, supondremos que $l \leqslant 0$ (o bien $k \leqslant 0$) cuando ζ sea un punto regular de $f(z)$ (o bien de $\varphi(z)$), comenzando en este caso el desarrollo con términos de potencias no negativas de $z - \zeta$.

Restando término a término el desarrollo de $\varphi(z)$ del desarrollo de $f(z)$, obtenemos el desarrollo de $f(z) - \varphi(z)$. Evidentemente, el punto ζ será un polo de esta diferencia cuando, y sólo cuando, éste sea un polo de al menos una de las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ ($k \geqslant 1$ o bien $l \geqslant 1$) y no coincidan entre sí las partes principales de los desarrollos de $f(z)$ y $\varphi(z)$. Cuando las partes principales son iguales (es decir, $k = l$, $a_{-k} = b_{-k}$, $\ldots$, $a_{-1} = b_{-1}$), para la diferencia

obtenemos el desarrollo:

$$f(z)-\varphi(z)=a_0-b_0+(a_1-b_1)(z-\zeta)+\ldots,$$

de donde se deduce que ζ es un punto regular para $f(z)-\varphi(z)$.

Consideremos ahora la función

$$F(z)=\frac{f(z)}{\varphi(z)} \qquad (\varphi(z)\not\equiv 0).$$

Esta puede tener puntos singulares solamente en los ceros de la función $\varphi(z)$ o en los polos de la función $f(z)$. Sea ζ un cero o un polo de las funciones $f(z)$ o $\varphi(z)$. En cualquier caso podemos escribir:

$$f(z)=(z-\zeta)^l\,[a_0+a_1(z-\zeta)+\ldots],$$
$$\varphi(z)=(z-\zeta)^k\,[b_0+b_1(z=\zeta)+\ldots],$$

donde l y k son números enteros (positivos, negativos o ceros), y entre corchetes figuran series de potencias que son convergentes en cierto entorno del punto ζ y cuyos términos independientes son diferentes de cero ($a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$). En estas condiciones, $k>0$ corresponde al caso en que $\varphi(z)$ tiene un cero de orden k en el punto ζ, $k=0$ significa que $z=\zeta$ es un punto regular en el cual $\varphi(z)\neq 0$, y, finalmente, $k<0$ significa que $z=\zeta$ es un punto singular de la función $\varphi(z)$, precisamente, es un polo de orden $-k$.

Pongamos los desarrollos de $f(z)$ y $\varphi(z)$ en la fórmula para $F(z)$. Tendremos:

$$F(z)=(z-\zeta)^{l-k}\,\frac{a_0+a_1(z-\zeta)+\ldots}{b_0+b_1(z-\zeta)+\ldots}$$

Evidentemente, para $l\geqslant k$ el punto ζ será regular para $F(z)$ (en particular, para $l>k$ será un cero de orden $l-k$), mientras que para $l<k$ será un polo de la función $F(z)$ de orden $k-l$.

c) Sea $f(z)$ una función uniforme que no tenga en el recinto G otras singularidades más que polos. Entonces la derivada de esta función $f'(z)$ no puede tener tampoco en el recinto G otras singularidades más que polos. Precisando, $f'(z)$ tiene un polo en cada polo de la función $f(z)$, cuyo orden es una unidad mayor que el orden del polo de $f(z)$.

En efecto, sea ζ un polo de la función $f(z)$ de orden $k\geqslant 1$. Entonces, en un entorno U del punto ζ, $0<|z-\zeta|<R$, la función $f(z)$ admite el desarrollo:

$$f(z)=\frac{A_{-k}}{(z-\zeta)^k}+\ldots+\frac{A_{-1}}{z-\zeta}+A_0+A_1(z-\zeta)+\ldots \qquad (A_{-k}\neq 0).$$

Como los términos de este desarrollo son funciones analíticas en U y el desarrollo mismo es uniformemente convergente en el interior

del recinto U (debido a la propiedad de la serie de Laurent), éste puede derivarse término a término en U. Resulta:

$$f'(z) = -\frac{kA_{-k}}{(z-\zeta)^{k+1}} - \ldots - \frac{A_{-1}}{(z-\zeta)^2} + A_1 + \ldots \qquad (kA_{-k} \neq 0).$$

Hemos obtenido para $f'(z)$ el desarrollo de Laurent en un entorno del punto ζ, de donde se ve que ζ es un polo de orden $k+1$ para la derivada $f'(z)$.

d) Sea $f(z) \not\equiv$ const una función uniforme que no tenga en el recinto G otros puntos singulares más que polos, y sea $A \neq \infty$ un número complejo arbitrario. Entonces, la derivada logarítmica de la función $f(z) - A$

$$\frac{d\{\mathrm{Ln}[f(z)-A]\}}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)-A}$$

no tiene en el recinto G otros puntos singulares más que polos; precisando, ésta tiene polos simples en todos los polos de la función $f(z)$ y en todos los A-puntos de esta última (es decir, en todos los ceros de la función $f(z) - A$).

Para comprobar esta proposición, podemos aludir al caso general considerado anteriormente en b). Ya vimos que el cociente de dos funciones puede tener polos en los ceros del denominador o en los polos del numerador. Sea $z = \zeta$ un cero de orden k del denominador, es decir, un A-punto de la función $f(z)$ de orden k. Entonces

$$f(z) - A = a_0(z-\zeta)^k + a_1(z-\zeta)^{k+1} + \ldots \qquad (k \geqslant 1,\ a_0 \neq 0).$$

De aquí se deduce que

$$f'(z) = ka_0(z-\zeta)^{k-1} + a_1(k+1)(z-\zeta)^k + \ldots,$$

es decir, el punto ζ es un cero de orden $k-1$ del numerador de la fracción. De esto se deduce que este punto es un polo simple de la derivada logarítmica.

Por otra parte, sea $z = \zeta$ un polo del numerador $f'(z)$. Esto es posible solamente si ζ es un polo de la función $f(z) - A$; además, como ya se vio en el caso c), el orden de multiplicidad del polo para $f'(z)$ será una unidad mayor que el orden del mismo polo para $f(z) - A$. Por consiguiente, para la derivada logarítmica obtenemos de nuevo un polo simple en el punto ζ.

e) Si ζ es un punto regular o un polo para la función $f(z) \not\equiv 0$, y para la función $\varphi(z)$ ζ es un punto singular esencial, entonces ζ será también un punto singular esencial para cada una de las funciones $\varphi(z) \pm f(z)$, $f(z)\,\varphi(z)$ y $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$.

En efecto, designemos estas últimas funciones mediante $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ y $\psi_3(z)$, respectivamente. Entonces tendremos:

$$\varphi(z) = \psi_1(z) \pm f(z), \quad \varphi(z) = \frac{\psi_2(z)}{f(z)}, \quad \varphi(z) = \psi_3(z) f(z).$$

Si se supone que $\psi_j(z)$ ($j = 1, 2, 3$) tiene un punto regular o un polo para $z = \zeta$, entonces la función $\varphi(z)$ también tendrá un punto regular o un polo para $z = \zeta$, lo cual contradice a la hipótesis. Así, pues, el punto $z = \zeta$ no puede ser regular para las funciones $\psi_j(z)$. Como estas funciones son uniformes y analíticas en cierto entorno del punto ζ, a excepción de este punto, éste tiene que ser un punto singular aislado de carácter uniforme para $\psi_j(z)$. Pero como ya comprobamos, el punto ζ no puede ser un polo para $\psi_j(z)$. Por consiguiente, éste es un punto singular esencial para cada una de estas funciones.

f) Si ζ es un punto singular esencial para la función $\varphi(z)$, entonces la función $\frac{1}{\varphi(z)}$ tendrá en ζ, o bien un punto singular esencial, o bien un punto singular no aislado: un punto de acumulación de polos.

En efecto, hay dos posibilidades: o bien existe un entorno del punto ζ en el cual $\varphi(z)$ no se anula, o bien tal entorno no existe. En el primer caso, la función $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ será analítica en cierto entorno del punto ζ, a excepción del mismo punto ζ. Este punto no puede ser para $\psi(z)$ ni regular ni polo; en caso contrario ζ sería polo o un punto regular para $\varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)}$, en contra de la hipótesis. Por consiguiente, ζ es un punto singular esencial para $\psi(z)$.

En el segundo caso, en cada entorno del punto ζ existen ceros de la función $\varphi(z)$ y, por consiguiente, en el mismo entorno existen polos de la función $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$. De aquí se deduce que cualquier entorno del punto ζ contiene puntos singulares (precisamente, polos) de la función $\psi(z)$. Por lo tanto, ζ es en el caso considerado un punto singular no aislado para $\psi(z)$. Este es un punto de acumulación de polos.

3.3. Consideremos una función uniforme $f(z)$, analítica en todos los puntos del exterior $|z| > r$ de cierto círculo con el centro en el origen de coordenadas, a excepción, posiblemente, del punto del infinito. Realizando la transformación $z = \frac{1}{\zeta}$ reducimos el estudio de tal función al estudio de la función $f^*(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, la cual es analítica en todos los puntos de un entorno del origen de coordenadas, a excepción, posiblemente, del origen de coordenadas. La imagen del punto del infinito $z = \infty$ será el punto $\zeta = 0$, y a cada suce-

sión de puntos $\{z_n\}$, convergente hacia el punto del infinito, corresponderá una sucesión de puntos $\left\{\zeta_n = \frac{1}{z_n}\right\}$ convergente hacia cero, y recíprocamente.

El punto $z = \infty$ se llamará regular, polo de orden k o punto singular esencial, según que el punto $\zeta = 0$ sea regular, polo de orden k o punto singular esencial para $f^*(\zeta)$. Como en los casos indicados $f^*(\zeta)$ admite en un entorno del punto $\zeta = 0$ un desarrollo de Laurent de la forma

$$f^*(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots,$$

$$f^*(\zeta) = a_k\zeta^{-k} + \ldots + a_1\zeta^{-1} + a_0 + a_{-1}\zeta + \ldots, \qquad (a_k \neq 0)$$

$$f^*(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\zeta^{-n}$$

respectivamente, (en el último caso, un conjunto infinito de coeficientes a_n de potencias negativas de ζ es diferente de cero), la función $f(z) = f^*\left(\frac{1}{z}\right)$ admitirá en un entorno del punto del infinito un desarrollo de Laurent de la forma

$$f(z) = a_0 + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \ldots + a_{-n}z^{-n} + \ldots,$$

$$f(z) = a_kz^k + \ldots + a_1z + a_0 + a_{-1}z^{-1} + \ldots, \qquad (a_k \neq 0)$$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_nz^n$$

según que este punto sea regular, polo de orden k o punto singular esencial (en el último caso, un conjunto infinito de coeficientes de potencias positivas de z es diferente de cero).

Por lo tanto, la relación entre el carácter del punto con respecto a la función y el desarrollo correspondiente de Laurent resulta ser aquí igual que en el caso de un punto finito, cambiándose solamente los papeles que desempeñan las potencias positivas y negativas. De acuerdo a esto, la parte principal del desarrollo de Laurent en un entorno del punto del infinito es el conjunto de términos de potencias positivas, mientras que la parte regular es el conjunto de términos de potencias no positivas.

Ya sabemos que se puede distinguir un punto regular, un polo y un punto singular esencial para $\zeta = 0$ sin examinar el desarrollo correspondiente de Laurent, sino averiguando solamente cuál de las tres posibilidades tiene lugar:

1) $f^*(\zeta)$ está acotada en un entorno del origen de coordenadas;

2) el límite de $f^*(\zeta)$, cuando ζ tiende a cero, es infinito;

3) cuando ζ tiende a cero, la función $f^*(\zeta)$ no tiene ningún límite, ni finito, ni infinito.

Del hecho de que $f(z) = f^*(\zeta)$ y $z = \frac{1}{\zeta}$, se deduce que para el punto del infinito son válidos estos mismos criterios, y que la función tendrá en $z = \infty$ un punto regular, un polo o un punto singular esencial según que ella esté acotada en cierto entorno del punto del infinito, tienda al infinito cuando z tiende al infinito, o, finalmente, no tenga ningún límite, ni finito ni infinito, cuando z tiende al infinito.

Consideremos una función entera $f(z)$. Esta, en virtud de su definición, es uniforme y analítica en todos los puntos finitos del plano y admite un desarrollo que es convergente en todos los puntos:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Como éste es convergente en cualquier entorno del punto del infinito, se le puede considerar como el desarrollo de Laurent de la función en un entorno del punto del infinito. De aquí sacamos la conclusión que:

a) una función entera es regular en el punto del infinito cuando, y sólo cuando, ella es idénticamente igual a una constante:

$$f(z) \equiv a_0;$$

b) una función entera tiene un polo de orden $k \geqslant 1$ en el punto del infinito cuando, y sólo cuando, ella es un polinomio de grado k:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k, \qquad a_k \neq 0;$$

c) una función trascendente entera puede definirse como una función entera con un punto singular esencial en el punto del infinito. Por consiguiente, para una función trascendente entera no existe el límite: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$ (ni finito ni infinito).

3.4. En este párrafo nos ocuparemos del cálculo de las integrales de las funciones uniformes analíticas sobre curvas cerradas, suponiendo que en un recinto que contiene al circuito de integración no haya otros puntos singulares más que puntos singulares aislados de carácter uniforme. Estando planteado el problema de esta manera, la curva podrá contener en su interior solamente una cantidad finita de puntos singulares (en caso contrario, los puntos singulares tendrían al menos un punto de acumulación, que sería también un punto singular de la función, pero no aislado). Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ situados en el interior de la curva cerrada rectificable Γ. Describamos alrededor de cada uno de los puntos z_k una circunferencia γ_k: $|z - z_k| = \rho_k$ de un radio ρ_k tan pequeño que ésta quede situada en el interior de Γ y que cada una de ellas esté situada en el exterior de todas las demás.

Entonces, en virtud del teorema integral para un sistema de circuitos, tendremos:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

Por lo tanto, el problema se reduce al cálculo de la integral $\int_{\gamma_k} f(z)\,dz$ sobre la circunferencia $|z - z_h| = \rho_k$, situada en un entorno del punto singular aislado z_h de la función $f(z)$.

Sustituyendo $f(z)$ por su desarrollo de Laurent en un entorno del punto z_h e integrando término a término (lo cual es posible debido a la convergencia uniforme de la serie de Laurent sobre γ_k), hallamos:

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \int_{\gamma_h} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(h)} (z - z_k)^m\,dz = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(k)} \int_{\gamma_h} (z - z_h)^m\,dz = a_{-1}^{(k)} 2\pi i.$$

En efecto, de todas las integrales $\int_{\gamma_k} (z - z_h)^m\,dz$. es distinta de cero solamente una, la que corresponde al valor $m = -1$, y ésta es igual a $2\pi i$.

En resumen,

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\,(a_{-1}^{(1)} + a_{-1}^{(2)} + \ldots + a_{-1}^{(n)}). \qquad (3.4:1)$$

La fórmula (3.4:1) resuelve por completo el problema planteado. Vemos, pues, que en nuestras condiciones, el valor de la integral de una función analítica depende solamente de los coeficientes de las potencias de exponente igual a menos uno en los desarrollos de Laurent de la función en los entornos de los puntos singulares. Estos coeficientes se llaman r e s i d u o s d e l a f u n c i ó n.

Por lo tanto, se llama r e s i d u o de la función $f(z)$, respecto de un punto singular aislado a de carácter uniforme, al coeficiente de $(z - a)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de la función en un entorno del punto a *).

---

*) El concepto de residuo pertenece a Cauchy. El mismo señaló también numerosas aplicaciones de este concepto a diversos problemas del análisis. Por lo visto, la denominación r e s i d u o (*résidu*) es debida a que Cauchy llegó a este concepto buscando la d i f e r e n c i a entre las integrales tomadas sobre dos caminos (con orígenes y extremos comunes), entre los cuales están comprendidos los polos de la función. De esta forma se pueden encontrar todavía los residuos en la «Memoria sobre las integrales definidas» (1814). El mismo vocablo «residuo» aparece por primera vez en el artículo «Sobre un género de

La fórmula (3.4:1) expresa el siguiente teorema:

Teorema de los residuos. *La integral de una función $f(z)$, tomada sobre un circuito cerrado Γ, contenido en un recinto donde la función es uniforme y analítica, a excepción de puntos singulares aislados de carácter uniforme, y que no pase por los puntos singulares, es igual al producto de la suma de los residuos de la función respecto de todos los puntos singulares comprendidos en el interior de Γ, por $2\pi i$.*

Para aplicar este teorema hay que saber calcular los residuos. Estos últimos se hallan sin dificultad alguna cuando el punto singular de la función es un polo. Supongamos primero que a es un polo simple de la función. Entonces, en cierto entorno del punto a el desarrollo de la función es de la forma:

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\ldots,$$

de donde

$$f(z)(z-a)=a_{-1}+a_0(z-a)+a_1(z-a)^2+\ldots$$

y, por consiguiente,

$$a_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}[f(z)(z-a)]. \tag{3.4:2}$$

El cálculo del residuo se simplifica más, si $f(z)$ tiene la forma

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

donde $\varphi(a)\neq 0$, y $\psi(z)$ tiene un cero simple para $z=a$ (es decir, si $\psi(a)=0$ y $\psi'(a)\neq 0$). Entonces $z=a$ es un polo simple de la función $f(z)$, y según la fórmula (3.4:2) obtenemos

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)(z-a)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{3.4:3}$$

cálculo, análogo al cálculo de infinitesimales», incluido en el primer tomo de «Exercices de mathématique» de Cauchy (1826). He aquí cómo introduce Cauchy este concepto: «Si, después de haber hallado los valores de x que hacen infinita a la función $f(x)$, se agrega a uno de estos valores, designado mediante x_1 una cantidad infinitésima ε, y luego se desarrolla $f(x_1+\varepsilon)$ según las potencias crecientes de esta misma cantidad, los primeros términos del desarrollo contendrán potencias negativas de ε y uno de ellos será el producto de $\frac{1}{\varepsilon}$ por un coeficiente finito, al cual llamaremos residuo de la función $f(x)$, respecto del valor particular x_1 de la variable x». Después de este artículo, Cauchy publica muchos otros, incluidos en el primer tomo y en los tres siguientes tomos de «Exercices» (1826-1829), en los cuales consideraba las aplicaciones de la teoría de los residuos al cálculo de integrales, al desarrollo de las funciones en productos infinitos, a la teoría de las ecuaciones, etc.

Si a es un polo de orden k ($k > 1$), en un entorno del punto a tendremos el desarrollo:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots,$$

de donde

$$f(z)(z-a)^k = a_{-k} + a_{-k+1}(z-a) + \ldots + a_{-1}(z-a)^{k-1} + \ldots$$

Derivando término a término $k-1$ veces, resulta:

$$\frac{d^{k-1}[f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}} = (k-1)!\,a_{-1} + k(k-1)\ldots 2a_0(z-a) + \ldots$$

y, finalmente, para $z \to a$:

$$(k-1)!\,a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}[f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}}$$

o bien

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}[f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}}. \qquad (3.4{:}4)$$

Fácilmente se comprueba que esta fórmula conserva su valor también cuando el orden de multiplicidad del polo es menor que k.

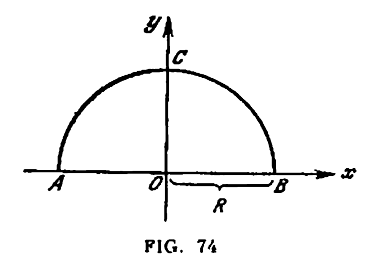


FIG. 74

Ejemplo 1. Calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x), dx$, donde $F(x)$ es una función racional: $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, que no tiene polos en el eje real y tal, que el grado del denominador $Q(x)$ es al menos dos unidades mayor que el grado del numerador $P(x)$.

Consideremos el circuito de integración representado en la fig. 74, donde BCA es una semicircunferencia de radio R con el centro en el origen de coordenadas. Tomemos el radio R tan grande, de modo que todos los polos de la función $F(z)$ situados en el semi-

plano superior queden comprendidos en el interior de dicho circuito. Entonces tendremos:

$$\int_{-R}^{+R} F(x)\,dx + \int_{BCA} F(z)\,dz = 2\pi i \Sigma \operatorname{Res} F(z),$$

donde la suma se extiende a todos los polos de la función $F(z)$ pertenecientes al semiplano superior.

Como

$$|F(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{a_m z^m + \ldots + a_0}{b_n z^n + \ldots + b_0}\right| = \left|\frac{a_m}{b_n z^{n-m}}\right| \left|\frac{1 + \ldots + \frac{a_0}{a_m z^m}}{1 + \ldots + \frac{b_0}{b_n z^n}}\right|$$

y $n - m \geqslant 2$, para valores de $|z| = R$ suficientemente grandes, tendremos:

$$|F(z)| < \frac{2\,|a_m|}{|b_n|\,R^2} = \frac{C}{R^2}.$$

Por esta razón,

$$\left|\int_{BCA} F(z)\,dz\right| < \frac{C}{R^2}\pi R = \frac{\pi C}{R} \to 0 \text{ cuando } R \to \infty.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{+R} F(x)\,dx = 2\pi i \Sigma \operatorname{Res} F(z).$$

En resumen, la integral de una función racional, sin polos en el eje real y que posea en el punto del infinito un cero al menos de segundo orden (esto es equivalente a la condición $n - m \geqslant 2$), es igual al producto de $2\pi i$ por la suma de los residuos de la función $F(z)$ respecto de los polos situados en el semiplano superior.

Supongamos, en particular, que

$$F(z) = \frac{z^{2p} - z^{2q}}{1 - z^{2r}},$$

donde p, q y r son números enteros no negativos, siendo $p < r$ y $q < r$.

Aquí el grado del denominador $2r$ es superior al grado del numerador al menos en dos unidades. Todos los polos de la función $F(z)$ están comprendidos en la fórmula

$$z = e^{\frac{k\pi i}{r}} \qquad (k = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, 2r-1)$$

(los puntos ± 1 no son polos de la función $F(z)$, puesto que el numerador y denominador de la fracción tienen un factor común $1 - z^2$; si $p - q$ y r no son primos entre sí, entonces algunos de los puntos indicados tampoco serán polos de $F(z)$). Entre ellos, en el semiplano superior están situados los polos

$$z = e^{\frac{k\pi i}{r}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Todos ellos son simples y, por consiguiente,

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{k\pi i}{r}}} F(z) = \frac{e^{\frac{k\pi i}{r}2p} - e^{\frac{k\pi i}{r}2q}}{-2re^{\frac{k\pi i}{r}(2r-1)}} = \frac{1}{2r}\left[e^{(2q+1)\frac{k\pi i}{r}} - e^{(2p+1)\frac{k\pi i}{r}}\right].$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p} - x^{2q}}{1 - x^{2r}}\, dx = \frac{\pi i}{r} \sum_{1}^{r-1} \left[e^{(2q+1)\frac{k\pi i}{r}} - e^{(2p+1)\frac{k\pi i}{r}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{r}\left[i\,\frac{1+e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}}}{1-e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}}} - i\,\frac{1+e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}}}{1-e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{r}\left(\operatorname{cotg}\frac{2p+1}{2r}\pi - \operatorname{cotg}\frac{2q+1}{2r}\pi\right).$$

Observando que la función subintegral es par, obtenemos:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2p} - x^{2q}}{1 - x^{2r}}\, dx = \frac{\pi}{2r}\left(\operatorname{cotg}\frac{2p+1}{2r}\pi - \operatorname{cotg}\frac{2q+1}{2r}\pi\right).$$

Si $r = 2n$ y $q = p + n$ $(p < n)$, la última fórmula toma la forma

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{1 + x^{2n}}\, dx = \frac{\pi}{2n \operatorname{sen} \frac{2p+1}{2n}\pi}.$$

Ejemplo 2. Sea $\Phi(z)$ una función analítica, a excepción de un número finito de polos, en un recinto que contenga al semiplano superior cerrado (excluyendo el punto del infinito). Si ella no tiene polos en el eje real y tiende a cero cuando z tiende a ∞ en el semiplano superior, entonces para cualquier $\mu > 0$ es válida la fórmula

$$\int_{0}^{\infty} \left[e^{\mu i x}\Phi(x) + e^{-\mu i x}\Phi(-x)\right] dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left[e^{\mu i z}\Phi(z)\right],$$

donde la suma se extiende a todos los polos de la función $\Phi(z)$ situados en el semiplano superior.

Tomando el mismo circuito de integración que en el ejemplo 1, obtenemos:

$$\int_{-R}^{R} e^{\mu ix}\Phi(x)\,dx + \int_{BCA} e^{\mu iz}\Phi(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\,[e^{\mu iz}\Phi(z)].$$

Elijamos el radio R tan grande, de modo que todos los polos de la función $e^{\mu iz}\Phi(z)$, pertenecientes al semiplano superior (éstos coinciden con los polos de la función $\Phi(z)$), estén situados en el interior del circuito de integración.

Demostremos que en estas condiciones

$$\lim_{R\to\infty} \int_{BCA} e^{\mu iz}\Phi(z)\,dz = 0.$$

En efecto,

$$|J_R| = \left|\int_{BCA} e^{\mu iz}\Phi(z)\,dz\right| =$$

$$= \left|\int_0^{\pi} \exp(\mu iR\cos\varphi - \mu R \operatorname{sen}\varphi)\,\Phi(Re^{i\varphi})\,iRe^{i\varphi}\,d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} e^{-\mu R\operatorname{sen}\varphi}\,|\Phi(Re^{i\varphi})|\,R\,d\varphi.$$

Según la condición, $\max\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi} |\Phi(Re^{i\varphi})| = \varepsilon(R) \to 0$ para $R\to\infty$. Por lo tanto,

$$|J_R| < \varepsilon(R)\int_0^{\pi} Re^{-\mu R\operatorname{sen}\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\varepsilon(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\mu R\operatorname{sen}\varphi}\,d\varphi < 2\varepsilon(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\frac{2}{\pi}\mu R\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi\varepsilon(R)}{\mu}(1 - e^{-\mu R}) < \frac{\pi\varepsilon(R)}{\mu} \to 0 \text{ cuando } R\to\infty.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} e^{\mu ix}\Phi(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} [e^{\mu ix}\Phi(x) + e^{-\mu ix}\Phi(-x)]\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} [e^{\mu ix}\Phi(x) + e^{-\mu ix}\Phi(-x)]\,dx = 2\pi i\sum \operatorname{Res}\,[e^{\mu iz}\Phi(z)].$$

Este es el resultado que se pedía. Si $\Phi(z)$ es una función par, la fórmula toma la forma

$$\int_0^\infty \cos \mu x \Phi(x)\, dx = \pi i \sum \operatorname{Res}\, [e^{\mu i z}\Phi(z)].$$

Si $\Phi(z)$ es una función impar, resulta la fórmula:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} \mu x \Phi(x)\, dx = \pi \sum \operatorname{Res}\, [e^{\mu i z}\Phi(z)].$$

Por ejemplo,

$$\int_0^\infty \frac{\cos \mu x}{a^2+x^2}\, dx = \pi i \operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{e^{\mu i z}}{a^2+z^2} = \frac{\pi e^{-\mu a}}{2a},$$

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} \mu x}{a^2+x^2}\, dx = \pi \operatorname*{Res}_{z=ai} \frac{z e^{\mu i z}}{a^2+z^2} = \frac{\pi e^{-\mu a}}{2}.$$

3.5. Como una de las aplicaciones importantes de la teoría de los residuos, hallemos el valor de la integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)-A}\, dz$, donde $f(z)$ es una función uniforme en un recinto G, la cual no tiene puntos singulares en el mismo, a excepción, posiblemente, de polos; A es un número complejo arbitrario, $\varphi(z)$ es una función uniforme y analítica en el mismo recinto y Γ es una curva cerrada rectificable de Jordan, perteneciente al recinto G junto con la parte encerrada por la misma, la cual no pasa por ningún polo ni por los A-puntos de la función $f(z)$.

Los únicos puntos singulares que puede tener la función $F(z) = \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}$ en el recinto G son polos, originados por los A-puntos o por los polos de la función $f(z)$. Sean $a_1, \ldots, a_m$ los A-puntos de la función $f(z)$ situados en el interior de Γ, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, los órdenes de multiplicidad de estos A-puntos; sean $b_1, \ldots, b_n$ los polos de la función $f(z)$ situados en el interior de Γ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$, los órdenes de estos polos. En los entornos de los puntos a_j las funciones $\varphi(z)$ y $f(z)$ admiten los siguientes desarrollos:

$$\varphi(z) = \varphi(a_j) + \ldots,$$

$$f(z) - A = c_{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j} + \ldots$$

Por consiguiente, $f'(z) = c_{\alpha_j}\alpha_j(z-a_j)^{\alpha_j-1}+\ldots$ y

$$F(z) = [\varphi(a_j)+\ldots]\frac{c_{\alpha_j}\alpha_j(z-a_j)^{\alpha_j-1}+\ldots}{c_{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}+\ldots} =$$

$$= \frac{\alpha_j}{z-a_j}[\varphi(a_j)+\ldots]\frac{1+\ldots}{1+\ldots} = \frac{\alpha_j}{z-a_j}[\varphi(a_j)+\ldots] =$$

$$= \frac{\alpha_j\varphi(a_j)}{z-a_j}+\ldots$$

Los términos no escritos contienen potencias superiores de $z - a_j$. En particular, después del término que contiene $(z - a_j)^{-1}$ tiene que figurar el término independiente del desarrollo de Laurent, después, el término que contiene $z - a_j$, etc. De aquí se deduce que $z = a_j$ es un polo simple de la función $F(z)$, cuyo residuo es igual a $\alpha_j\varphi(a_j)$. Este residuo puede ser igual a cero, si $\varphi(a_j) = 0$; en este caso, en la realidad, el punto a_j no es un polo de la función $F(z)$.

Consideremos ahora algún polo b_j de la función $f(z)$. En un entorno del mismo se tienen los desarrollos:

$$\varphi(z) = \varphi(b_j)+\ldots,$$

$$f(z) - A = d_{-\beta_j}(z-b_j)^{-\beta_j}+\ldots,$$

$$f'(z) = -\beta_j d_{-\beta_j}(z-b_j)^{-\beta_j-1}-\ldots,$$

de donde

$$F(z) = [\varphi(b_j)+\ldots]\frac{-\beta_j d_{-\beta_j}(z-b_j)^{-\beta_j-1}-\ldots}{d_{-\beta_j}(z-b_j)^{-\beta_j}+\ldots} =$$

$$= \frac{-\beta_j}{z-b_j}[\varphi(b_j)+\ldots]\frac{1+\ldots}{1+\ldots} =$$

$$= -\frac{\beta_j}{z-b_j}[\varphi(b_j)+\ldots] = -\frac{\beta_j\varphi(b_j)}{z-b_j}-\ldots$$

Por consiguiente, $F(z)$ tiene un polo simple en el punto $z = b_j$, cuyo residuo es igual a $-\beta_j\varphi(b_j)$ (éste es igual a cero, si $\varphi(b_j) = 0$).

Aplicando el teorema de los residuos a la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz,$$

obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(z)\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-A} = \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi(a_j) - \sum_{j=1}^{n}\beta_j\varphi(b_j). \qquad (3.5:1)$$

La primera suma del segundo miembro representa la suma de los valores que toma la función $\varphi(z)$ en los A-puntos de la función $f(z)$, donde cada uno de ellos se repite tantas veces cual sea el orden de multiplicidad del A-punto correspondiente. Si se considera que entre todos los A-puntos situados en el interior de Γ, cada uno de ellos se escribe una cantidad de veces igual a su orden de multiplicidad, entonces la suma $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi(a_j)$ se puede llamar simplemente suma de los valores que toma la función $\varphi(z)$ en los A-puntos de la función $f(z)$. Una observación análoga subsiste también para la segunda suma, donde la sumación se extiende a los polos de la función $f(z)$. Definitivamente, llegamos al siguiente enunciado:

La integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz$ *es igual a la diferencia entre la suma de los valores que toma la función* $\varphi(z)$ *en los* A*-puntos de la función* $f(z)$*, situados en el interior de* Γ*, y la suma de los valores que toma la misma función* $\varphi(z)$ *en los polos de la función* $f(z)$*, situados en el interior de* Γ.

Señalemos unos casos particulares de esta proposición:

a) $\varphi(z) = z$. En este caso obtenemos la fórmula:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j a_j - \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j, \tag{3.5:2}$$

es decir, la integral resulta ser igual a la diferencia entre la suma de los A-puntos de la función $f(z)$, situados en el interior de Γ, y la suma de los polos de esta función, situados en el interior de Γ.

b) $\varphi(z) = 1$. En este caso obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-A}dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum_{j=1}^{n} \beta_j, \tag{3.5:3}$$

es decir, la integral resulta ser igual a la diferencia entre el número de A-puntos de la función $f(z)$, situados en el interior de Γ, y el número de sus polos, situados en el interior de Γ.

Si $A = 0$, entonces los A-puntos serán ceros de la función $f(z)$. Designando con N la cantidad de ellos que hay en el interior de Γ y con P, el número de polos que tiene la función $f(z)$ en el interior de Γ, hallamos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P. \tag{3.5:4}$$

La integral que figura en el primer miembro se llama residuo logarítmico de la función $f(z)$ respecto del circuito Γ (obsér-

vese que bajo el signo integral figura la derivada logarítmica de la función $f(z)$). Resumiendo, llegamos al siguiente teorema:

La diferencia entre la cantidad de ceros y polos que tiene la función $f(z)$ *en el interior del circuito* Γ (en ambas cantidades se tienen en cuenta los órdenes de multiplicidad de los ceros y polos) *es igual al residuo logarítmico de la función respecto de este circuito.*

El residuo logarítmico tiene un significado sencillo. Para revelarlo, escribamos la integral en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d}{dz}\{\mathrm{Ln}\,[f(z)]\}\,dz.$$

Señalemos en la curva Γ un punto arbitrario z_0, al cual consideraremos punto inicial y final del camino de integración. Al recorrer el punto z la curva Γ en la dirección positiva, la función $\mathrm{Ln}\,f(z)$ variará continuamente, y después del recorrido de toda la curva su valor en el punto z_0 se diferenciará generalmente del valor inicial en el mismo punto. Pero, para un mismo valor de $f(z_0)$, los valores $\mathrm{Ln}\,f(z_0)$ podrán diferenciarse solamente por ser distintos los valores que se asignan a $\mathrm{Arg}\,f(z_0)$ antes y después del recorrido. Designando con Φ_0 el valor inicial de $\mathrm{Arg}\,f(z_0)$ y con Φ_1 el valor de $\mathrm{Arg}\,f(z_0)$ después del recorrido, hallamos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\{[\ln|f(z_0)|+i\Phi_1]-$$
$$-[\ln|f(z_0)|+i\Phi_0]\}=\frac{\Phi_1-\Phi_0}{2\pi}.$$

Por consiguiente, según la fórmula (3.5:4),

$$N-P=\frac{\Phi_1-\Phi_0}{2\pi}. \qquad (3.5:5)$$

Esta relación expresa el denominado principio del argumento.

La diferencia entre la cantidad de ceros y polos de la función $f(z)$, *comprendidos en el interior de una curva cerrada* Γ, *es igual a la variación del* $\mathrm{Arg}\,f(z)$ *al recorrer el punto* z *el circuito* Γ *en dirección positiva, dividida por* 2π.

Señalemos también la interpretación geométrica de la proposición obtenida. Al recorrer el punto z la curva cerrada Γ en dirección positiva, el extremo del vector $w=f(z)$ describirá una curva cerrada Γ'. Designemos con ν la cantidad de vueltas completas que da el vector w en torno del origen de coordenadas en el recorrido indicado. Convengamos en contar cada vuelta con $+1$, si se efectúa en dirección positiva, y con -1, si se efectúa en dirección negativa. Entonces, para la variación de $\mathrm{Arg}\,f(z)$ obtenemos la magnitud $2\pi\nu$, de donde se deduce el siguiente enunciado del principio del argumento:

La diferencia entre el número de ceros y polos de una función uniforme $f(z)$, comprendidos en el interior de una curva cerrada Γ, es igual al número de vueltas completas v que da en torno del origen de coordenadas el vector que representa $f(z)$, mientras el punto z describe el circuito Γ en la dirección positiva.

En el caso particular en que $f(z)$ no tenga polos en el interior de Γ, obtenemos:

el número de ceros de la función $f(z)$, comprendidos en el interior de la curva cerrada Γ, es igual al número de vueltas completas que da el vector $f(z)$ en torno del origen de coordenadas al recorrer una vez el punto z el circuito Γ en la dirección positiva.

Del principio del argumento se desprende el siguiente teorema:

Teorema de Rouché. *Si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son dos funciones uniformes y analíticas en los puntos de una curva cerrada rectificable Γ y en el interior de la misma, y si en los puntos de esta curva se cumple la condición $|f(z)| > |\varphi(z)|$, entonces en el interior de Γ la suma $f(z) + \varphi(z)$ posee tantos ceros cuantos tiene la función $f(z)$.*

Demostración. Para averiguar el número de ceros de la función $f(z) + \varphi(z)$ aplicaremos el principio del argumento. Escribiendo $f(z) + \varphi(z)$ para los puntos de la curva Γ en la forma

$$f(z) + \varphi(z) = f(z)\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$$

($|f(z)|$ es mayor que $|\varphi(z)|$ en los puntos de la curva Γ y, por consiguiente, no se anula), hallamos:

$$\operatorname{Arg}[f(z) + \varphi(z)] = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg}\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right].$$

Pero $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$; por lo tanto, el extremo del vector que representa $1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ describe una curva cerrada comprendida enteramente en el interior del círculo de radio 1 con el centro en el punto 1. Por consiguiente, el vector correspondiente no da ninguna vuelta alrededor del origen de coordenadas, y la variación del $\operatorname{Arg}\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$ al recorrer el punto z la curva Γ es igual a cero. Así, pues, la variación del $\operatorname{Arg}[f(z) + \varphi(z)]$ en el recorrido indicado coincide con la variación del $\operatorname{Arg} f(z)$ en el mismo recorrido, de donde, según el principio del argumento, se deduce la igualdad de los números de ceros de las funciones $f(z) + \varphi(z)$ y $f(z)$.

La proposición que sigue es una aplicación útil de este teorema:

Teorema de Hurwitz. *Si $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de funciones analíticas en un recinto G, uniformemente convergente en el*

interior de este recinto hacia una función $f(z) \not\equiv 0$, entonces, para cualquier curva cerrada rectificable γ, perteneciente a G junto con su parte interior y que no pasa por los ceros de la función $f(z)$, se puede señalar un número $\nu = \nu(\gamma)$ tal, que para $n > \nu(\gamma)$ cada una de las funciones $f_n(z)$ tendrá en el interior de γ un mismo número de ceros, igual al número de ceros de la función $f(z)$ situados en el interior de esta curva.

Demostración. Designemos con μ el mínimo de $|f(z)|$ en los puntos de la curva γ: en virtud de la condición, $\mu > 0$. Por consiguiente, debido a la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en γ, se puede señalar un $\nu(\gamma)$ tal, que para $n > \nu(\gamma)$ en todos los puntos de la curva γ se cumple la desigualdad

$$|f_n(z) - f(z)| < \mu \leqslant |f(z)|.$$

Pero de aquí, según el teorema de Rouché, se deduce que las funciones $f(z)$ y $f(z) + [f_n(z) - f(z)] = f_n(z)$ $(n > \nu(\gamma))$ tienen un mismo número de ceros en el interior de γ, con lo cual se termina la demostración.

Ejemplo 1. Hallar el número de raíces de la ecuación $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$, cuyos módulos son menores que 1.

Apliquemos el teorema de Rouché.

Para esto, representemos $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ en la forma $f(z) + \varphi(z)$, donde $f(z) = -4z^5$ y $\varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$. Como para $|z| = 1$

$$|\varphi(z)| = |z^8 + z - 1| \leqslant |z^8| + |z^2| + 1 = 3$$

y

$$|f(z)| = |4z^5| = 4,$$

se tiene

$$|\varphi(z)| < |f(z)|.$$

Por consiguiente, según el teorema de Rouché, la función $f(z) + \varphi(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ tiene en el interior de la circunferencia $|z| = 1$ tantos ceros cuantos tiene la función $f(z) = -4z^5$. Pero esta última tiene un cero de quinto orden en el origen de coordenadas y, por consiguiente, el número de ceros que tiene en el círculo unidad es igual a 5. Por esta razón, la ecuación $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ tiene cinco raíces en el interior del círculo unidad, es decir, tiene cinco raíces cuyos módulos son menores que la unidad.

Ejemplo 2. Demostrar que la ecuación

$$a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + \ldots + a_n \cos n\vartheta = 0,$$

donde $0 < a_0 < a_1 \ldots < a_n$, tiene $2n$ raíces distintas en el intervalo $0 < \vartheta < 2\pi$. Además, la ecuación dada no tiene raíces imaginarias.

Demostremos primero que todos los ceros del polinomio

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

están situados en el interior del círculo unidad. Evidentemente, este polinomio no tiene raíces reales positivas. Si z no es un número positivo, se tiene:

$$|p(z)(z-1)| = |a_n z^{n+1} - [a_0 + (a_1 - a_0) z + \ldots + (a_n - a_{n-1}) z^n]| \geqslant$$
$$\geqslant |a_n z^{n+1}| - |a_0 + (a_1 - a_0) z + \ldots + (a_n - a_{n-1}) z^n| >$$
$$> a_n |z|^{n+1} - [a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \ldots + (a_n - a_{n-1})|z|^n].$$

En efecto, como los números $a_0, a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_{n-1}$ son positivos y el número z no es positivo, los vectores a_0, $(a_1 - a_0) z$, ..., $(a_n - a_{n-1}) z^n$ no pueden llevar una misma dirección y, por consiguiente,

$$|a_0 + (a_1 - a_0) z + \ldots + (a_n - a_{n-1}) z^n| < a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \ldots$$
$$\ldots + (a_n - a_{n-1})|z|^n.$$

Si, además, $|z| \geqslant 1$, entonces

$$a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \ldots + (a_n - a_{n-1})|z|^n \leqslant$$
$$\leqslant a_0 |z|^{n+1} + (a_1 - a_0)|z|^{n+1} + \ldots + (a_n - a_{n-1})|z|^{n+1} =$$
$$= [a_0 + (a_1 - a_0) + \ldots + (a_n - a_{n-1})]|z|^{n+1} = a_n |z|^{n+1}.$$

Así, pues, para $|z| \geqslant 1$ y z no positivo, se tiene:

$$|p(z)(z-1)| > a_n |z|^{n+1} - a_n |z|^{n+1} = 0, \quad \text{o sea} \quad p(z)(z-1) \neq 0.$$

Pero de aquí se deduce que para z no positivo y en valor absoluto no menor que 1, $p(z) \neq 0$. Esto último es cierto también para z positivo y, por consiguiente, $p(z)$ no tiene ceros fuera del círculo unidad ni tampoco en su circunferencia. Por esta razón, todos los n ceros del polinomio $p(z)$ están situados estrictamente *en el interior* del círculo unidad.

Supongamos ahora que el punto z describe la circunferencia $|z| = 1$ en la dirección positiva. Entonces el vector que representa $p(z)$, según el principio del argumento, tiene que dar en torno del origen de coordenadas un número de vueltas igual al número de ceros del polinomio $p(z)$, es decir, n. Como en cada vuelta la curva que describe el extremo del vector se corta con el eje imaginario al menos dos veces (una vez por encima y otra por debajo), tendremos al menos $2n$ intersecciones de éstas. Cada una de ellas corresponde a una posición determinada del punto z en la circunferencia $|z| = 1$, es decir, a un valor determinado del argumento ϑ, el cual varía en el intervalo $(0, 2\pi)$ al dar una vuelta.

Por consiguiento, tenemos al menos $2n$ valores distintos del argumento ϑ en el intervalo $0 < \vartheta < 2\pi$, para los cuales el punto que representa $p(z) = p(e^{i\vartheta})$ se sitúa en el eje imaginario. Para cada uno de estos valores de ϑ

$$\operatorname{Re}[p(e^{i\vartheta})] = \operatorname{Re}(a_0 + a_1 e^{i\vartheta} + \ldots + a_n e^{in\vartheta}) =$$
$$= \operatorname{Re}[a_0 + a_1(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) + \ldots + a_n(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)] =$$
$$= a_0 + a_1 \cos\vartheta + \ldots + a_n \cos n\vartheta$$

se anula; por consiguiente, queda demostrada la existencia de al menos $2n$ raíces de la ecuación

$$a_0 + a_1 \cos\vartheta + \ldots a_n \cos n\vartheta = 0$$

en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Demostremos que el número de todas las raíces situadas en este intervalo es exactamente igual a $2n$. Con este fin, hagamos $e^{i\vartheta} = \zeta$; entonces, tendremos:

$$\cos k\vartheta = \frac{e^{ik\vartheta} + e^{-ik\vartheta}}{2} = \frac{\zeta^k + \zeta^{-k}}{2},$$

y, por consiguiente,

$$a_0 + a_1 \cos\vartheta + \ldots + a_n \cos n\vartheta =$$
$$= \frac{1}{2}\zeta^{-n}(a_n + a_{n-1}\zeta + \ldots + a_1\zeta^{n-1} + 2a_0\zeta^n + a_1\zeta^{n+1} + \ldots a_n\zeta^{2n}).$$

Si $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2n}$ son los ceros del polinomio que figura en el segundo miembro, entonces todos los ceros del polinomio trigonométrico que figura en el primer miembro satisfacen a la condición

$$e^{i\vartheta_j} = \zeta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n).$$

De aquí se deduce, ante todo, que la cantidad de ceros reales distintos del polinomio trigonométrico considerado en el intervalo $(0, 2\pi)$ no es superior a $2n$. Como ya se había demostrado que existen no menos de $2n$ ceros reales distintos de este polinomio en el intervalo $(0, 2\pi)$, el número total de ellos es igual a $2n$. Obsérvese que los módulos de los números $\zeta_j = e^{i\vartheta_j}$ son todos iguales a 1; por lo tanto, entre los ceros del polinomio trigonométrico dado no puede haber ninguno imaginario.

E j e m p l o 3. Sea $\varphi(t)$ una función de variable real, positiva, continua y creciente en el segmento $[0, 1]$. Consideremos la integral

$$\int_0^1 \varphi(t) \cos zt \, dt.$$

Basándose en la observación hecha en el ap. 1.2 (pág. 388), a ésta se la puede considerar en cualquier recinto acotado del plano como

el límite de una sucesión de sumas integrales:

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\cos\frac{k}{n}z.$$

uniformemente convergentes en este recinto *).

Por consiguiente, esta integral representa una función $f(z)$, analítica en cualquier recinto del plano, o sea, es una función entera. Evidentemente, $f(z)\not\equiv 0$ (por ejemplo, $f(0)=\int_0^1\varphi(t)\,dt>0$) Por lo tanto, a la sucesión $\{f_n(z)\}$ y a la función $f(z)$ se les puede aplicar el teorema de Hurwitz. Si z_0 es algún cero de la función $f(z)$, entonces en cualquier entorno fijado del punto z_0 todas las funciones $f_n(z)$, comenzando desde una de ellas, tienen que tener tantos ceros cuantos tiene $f(z)$, es decir, al menos un cero. Pero las funciones $f_n(z)$ son polinomios trigonométricos que satisfacen a las condiciones del ejemplo 2 $\left((\text{en este caso } 0<a_k=\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)<a_{k+1}=\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right.$ y $\left.\vartheta=\frac{z}{n}\right)$. Por esta razón, las funciones $f_n(z)$ no tienen ceros imaginarios. Por consiguiente, la función entera $f(z)=$ $=\int_0^1\varphi(t)\cos zt\,dt$ tampoco tiene ceros imaginarios: todos sus ceros son números reales.

3.6. Si $f(z)$ es una función uniforme y analítica en cierto entorno $|z|>R$ del punto del infinito (a excepción, posiblemente, de este mismo punto), entonces en este entorno es válido el desarrollo:

$$f(z)=\ldots+A_{-m}z^{-m}+\ldots+A_{-1}z^{-1}+A_0+A_1z+\ldots+A_nz^n+\ldots$$

Hallemos la integral de $f(z)$ sobre la circunferencia $C_\sigma:|z|=$ $=\sigma$, donde $\sigma>R$ y la dirección del recorrido es tal que el entorno $|z|>\sigma$ del punto del infinito queda a la izquierda del observador. Es natural considerar positiva tal dirección con respecto al recorrido en torno del punto del infinito. Mas con respecto al interior del círculo $|z|<\sigma$, es decir, con respecto al entorno del punto finito $z=0$, ésta es negativa. Integrando término a término la serie de Laurent, resulta:

$$\int_{C_\sigma}f(z)\,dz=A_{-1}(-2\pi i)=2\pi i\,(-A_{-1}).$$

*) En el caso dado, esta proposición es fácil comprobarla directamente.

Para que en el caso de integración alrededor del punto del infinito la integral de la función también sea igual al producto del residuo de la función por $2\pi i$, es conveniente dar la siguiente definición:

Se llama residuo de una función, uniforme y analítica en cierto entorno del punto $z = \infty$, respecto de este punto, al coeficiente de z^{-1}, tomado con signo menos, en el desarrollo de Laurent de la función en este entorno.

Entonces

$$\int_{C_\sigma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z),$$

donde la integral se toma en la dirección positiva con respecto del punto del infinito, es decir, en el sentido según el cual la parte exterior de la curva queda a la izquierda (y no la parte interior como ordinariamente se hace).

Aplicando esta definición, obtenemos el siguiente teorema:

La suma de todos los residuos de una función uniforme y analítica que solamente tiene puntos singulares aislados, es igual a cero.

En efecto, el número de puntos singulares de tal función es finito (en caso contrario, existiría un punto de acumulación, finito o infinito, del conjunto de los puntos singulares, el cual sería, por lo tanto, un punto singular no aislado de la función). Describamos una circunferencia $|z| = \sigma$, con el centro en el origen de coordenadas, de modo que en ella y en su parte exterior (a excepción, posiblemente, del punto $z = \infty$) no haya puntos singulares de la función. Entonces, todos los puntos singulares finitos: $z_1, z_2, \ldots, z_n$ estarán situados en el interior de esta circunferencia, por lo cual, según el teorema de los residuos, se tiene:

$$\int_{C_\sigma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Aquí se toma la integral en la dirección positiva ordinaria, es decir, de tal modo que el interior de la circunferencia quede a la izquierda. Pero esta misma dirección será negativa con respecto al punto del infinito. Por lo tanto, la misma integral será igual a

$$\int_{C_\sigma} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Restando la segunda relación de la primera, obtenemos definitivamente:

$$2\pi i\,[\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \ldots + \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)] = 0,$$

o bien

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \ldots + \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

El teorema queda demostrado.

En particular, este teorema es cierto para cualquier función racional, puesto que una función racional tiene solamente puntos singulares aislados de carácter uniforme (precisamente, polos).

Obsérvese que el residuo de una función respecto del punto del infinito se determina mediante el coeficiente de uno de los términos de la parte regular del desarrollo de Laurent, mientras que el residuo respecto de un punto finito se determina mediante el coeficiente de uno de los términos de la parte principal (es menester recordar que el conjunto de las potencias negativas del desarrollo de Laurent representa la parte regular para el punto $z = \infty$ y la parte principal para un punto finito). De aquí se deduce que el residuo respecto del punto $z = \infty$ puede ser distinto de cero, incluso cuando este punto no sea singular, es decir, cuando es regular, mientras que el residuo respecto de un punto regular finito siempre es igual a cero. Así, por ejemplo, para la función $f(z) = \frac{1}{z}$ el punto $z = \infty$ es regular (es un cero de primer orden). Sin embargo, aquí $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1 \neq 0$.

§ 4. APLICACION DE LA TEORIA DE LOS RESIDUOS AL DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES. INTERPOLACION

4.1. Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica que no tenga en el plano finito otros puntos singulares más que polos.

Designemos con C una curva cerrada rectificable de Jordan cualquiera que no pase por los polos de la función $f(z)$, y sea z un punto situado en el interior de C, distinto del origen de coordenadas y de los polos. Calculemos la integral de tipo Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Evidentemente, los polos de la función $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ en el interior de C son: el punto $\zeta = z$ y todos los polos de la función $f(z)$ situados en el interior de C. Designemos con $\beta_1, \ldots, \beta_n$ todos aquellos polos que son distintos de cero, y con $G_1(z), \ldots, G_n(z)$ las partes principales correspondientes de los desarrollos de Laurent de la función $f(z)$. Hagamos también $\beta_0 = 0$, suponiendo que $G_0(z)$ es la parte principal del desarrollo de Laurent de la función $f(z)$

en un entorno del punto $z = 0$, de modo que $G_0(z)$ es idénticamente igual a cero, si $z = 0$ es un punto regular de $f(z)$, y $G_0(z)$ es una función racional con el único polo en el origen, si $z = 0$ es un polo de la función $f(z)$.

Calculemos los residuos de la función $\varphi(\zeta)$ respecto de los puntos $\zeta = z, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Ante todo, obtenemos:

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=z} \varphi(\zeta) = f(z).$$

Sustituyendo luego $f(\zeta)$ en un entorno del punto β_k por el desarrollo de Laurent correspondiente

$$f(\zeta) = \frac{A_{-\nu_k}^{(k)}}{(\zeta-\beta_k)^{\nu_k}} + \ldots + \frac{A_{-1}^{(k)}}{\zeta-\beta_k} + A_0^{(k)} + A_1^{(k)}(\zeta-\beta_k) + \ldots$$
$$\ldots = G_k(\zeta) + P_k(\zeta),$$

donde $G_k(\zeta)$ y $P_k(\zeta)$ son las partes principal y regular del desarrollo, respectivamente, y observando que para $|\zeta-\beta_k| < |z-\beta_k|$

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{(z-\beta_k)-(\zeta-\beta_k)} =$$
$$= -\frac{1}{z-\beta_k} - \frac{\zeta-\beta_k}{(z-\beta_k)^2} - \ldots - \frac{(\zeta-\beta_k)^{\nu_k-1}}{(z-\beta_k)^{\nu_k}} - \ldots,$$

hallamos que el término que contiene $(\zeta-\beta_k)^{-1}$ en el desarrollo de $\varphi(\zeta) = f(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}$ es igual a

$$-\left[\frac{A_{-1}^{(k)}}{z-\beta_k} + \frac{A_{-2}^{(k)}}{(z-\beta_k)^2} + \ldots + \frac{A_{-\nu_k}^{(k)}}{(z-\beta_k)^{\nu_k}}\right]\frac{1}{\zeta-\beta_k} = -G_k(z)\frac{1}{\zeta-\beta_k}.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=\beta_k} \varphi(\zeta) = -G_k(z).$$

Así, pues,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} = f(z) - \sum_0^n G_k(z),$$

o sea,

$$f(z) = \sum_0^n G_k(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (4.1:1)$$

Esta fórmula podría haber sido obtenida de otro modo. Obsérvese para esto, que $\sum_0^n G_k(\zeta)$ es una función racional que se anula en

el infinito; todos sus polos están situados en el interior de C. La función $\dfrac{\sum\limits_{0}^{n} G_h(\zeta)}{\zeta - z}$ (z está situado en el interior de C) posee las mismas propiedades y en el punto del infinito tiene un cero al menos de segundo orden. Por esta razón, su residuo respecto del punto del infinito es igual a cero, y, por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{\sum\limits_{0}^{n} G_h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

de donde

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(\zeta) - \sum\limits_{0}^{n} G_h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Pero la función $f(\zeta) - \sum\limits_{0}^{n} G_h(\zeta)$ es analítica en todos los puntos interiores a C; por lo cual, a la última integral se la puede aplicar la fórmula de Cauchy, obteniendo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(\zeta) - \sum\limits_{0}^{n} G_h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) - \sum_{0}^{n} G_h(z),$$

es decir, resulta la fórmula (4.1:1).

Supongamos que existe una sucesión de curvas cerradas rectificables de Jordan $\{C_m\}$ que no pasan por los polos de la función $f(z)$, donde cada una de las curvas $\{C_m\}$ está contenida en el interior de la siguiente (C_{m+1}) y cuyas partes interiores, para m suficientemente grande, contienen a un círculo dado cualquiera $|z| < R$, cumpliéndose para las curvas C_m la siguiente condición:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = 0. \tag{4.1:2}$$

Entonces, el número de polos de la función $f(z)$, situados en el interior de C_m, dependerá de m: $n = n_m$, y de la fórmula (4.1:1) hallamos:

$$f(z) \lim_{m \to \infty} \sum_{0}^{n_m} G_h(z). \tag{4.1:3}$$

es decir, la función $f(z)$ se expresa en forma del límite de la sucesión de la suma de las partes principales de sus desarrollos de Laurent, respecto de los polos situados en el interior de C_m.

La condición (4.1:2) queda satisfecha si, por ejemplo,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \int_{C_m} |f(\zeta)|\, ds < \infty. \tag{4.1:4}$$

En efecto, designando con r_m la distancia desde el origen de coordenadas hasta C_m ($r_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$) y suponiendo que z pertenece al círculo $|z| < R$, para $r_m > R$ tendremos:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \right| < \frac{1}{2\pi (r_m - R)} \int_{C_m} |f(\zeta)|\, ds \to 0$$

cuando $m \to \infty$.

De esta acotación se ve que, con la condición (4.1:4), el término complementario de la fórmula (4.1:1) tiende a cero uniformemente respecto de z, perteneciente a un círculo arbitrario $|z| < R$. Por esta razón, la sucesión (4.1:3) converge uniformemente hacia $f(z)$ en cualquier círculo $|z| < R$.

Se puede obtener una expresión para $f(z)$ análoga a (4.1:3) en condiciones más generales. Supongamos para esto que en lugar de (4.1:4) para la sucesión de curvas $\{C_m\}$ y un número entero no negativo p se cumple la relación

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \int_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}}\, ds < \infty. \tag{4.1:5}$$

Si se supone que las longitudes l_m de las curvas C_m crecen no más rápidamente que λr_m, donde λ es una constante (así será siempre que C_m sean curvas homotéticas respecto del origen de coordenadas), entonces hallamos que

$$\int_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}}\, ds < \max_{C_m} |f(\zeta)| \frac{l_m}{r_m^{p+1}} < \lambda \frac{\max\limits_{C_m} |f(\zeta)|}{r_m^p}.$$

De aquí se ve que la condición (4.1:5) quedará cumplida si se verifica la condición más simple

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\max\limits_{C_m} |f(\zeta)|}{r_m^p} < \infty, \tag{4.1:6}$$

que admite un crecimiento infinito del $\max\limits_{C_m} |z(\zeta)|$, pero no más rápido que el de r_m^p.

Haciendo la suposición de que se cumple la condición (4.1:5) o (4.1:6), volvamos a considedar la relación (4.1:1) y sustituyamos

en la misma $(\zeta - z)^{-1}$ bajo el signo de la integral, por la expresión

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \ldots + \frac{z^p}{\zeta^{p+1}} + \frac{1}{(\zeta - z)}\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}.$$

Entonces tendremos:

$$f(z) = \sum_{0}^{n} G_k(z) + \sum_{0}^{p} \frac{z^j}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}\,d\zeta. \qquad (4.1:7)$$

Observando que los puntos $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ son polos de la función $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}$ situados en el interior de C, hagamos:

$$\operatorname*{Res}_{z=\beta_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} = A_k^{(j)} \quad (j = 0, 1, \ldots, p).$$

Entonces obtenemos:

$$\sum_{j=0}^{p} \frac{z^j}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}\,d\zeta = \sum_{j=0}^{p} (A_0^{(j)} + \ldots + A_n^{(j)})\,z^j = \sum_{h=0}^{n} P_k(z),$$

donde $P_k(z)$ son polinomios de grado no superior a p:

$$P_k(z) = A_k^{(0)} + A_k^{(1)}z + \ldots + A_k^{(p)}z^p. \qquad (4.1:8)$$

En resumen, la fórmula (4.1:7) puede escribirse en la forma

$$f(z) = \sum_{0}^{n} [G_k(z) + P_k(z)] + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}\,d\zeta. \qquad (4.1:9)$$

Sustituyendo aquí C por C_m y, por consiguiente, n por n_m, aplicando la condición (4.1:5), obtenemos que el término complementario de esta fórmula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}\,d\zeta$$

tiende a cero, y además, uniformemente con respecto de los puntos z, pertenecientes a cualquier círculo fijado: $|z| < R$. En efecto, si m es tan grande que $r_m > R$, se tiene:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}\,d\zeta\right| < \frac{1}{2\pi}\int_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta| - |z|}\frac{|z|^{p+1}}{|\zeta|^{p+1}}\,ds <$$

$$< \frac{R^{p+1}}{2\pi(r_m - R)}\int_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}}\,ds.$$

Pero, en virtud de la condición (4.1:5), las integrales $\int\limits_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}} ds$ están acotadas:

$$\int\limits_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}} ds < M < \infty.$$

Por consiguiente,

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}} d\zeta\right| < \frac{MR^{p+1}}{2\pi(r_m - R)} \to 0 \text{ cuando } m \to \infty,$$

y de la fórmula (4.1:9) resulta el desarrollo

$$f(z) = \lim_{n_m \to \infty} \sum_{0}^{n_m} [G_k(z) + P_k(z)]. \qquad (4.1:10)$$

que converge uniformemente hacia $f(z)$ en cada círculo $|z| < R$. Este desarrollo puede escribirse en forma de serie

$$f(z) = [G_0(z) + P_0(z)] + \sum_{m+0}^{\infty} \{[G_{n_m+1}(z) + P_{n_m+1}(z)] + \ldots +$$
$$+ [G_{n_{m+1}}(z) + P_{n_{m+1}}(z)]\}, \qquad (4.1:11)$$

donde n_0 se debe hacer igual a cero.

Obsérvese que los primeros términos de la sucesión (4.1:10) o de la serie (4.1:11) se hacen infinitos en los puntos $\beta_0, \ldots, \beta_{n_m}$, es decir, allí donde se hace infinita la función $f(z)$. Por esta razón, la convergencia uniforme de la serie (4.1:10) se debe entender como la convergencia uniforme de aquella serie que se obtiene de la dada después de despreciar unos cuantos primeros términos que tienen polos en el círculo $|z| < R$. Los desarrollos de la forma (4.1:10) (en particular, (4.1:3) o (4.1:11)) se llaman desarrollos de $f(z)$ en f r a c c i o n e s s i m p l e s.

4.2. El método expuesto de desarrollo de las funciones en series pertenece a Cauchy. Apliquémoslo a unos cuantos ejemplos particulares de gran importancia.

1) D e s a r r o l l o d e $\sec z$. Tomemos por C_m los contornos de los cuadrados con los centros en el punto $z = 0$ y con los lados paralelos a los ejes de coordenadas y de longitudes $2m\pi$. En los lados de los cuadrados, paralelos al eje imaginario, se tiene: $z = \pm m\pi + iy$, y, por consiguiente:

$$|\sec z| = \frac{1}{|\cos(\pm m\pi + iy)|} = \frac{1}{|\cos iy|} = \frac{1}{\operatorname{ch} y}.$$

En los lados de los cuadrados, paralelos al eje real, se tiene: $z = x \pm im\pi$, y, por consiguiente (véase la fórmula (3.6:11), cap.

segundo),

$$|\sec z| = \frac{1}{|\cos (x \pm im\pi|} \leqslant \frac{1}{\operatorname{sh} m\pi}.$$

De estas desigualdades obtenemos para la integral $\int\limits_{C_m} |\sec \zeta|\, ds$ la siguiente acotación:

$$\int\limits_{C_m} |\sec \zeta|\, ds < 2 \int\limits_{-m\pi}^{m\pi} \frac{dy}{\operatorname{ch} y} + 4m\pi \frac{1}{\operatorname{sh} m\pi}.$$

Como la integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\operatorname{ch} y}$ es convergente y $\frac{4m\pi}{\operatorname{sh} m\pi} \to 0$ para $m \to \infty$, se cumple la condición (4.1:4) y, por consiguiente, también la condición (4.1:2). Por esta razón, en el caso dado se puede utilizar la fórmula (4.1:3).

En el interior de C_m la función $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ tiene polos de la forma $(2j-1)\frac{\pi}{2}$, donde $-m+1 \leqslant j \leqslant m$; todos ellos son simples, puesto que los ceros de $\cos z$ son simples. Evidentemente,

$$\operatorname*{Res}_{z=(2j-1)\frac{\pi}{2}} \sec z = -\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{2j-1}{2}\pi\right)} = (-1)^j,$$

y, por consiguiente, la parte principal de $\sec z$ en el entorno del punto $z = (2j-1)\frac{\pi}{2}$ es $G_j(z) = \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}$. Obsérvese también que $z = 0$ no es un polo para $\sec z$ y, por consiguiente, se debe suponer que la parte principal correspondiente es igual a cero. De la fórmula (4.1:3) hallamos:

$$\sec z = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m+1}^{m} \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}} + \sum_{j=-m+1}^{0} \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}} \right].$$

Sustituyamos en la segunda de las sumas que figuran bajo el signo del límite j por $1-k$. Obtenemos que k variará entre los límites desde 1 hasta m, y, por consiguiente,

$$\sum_{-m+1}^{0} \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{z+(2k-1)\frac{\pi}{2}}.$$

Por esta razón, cambiando la notación k por j, hallamos:

$$\sec z = \lim_{m\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}+\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^{j+1}}{z+(2j-1)\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\frac{(2j-1)\pi}{z^2-(2j-1)^2\frac{\pi^2}{4}}.$$

Hemos obtenido el desarrollo de $\sec z$ en serie

$$\sec z=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{(2j-1)\pi}{z^2-(2j-1)^2\frac{\pi^2}{4}}. \qquad (4.2:1)$$

Del método de obtención de esta serie (un caso particular de la fórmula (4.1:3) con la condición (4.1:4)) se deduce que ella es uniformemente convergente en cada círculo $|z|<R$ (además, para hablar de la convergencia de la serie se deben excluir de la misma unos cuantos primeros términos, que tienen polos en el círculo dado).

2) Desarrollo de $\operatorname{cotg} z$. Tomemos por C_m los contornos de los cuadrados con los centros en el punto $z=0$ y con los lados paralelos a los ejes de coordenadas y de longitudes $(2m+1)\pi$. Entonces, en los lados de los cuadrados, paralelos al eje imaginario,

$$z=\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+iy,$$

y, por consiguiente,

$$|\operatorname{cotg} z|=\left|\frac{\cos\left[\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+iy\right]}{\operatorname{sen}\left[\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+iy\right]}\right|=\left|\frac{\operatorname{sen}(iy)}{\cos(iy)}\right|=\left|\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\right|<1.$$

En los lados de los cuadrados, paralelos al eje real,

$$z=x\pm i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

y, por consiguiente, (véase la fórmula (3.6:11) del cap. segundo),

$$|\operatorname{cotg} z|=\left|\frac{\cos\left[x\pm i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{\operatorname{sen}\left[x\pm i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}\right|\leqslant\frac{\operatorname{ch}\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}{\operatorname{sh}\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}=$$

$$=\frac{1+e^{-(2m+1)\pi}}{1-e^{-(2m+1)\pi}}\leqslant\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}.$$

En resumen, en los lados de los cuadrados C_m el módulo $|\operatorname{cotg} z|$ satisface a la desigualdad

$$|\operatorname{cotg} z| \leqslant \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}.$$

Por esta razón, se cumple la condición (4.1:6) y, por consiguiente, también la condición (4.1:5) para $p=0$, y podemos aplicar la fórmula (4.1:10).

En el interior de C_m la función $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ tiene los polos siguientes: 0, $\pm\pi$, . . ., $\pm m\pi$, los cuales todos son simples, puesto que todos los ceros de $\operatorname{sen} z$ son simples. Evidentemente,

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} \operatorname{cotg} z = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1,$$

por lo cual, la parte principal $G_k(z)$ del desarrollo de $\operatorname{cotg} z$ en el entorno del punto $z=k\pi$ es igual a $\frac{1}{z-k\pi}$.

En el caso dado, los polinomios $P_k(z)$ (véase la fórmula (4.1:8) son de grado no superior a $p=0$:

$$P_k(z) = A_k^{(0)} = \operatorname*{Res}_{\zeta=k\pi} \frac{\operatorname{cotg} \zeta}{\zeta}.$$

Pero, evidentemente, la función $\frac{\operatorname{cotg} \zeta}{\zeta}$ es par. Por esto, su desarrollo en serie de Laurent en el entorno del origen de coordenadas contiene solamente potencias pares de ζ y, por consiguiente,

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=0} \frac{\operatorname{cotg} \zeta}{\zeta} = 0.$$

Por otra parte, los puntos $\zeta = k\pi$ $(k\neq 0)$ son polos simples para $\frac{\operatorname{cotg} \zeta}{\zeta}$. Por lo tanto,

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=k\pi} \frac{\operatorname{cotg} \zeta}{\zeta} = \frac{\cos k\pi}{k\pi \cos k\pi} = \frac{1}{k\pi}.$$

En resumen,

$$P_0(z)=0, \quad P_k(z) = \frac{1}{k\pi} \qquad (k\neq 0),$$

y, por consiguiente, según la fórmula (4.1:10):

$$\operatorname{cotg} z = \lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right) + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{z+k\pi} - \frac{1}{k\pi}\right)\right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi}\right)\right] = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi}\right).$$

(4.2:2)

Hemos obtenido el desarrollo de cotg z en fracciones simples. Del mismo modo de obtención de esta fórmula se deduce (de la fórmula general (4.1:10)) que la serie (4.2:2) es uniformemente convergente en cualquier círculo $|z| < R$, si se excluye de la misma un número finito de términos que tienen polos en este círculo.

Escribiendo la relación (4.2:2) en la forma

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right),$$

integrémosla término a término a lo largo de una curva arbitraria L que parta del origen de coordenadas y no pase por los puntos $k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Obtenemos:

$$\int_{0}^{z} \left(\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} \right) dz = \sum_{1}^{\infty} \operatorname{Ln} \left(\frac{k\pi - z}{k\pi} \, \frac{k\pi + z}{k\pi} \right) = \sum_{1}^{\infty} \operatorname{Ln} \left(1 - \frac{z^2}{k\pi^2} \right),$$

donde en el segundo miembro figuran unos valores de los logaritmos completamente determinados; precisamente los valores de las integrales correspondientes:

$$\int_{L} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) dz.$$

La integral del primer miembro es igual a uno de los valores de $\operatorname{Ln} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$. Así, pues,

$$\operatorname{Ln} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} \operatorname{Ln} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right),$$

de donde

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{n \to \infty} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right),$$

lo cual, ordinariamente, se escribe mediante el símbolo del producto infinito:

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right). \qquad (4.2:3)$$

Hemos obtenido el desarrollo de sen z en producto infinito.

Este desarrollo se obtendrá de nuevo en el cap. séptimo, partiendo de unos razonamientos más generales.

3) Desarrollos de $\operatorname{cosec} z$ y $\operatorname{tg} z$. De los desarrollos de las funciones $\sec z$ y $\operatorname{cotg} z$ se obtienen inmediatamente los desarrollos de las funciones $\operatorname{cosec} z$ y $\operatorname{tg} z$. En efecto, $\operatorname{cosec} z = \sec\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. Por lo tanto, de la fórmula hallada anteriormente

$$\sec z = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m+1}^{m} \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}$$

hallamos:

$$\operatorname{cosec} z = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m+1}^{m} \frac{(-1)^j}{\frac{\pi}{2}-z-(2j-1)\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m+1}^{m} \frac{(-1)^j}{-\pi(j-1)-z} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m+1}^{m} \frac{(-1)^{j-1}}{\pi(j-1)+z}.$$

Sustituyendo $j-1$ por k, obtendremos:

$$\operatorname{cosec} z = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m-1} \frac{(-1)^k}{z+k\pi} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{z} - \left(\frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi}\right) + \left(\frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi}\right) - \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^{m-1}\left(\frac{1}{z-(m-1)\pi} + \frac{1}{z+(m-1)\pi}\right) + (-1)^m \frac{1}{z-m\pi}\right].$$

Agreguemos dentro de los corchetes un término más: $(-1)^m \times \times \frac{1}{z+m\pi}$ cuyo límite es igual a cero (uniformemente respecto de z, perteneciente a un círculo arbitrario $|z| < R$). Obtenemos:

$$\operatorname{cosec} z = \lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2-\pi^2} + \frac{2z}{z^2-(2\pi)^2} - \ldots + (-1)^m \frac{2z}{z^2-(m\pi)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} (-1)^k \frac{2z}{z^2-(k\pi)^2}.$$

Esto es el resultado pedido.

Análogamente, para $\operatorname{tg} z$ tenemos: $\operatorname{tg} z = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, por lo cual, de la fórmula obtenida anteriormente

$$\operatorname{cotg} z = \lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi}\right)\right]$$

obtenemos:

$$\operatorname{tg} z = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z}+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z-k\pi}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z+k\pi}\right)\right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z}+\frac{1}{-\frac{\pi}{2}-z}\right)+\left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}-z}+\frac{1}{-\frac{3\pi}{2}-z}\right)+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left(\frac{1}{(2m-1)\frac{\pi}{2}-z}+\frac{1}{-(2m-1)\frac{\pi}{2}-z}\right)+\frac{1}{(2m+1)\frac{\pi}{2}-z}\right].$$

Despreciando entre corchetes el término $\dfrac{1}{(2m+1)\frac{\pi}{2}-z}$, cuyo límite es igual a cero, hallamos:

$$\operatorname{tg} z = \lim_{m\to\infty}\sum_{1}^{m}\frac{2z}{z^2-\frac{(2k-1)^2}{4}\pi^2}=\sum_{1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\frac{(2k-1)^2}{4}\pi^2}.$$

Este es el desarrollo buscado de $\operatorname{tg} z$.

4) En particular, de los desarrollos buscados fácilmente se obtienen los desarrollos de Laurent de las funciones trigonométricas en el entorno del origen de coordenadas que fueron hallados anteriormente mediante división de series (cap. tercero, ap. 7.2).

Consideremos $\sec z$. Esta función es analítica en el círculo $|z| < \frac{\pi}{2}$ y, por consiguiente, admite en el mismo un desarrollo en serie de Taylor. La fórmula (4.2:1) expresa esta función en forma de serie:

$$\sec z = \sum_{1}^{\infty}(-1)^j\frac{(2j-1)\pi}{z^2-(2j-1)^2\frac{\pi^2}{4}} =$$

$$= \sum_{1}^{\infty}(-1)^j\left[\frac{1}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{z+(2j-1)\frac{\pi}{2}}\right],$$

la cual es uniformemente convergente en cada círculo y, en particular, en el interior del círculo $|z| < \frac{\pi}{2}$. Por esta razón, basándose en el teorema de Weierstrass sobre las series uniformemente convergentes de funciones analíticas, se pueden obtener los coeficientes de Taylor de $\sec z$ sumando los coeficientes correspondientes de los desarrollos de Taylor de cada una de las funciones que figuran entre

corchetes en el segundo miembro de la última fórmula (véase cap. 3, ap. 7.1). Pero

$$(-1)^j\left[\frac{1}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{z+(2j-1)\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=-(-1)^j\left[\sum_0^\infty \frac{z^k}{\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}\right]^{k+1}}+\sum_0^\infty \frac{(-1)^k z^k}{\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}\right]^{k+1}}\right]=$$

$$=2(-1)^{j-1}\sum_0^\infty \frac{z^{2m}}{\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}\right]^{2m+1}} \qquad \left(|z|<(2j-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Aquí, los coeficientes de potencias impares son iguales a cero, mientras que el coeficiente de z^{2m} $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ es igual a

$$\frac{2(-1)^{j-1}}{\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}\right]^{2m+1}}=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}}.$$

Por lo tanto, los coeficientes de Taylor de las potencias impares de z en el desarrollo de $\sec z$, son iguales a cero (lo cual, evidentemente, se podría haber observado inmediatamente, puesto que la función $\sec z$ es par), mientras que los coeficientes de las potencias pares z^{2m} se expresan en forma de series:

$$2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}}.$$

Así, pues,

$$\sec z=\sum_0^\infty\left[2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}}\right]z^{2m}.$$

Recuérdese que en el cap. 3, ap. 7.2, se obtuvo este mismo desarrollo en otra forma:

$$\sec z=\sum_0^\infty(-1)^m\frac{E_{2m}}{(2m)!}z^{2m},$$

donde E_{2m} son enteros, denominados números de Euler ($E_0=1$, $E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6=-61, \ldots$). Comparando los coeficientes de ambas series, obtenemos las igualdades:

$$2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}}=(-1)^m\frac{E_{2m}}{(2m)!} \qquad (m=0, 1, 2, \ldots)$$

y, en particular:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} = \frac{E_0}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^3} = -\frac{E_2}{2\cdot 2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{32},$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^5} = \frac{E_4}{2\cdot 4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = \frac{5\pi^5}{1536},$$

$$\cdots\cdots$$

Consideremos también la función $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$, la cual es analítica en el círculo $|z| < \pi$. Para calcular los coeficientes de su desarrollo de Taylor, apliquemos la fórmula (4.2:2), de la cual se deduce la siguiente expresión de esta función en forma de serie:

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-j\pi} + \frac{1}{z+j\pi}\right).$$

Para cada término de esta suma se tiene el siguiente desarrollo de Taylor:

$$\frac{1}{z-j\pi} + \frac{1}{z+j\pi} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(j\pi)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{(j\pi)^{k+1}} =$$

$$= -2\sum_{1}^{\infty}\frac{z^{2m-1}}{(j\pi)^{2m}} \qquad (|z| < \pi j).$$

Por lo tanto, los coeficientes de potencias pares de z en el desarrollo de Taylor de la función $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$ son iguales a cero (lo cual se observa inmediatamente, puesto que esta función es impar), mientras que los coeficientes de potencias impares z^{2m-1}, se expresan en forma de series:

$$-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j\pi)^{2m}} = -\frac{2}{\pi^{2m}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2m}} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{m=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{\pi^{2m}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2m}}\right]z^{2m-1}.$$

En el cap. tercero, ap. 7.2, se obtuvo este mismo desarrollo en otra forma:

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} z^{2m-1}.$$

Comparando los dos desarrollos se deduce que

$$\frac{2}{\pi^{2m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!}.$$

Como el primer miembro de esta igualdad es positivo, el segundo también tiene que ser positivo, es decir, $(-1)^{m-1} B_{2m} > 0$. De aquí se deduce que los números de Bernoulli B_{2m} ($m = 1, 2, 3, \ldots$) tienen que alternar de signo $\left(\text{ya se vio en el cap. 3, ap. 7.2, que } B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42}, \ldots\right)$.

De la relación obtenida se deducen, en particular, las siguientes igualdades:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{B_2}{2 \cdot 2!} (2\pi)^2 = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = -\frac{B_4}{2 \cdot 4!} (2\pi)^4 = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^6} = \frac{B_6}{2 \cdot 6!} (2\pi)^6 = \frac{\pi^6}{945},$$

. . . .

4.3. Examinemos el problema de la construcción del polinomio de interpolación para una función analítica dada $f(z)$. El problema consiste en que, dado un sistema de puntos

$$z_1, z_2, \ldots, z_m,$$

pertenecientes a un recinto G, y dados otros tantos números naturales

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n \geq m,$$

se puede construir un polinomio $\Pi(z)$, del menor grado posible, que satisfaga a las condiciones:

$$\Pi(z_j) = f(z_j), \ \ldots, \ \Pi^{(\alpha_j - 1)}(z_j) = f^{(\alpha_j - 1)}(z_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

El polinomio $\Pi(z)$ que satisface a estas condiciones se llama *polinomio de interpolación* de la función $f(z)$, correspondiente a los puntos de interpolación z_j, con los órdenes de multiplicidad α_j ($j = 1, 2, \ldots, m$).

Si $\Pi(z)$ es tal polinomio, entonces para la diferencia

$$R(z)=f(z)-\Pi(z)$$

que, evidentemente, representa una función analítica en el recinto G, se tiene:

$$R(z_j)=\ldots=R^{(\alpha_j-1)}(z_j)=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Por consiguiente, $R(z)$ tiene un cero en cada uno de los puntos z_j de orden α_j por lo menos. Supongamos que $\Pi_1(z)$ es otro polinomio que satisface a las condiciones del problema. La función correspondiente

$$R_1(z)=f(z)-\Pi_1(z)$$

también tendrá los ceros $z_1, \ldots, z_m$, cuyos órdenes serán no menores que $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; lo mismo será cierto también para

$$R(z)-R_1(z)=\Pi_1(z)-\Pi(z).$$

En resumen, $\Pi_1(z)-\Pi(z)$ es un polinomio que tiene al menos n ceros: $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de órdenes no menores que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, de donde se deduce que $\Pi_1(z)-\Pi(z)$ es divisible por el polinomio

$$(z-z_1)^{\alpha_1}\ldots(z-z_m)^{\alpha_m}=\omega(z)$$

de grado n. Por esta razón, si cada uno de los polinomios $\Pi(z)$ y $\Pi_1(z)$ es de grado menor que n, su diferencia tiene que ser idénticamente igual a cero, es decir, entre los polinomios de grado menor que n existe no más de un polinomio que resuelve el problema planteado.

Demostremos que tal polinomio verdaderamente existe y puede expresarse en forma de una integral

$$\Pi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}\,\frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\zeta-z}\,d\zeta, \qquad (4.3:1)$$

donde γ es una curva cerrada rectificable de Jordan cualquiera, situada en el recinto G junto con su parte interior, la cual contiene en su parte interior los puntos $z_1, \ldots, z_m$. En efecto si $\omega(z)=\sum_0^n A_k z^k$, resulta

$$\frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\zeta-z}=\frac{\sum_0^n A_k(\zeta^k-z^k)}{\zeta-z}=$$

$$=A_1+A_2(\zeta+z)+\ldots+A_n(\zeta^{n-1}+\ldots+z^{n-1})=$$

$$=A_1+A_2\zeta+\ldots+A_n\zeta^{n-1}+(A_2+A_3\zeta+\ldots+A_n\zeta^{n-2})z+\ldots+A_nz^{n-1}=$$

$$=B_{n-1}(\zeta)+B_{n-2}(\zeta)z+\ldots+B_0(\zeta)z^{n-1},$$

donde $B_{n-1}(\zeta), B_{n-2}(\zeta), \ldots, B_0(\zeta)$ son polinomios respecto de ζ, cuyos grados coinciden con sus índices. Por consiguiente, $\Pi(z)$ se puede expresar en la forma

$$\Pi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}\sum_{k=0}^{n-1}B_{n-1-k}(\zeta)z^k\,d\zeta=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}B_{n-1-k}(\zeta)\,d\zeta\right)z^k=\sum_{k=0}^{n-1}p_kz^k,$$

donde

$$P_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} B_{n-1-k}(\zeta)\, d\zeta \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

En resumen, la expresión (4.3:1) representa un polinomio de grado no superior a $n-1$. Formemos la diferencia $R(z)=f(z)-\Pi(z)$. Si el punto z está situado en el interior de γ, entonces $f(z)$ se puede expresar en la forma $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, y, por consiguiente, $R(z)$ se puede transformar del modo siguiente:

$$R(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}\, \frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\zeta-z}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, \frac{\omega(z)}{\omega(\zeta)}\, d\zeta \qquad (4.3:2)$$

o bien, finalmente,

$$R(z)=\omega(z)\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, \frac{d\zeta}{\omega(\zeta)}. \qquad (4.3:2')$$

Evidentemente, la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, \frac{d\zeta}{\omega(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}}{\zeta-z}\, d\zeta,$$

es una integral de tipo Cauchy y, por consiguiente, representa una función analítica en el interior de γ. Como $\omega(z)=(z-z_1)^{\alpha_1}\ldots(z-z_m)^{\alpha_m}$, la función

$$\frac{R(z)}{(z-z_j)^{\alpha_j}} = (z-z_1)^{\alpha_1}\ldots(z-z_{j-1})^{\alpha_{j-1}}(z-z_{j+1})^{\alpha_{j+1}}\ldots$$

$$\ldots(z-z_m)^{\alpha_m}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}}{\zeta-z}\, d\zeta$$

es analítica en un entorno del punto z_j (o incluso en toda la parte interior a γ). Por esta razón, $z=z_j$ es para $R(z)$ un cero de orden α_j al menos, y, posiblemente, de orden superior. Pero esto significa que

$$R(z_j)=0,\ \ldots\ R^{(\alpha_j-1)}(z_j)=0,$$

es decir,

$$f(z_j)=\Pi(z_j),\ \ldots,\ f^{(\alpha_j-1)}(z_j)=\Pi^{(\alpha_j-1)}(z_j) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Así, pues, hemos hallado el polinomio de interpolación (4.3:1) de grado no superior a $n-1$ que resuelve el problema planteado. En virtud de la observación hecha anteriormente, éste es el único polinomio de grado inferior a n que satisface a las condiciones del problema.

La fórmula (4.3:1), que proporciona el polinomio de interpolación, y la fórmula (4.3:2), que expresa la diferencia $f(z)-\Pi(z)$, es decir, que propor-

ciona el **término complementario** $R(z)$ de la **fórmula de interpolación**

$$f(z) = \Pi(z) + R(z),$$

se llaman **fórmulas de Hermite**.

4.4. Ilustremos la importancia de las fórmulas obtenidas en unos cuantos ejemplos.

1) Supongamos primero que $m = 1$, de modo que solamente se tiene un punto de interpolación z_1 de orden $\alpha_1 = n$. Se trata de buscar el polinomio $\Pi(z) = t_{n-1}(z)$ de grado no superior a $n - 1$ que satisfaga a las condiciones:

$$t_{n-1}(z_1) = f(z_1), \quad t'_{n-1}(z_1) = f'(z_1), \ \ldots, \ t_{n-1}^{(n-1)}(z_1) = f^{(n-1)}(z_1).$$

En el caso considerado $\omega(z) = \omega_n(z) = (z - z_1)^n$ y la fórmula (4.3:1) nos da:

$$t_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)^n} \frac{(\zeta - z_1)^n - (z - z_1)^n}{\zeta - z} d\zeta.$$

Pero

$$\frac{1}{(\zeta - z_1)^n} \frac{(\zeta - z_1)^n - (z - z_1)^n}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{(\zeta - z_1)^n} [(\zeta - z_1)^{n-1} + (\zeta - z_1)^{n-2}(z - z_1) + \ldots + (z - z_1)^{n-1}] =$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_1} + \frac{1}{(\zeta - z_1)^2}(z - z_1) + \ldots + \frac{1}{(\zeta - z_1)^n}(z - z_1)^{n-1}. \qquad (4.4:1)$$

Obtenemos:

$$t_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta\, (z - z_1)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!} (z - z_1)^k. \qquad (4.4:2)$$

Hemos obtenido el **polinomio de interpolación de Taylor**, es decir, la suma parcial de la serie de Taylor (lo cual se debía de esperar desde el principio). El término complementario (4.3:2′) tiene la forma

$$R(z) = R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{(z - z_1)^n}{(\zeta - z_1)^n} d\zeta. \qquad (4.4:3)$$

Este es el **término complementario de la fórmula de Taylor**. En virtud del teorema integral para un sistema de circuitos, su valor no varía si la integración se efectúa sobre una circunferencia cualquiera C_ρ: $|\zeta - z_1| = \rho$, donde ρ es menor que la distancia Δ desde el punto z_1 hasta la frontera del recinto G (en el cual $f(z)$ es analítica). Por esta razón, para los puntos z situados en el interior de C_ρ, se tiene:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{(z - z_1)^n}{(\zeta - z_1)^n} d\zeta$$

y

$$|R_n(z)| < \frac{\rho}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho - |z - z_1|} \left(\frac{|z - z_1|}{\rho} \right)^n.$$

Como $\frac{|z - z_1|}{\rho} < 1$, resulta que $R_n(z)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, de donde se obtiene de nuevo que la sucesión de polinomios de Taylor $\{t_{n-1}(z)\}$

converge hacia $f(z)$ en el interior del círculo $|z - z_1| < \Delta$, perteneciente al recinto de analiticidad de la función $f(z)$.

2) Sea $m = n$, de modo que se tienen n puntos de interpolación $z_1, z_2, \ldots, z_n$, cada uno de orden 1 ($\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$). Se trata de buscar el polinomio $\Pi(z) = L_{n-1}(z)$ de orden no superior a $n-1$, que satisfaga a las condiciones:

$$L_{n-1}(z_1) = f(z_1), \quad L_{n-1}(z_2) = f(z_2), \ldots, L_{n-1}(z_n) = f(z_n).$$

En el caso dado,

$$\omega(z) = \omega_n(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n),$$

y por la fórmula (4.3:1), resulta:

$$L_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (4.4:4)$$

Para calcular esta integral, lo más fácil es aplicar el teorema de los residuos. La función subintegral $\varphi(z)$, considerada como función de ζ, tiene polos simples en los puntos z_k ($k = 1, \ldots, n$). El punto $\zeta = z$ no es singular para la misma, puesto que el polinomio $\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)$ es divisible por $\zeta - z$. Para los residuos de $\varphi(\zeta)$ en los puntos z_k resultan las expresiones:

$$\operatorname*{Res}_{\zeta = z_k} \varphi(\zeta) = \frac{f(z_k)}{\omega'_n(z_k)} \frac{\omega_n(z)}{z - z_k},$$

donde $\dfrac{\omega_n(z)}{z - z_k} = (z - z_1) \ldots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \ldots (z - z_n)$ es un polinomio en z de grado $n-1$.

Por consiguiente,

$$L_{n-1}(z) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\zeta = z_k} \varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(z_k)}{\omega'_n(z_k)} \frac{\omega_n(z)}{z - z_k}. \qquad (4.4:5)$$

Hemos obtenido el polinomio de interpolación de Lagrange de grado $n-1$. El término complementario de la fórmula de interpolación correspondiente tiene la forma:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\zeta)} d\zeta. \qquad (4.4:6)$$

El comportamiento del mismo para $n \to \infty$ depende de la relación entre la distribución de los puntos de interpolación $\{z_n\}$ en el interior del recinto G y el carácter de la función $f(z)$.

3) El polinomio de interpolación de Lagrange puede escribirse de otra forma. Transformemos la expresión

$$\sigma_n = \frac{1}{\omega_n(\zeta)} \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z},$$

que, como ya sabemos, representa un polinomio en z de grado $n-1$.

Para, $n = 1$ se tiene:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\zeta - z_1} \frac{(\zeta - z_1) - (z - z_1)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_1}.$$

Consideremos la diferencia

$$\delta_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k = \frac{1}{\omega_{k+1}(\zeta)} \frac{\omega_{k+1}(\zeta) - \omega_{k+1}(z)}{\zeta - z} - \frac{1}{\omega_k(\zeta)} \frac{\omega_k(\zeta) - \omega_k(z)}{\zeta - z};$$

como

$$\omega_{k+1}(\zeta) = (\zeta - z_{k+1})\,\omega_k(\zeta) \text{ y}$$

$$\omega_{k+1}(z) = (z - z_{k+1})\,\omega_k(z),$$

esta diferencia puede representarse en la forma siguiente:

$$\delta_k = \frac{(\zeta - z_{k+1})\,\omega_k(\zeta) - (z - z_{k+1})\,\omega_k(z) - (\zeta - z_{k+1})\,\omega_k(\zeta) + (\zeta - z_{k+1})\,\omega_k(z)}{\omega_{k+1}(\zeta)(\zeta - z)} =$$

$$= \frac{(\zeta - z)\,\omega_k(z)}{\omega_{k+1}(\zeta)(\zeta - z)} = \frac{\omega_k(z)}{\omega_{k+1}(\zeta)}.$$

Haciendo $\delta_0 = \sigma_1 = \frac{1}{\zeta - z_1} = \frac{1}{\omega_1(\zeta)}$, formemos la suma $\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\zeta)$; obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\zeta) = \sigma_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\sigma_{k+1} - \sigma_k) = \sigma_n = \frac{1}{\omega_1(\zeta)} + \frac{\omega_1(z)}{\omega_2(\zeta)} + \ldots + \frac{\omega_{n-1}(z)}{\omega_n(\zeta)}.$$

En resumen,

$$\frac{1}{\omega_n(\zeta)} \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{\omega_1(\zeta)} + \frac{\omega_1(z)}{\omega_2(\zeta)} + \ldots + \frac{\omega_{n-1}(z)}{\omega_n(\zeta)}. \qquad (4.4:7)$$

Evidentemente, haciendo aquí $z_1 = \ldots = z_n$, se obtiene de aquí la identidad (4.4:1).

De la igualdad (4.4:7) se deduce que el polinomio de interpolación de Lagrange $l_{n-1}(z)$ se puede representar en la forma

$$l_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_0^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} d\zeta\,\omega_k(z). \qquad (4.4:8)$$

En esta forma, éste se llama **p o l i n o m i o d e i n t e r p o l a c i ó n d e N e w t o n**. La ventaja de la fórmula (4.4:8) ante la fórmula (4.4:5) consiste en que, según la fórmula (4.4:8), para pasar de $l_{n-1}(z)$ a $l_n(z)$ es suficiente agregar (solamente) a $l_{n-1}(z)$ un término de la forma $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{n+1}(\zeta)} d\zeta \cdot \omega_n(z)$, mientras que la fórmula (4.4:5) no sólo exige el aumento de un término, sino también la sustitución de cada término anterior por uno nuevo distinto.

En particular, si la sucesión $\{l_{n-1}(z)\}$ converge hacia la función $f(z)$, teniendo en cuenta la fórmula (4.4:8), en lugar de la relación

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} l_{n-1}(z)$$

se puede emplear la serie

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} d\zeta\,\omega_k(z). \qquad (4.4:9)$$

Esta se llama **s e r i e d e i n t e r p o l a c i ó n d e N e w t o n**. Evidentemente, para $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = \ldots$, $\omega_{k+1}(\zeta)$ se hace igual a $(\zeta - z_1)^{k+1}$, $\omega_k(z)$ se hace igual a $(z - z_1)^k$, y resulta la serie de Taylor como un caso particular de la serie de Newton:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)^{k+1}} d\zeta \, (z - z_1)^k, \qquad (4.4:10)$$

Obsérvese, por cierto, que ya establecimos las condiciones para la convergencia de la serie (4.4:10), mientras que el problema general de la convergencia de la serie de Newton, es decir, el problema de las condiciones según las cuales el término complementario de la serie de Newton (4.4:6) (que es también el término complementario de la serie de Lagrange) tiende a cero cuando $n \to \infty$, exige un estudio particular, que tenga en cuenta también la distribución de los puntos de interpolación y el comportamiento de la función $f(z)$. Este problema ha sido tratado por A. Guelfond.

Detengámonos también a examinar los coeficientes de la serie de Newton:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} d\zeta \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots).$$

En el caso particular de la serie de Taylor estos coeficientes se expresan mediante las derivadas de $f(z)$, precisamente se representan en la forma $\frac{f^{(k)}(z_1)}{k!}$. En el caso general, ellos se expresan mediante las diferencias divididas de la función $f(z)$ respecto de los puntos $\{z_n\}$.

Para obtener la expresión debida de estos coeficientes, apliquemos el teorema de los residuos. Tendremos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} d\zeta = \sum_{j=1}^{k+1} \operatorname{Res}_{\zeta = z_j} \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{f(z_j)}{\omega'_{k+1}(z_j)}, \qquad (4.4:11)$$

donde

$$\omega'_{k+1}(z_j) = (z_j - z_1) \ldots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \ldots (z_j - z_{k+1}).$$

En particular, para $k = 1$ obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_2(\zeta)} d\zeta = \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1} = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}.$$

Llamemos a esta expresión **d i f e r e n c i a d i v i d i d a p r i m e r a d e l a f u n c i ó n** $f(z)$ respecto de los puntos z_1 y z_2 y designémosla por $\Delta^{(1)}[f; z_1, z_2]$. En general, si ya se ha definido la **d i f e r e n c i a d i v i d i d a** de orden $k - 1$, llamaremos diferencia dividida de orden k de la función $f(z)$ respecto de los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}$, a la expresión

$$\frac{\Delta^{(k-1)}[f; z_2, \ldots, z_{k+1}] - \Delta^{(k-1)}[f; z_1, \ldots, z_k]}{z_{k+1} - z_1} = \Delta^{(k)}[f; z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}].$$

Supongamos que ya se ha demostrado que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_k(\zeta)} d\zeta = \Delta^{(k-1)}[f(z); z_1, \ldots, z_k]$$

para cualquier sistema de puntos $z_1, \ldots, z_k$; demostremos que entonces,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)}\,d\zeta = \Delta^{(k)}[f(z);\ z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}]. \qquad (4.4{:}12)$$

En efecto, debido a la hipótesis hecha, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_k)}\,d\zeta = \Delta^{(k-1)}[f(z);\ z_1, \ldots, z_{k+1}],$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_{k+1})}\,d\zeta = \Delta^{(k-1)}[f(z);\ z_2, \ldots, z_{k+1}].$$

Por consiguiente,

$$\Delta^{(k)}\Big[f(z);\ z_1, \ldots, z_{k+1}\Big] =$$

$$= \frac{\Delta^{(k-1)}[f(z);\ z_2, \ldots, z_{k+1}] - \Delta^{(k-1)}[f(z);\ z_1, \ldots, z_k]}{z_{k+1}-z_1} =$$

$$= \frac{1}{z_{k+1}-z_1}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_{k+1})} - \frac{1}{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_k)}\right]d\zeta =$$

$$= \frac{1}{z_{k+1}-z_1}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,\frac{(\zeta-z_1)-(\zeta-z_{k+1})}{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_{k+1})}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)}\,d\zeta,$$

como se quería demostrar. Haciendo también

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\omega_1(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = f(z_1) = \Delta^{(0)}[f;\ z_1],$$

representamos el polinomio de interpolación de Newton (4.4:8) en la forma

$$l_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^{k}[f(z);\ z_1, \ldots, z_{k+1}]\,\omega_k(z).$$

De acuerdo a esto, la serie de interpolación de Newton toma la forma siguiente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^{k}[f(z);\ z_1, \ldots, z_{k+1}]\,\omega_k(z).$$

4) Finalmente, examinemos el problema de interpolación en el que se dan m puntos distintos: $z_1, \ldots, z_m$, de órdenes iguales $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = p$; a continuación aumentaremos indefinidamente el número p, sin cambiar los mismos puntos de interpolación. Se trata de buscar un polinomio $l_{mp-1}(z)$ de grado no superior a $mp-1$ que satisfaga a las condiciones:

$$l_{mp-1}(z_k) = f(z_k),\ l'_{mp-1}(z_k) = f'(z_k),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ l^{(p-1)}_{mp-1}(z_k) = f^{(p-1)}(z_k)$$

$(k = 1, 2, \ldots, m)$. Haciendo

$$(z-z_1)\ldots(z-z_m) = q(z),$$

se tiene:

$$\omega_{mp}(z)=(z-z_1)^p \ldots (z-z_m)^p=[q(z)]^p,$$

y, por consiguiente,

$$f_{mp-1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^p}\,\frac{[q(\zeta)]^p-[q(z)]^p}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Transformemos la expresión

$$\frac{1}{[q(\zeta)]^p}\,\frac{[q(\zeta)]^p-[q(z)]^p}{\zeta-z}$$

del modo siguiente:

$$\frac{1}{[q(\zeta)]^p}\,\frac{[q(\zeta)]^p-[q(z)]^p}{\zeta-z}=$$

$$=\frac{1}{[q(\zeta)]^p}\,\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}\,\{[q(\zeta)]^{p-1}+[q(\zeta)]^{p-2}\,q(z)+$$

$$+\ldots+[q(z)]^{p-1}\}=\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}\left\{\frac{1}{q\zeta}-\frac{q(z)}{[q(\zeta)]^2}+\ldots+\frac{[q(z)]^{p-1}}{[q(\zeta)]^p}\right\}.$$

Entonces tendremos:

$$f_{mp-1}(z)=\sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^{n+1}}\,\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\,[q(z)]^n. \qquad (4.4:13)$$

Para las transformaciones ulteriores, apliquemos la fórmula (4.4:7), sustituyendo en la misma $\omega_n(z)$ por $q(z)$. Resulta:

$$\frac{1}{[q(\zeta)]^{n+1}}\,\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}=\frac{1}{[q(\zeta)]^n}\left\{\frac{1}{q(\zeta)}\,\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}\right\}=$$

$$=\frac{1}{[q(\zeta)]^n}\left[\frac{1}{\zeta-z_1}+\frac{z-z_1}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}+\ldots+\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_{m-1})}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_m)}\right]$$

de donde

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^{n+1}}\,\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^n}\,\frac{d\zeta}{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_{j+1})}\,(z-z_1)\ldots(z-z_j).$$

Hemos obtenido un polinomio $Q_n(z)$ de grado no superior a $m-1$, cuyos coeficientes son integrales de la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^n}\,\frac{d\zeta}{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_{j-1})}.$$

Mediante el teorema de los residuos se podrían haber hallado sus expresiones mediante los valores de la función $f(z)$ y sus derivadas en los puntos $z_1, \ldots, z_m$.

Volviendo a examinar la fórmula (4.4:13), hallamos:

$$f_{mp-1}(z)=\sum_{n=0}^{p-1} Q_n(z)\,[q(z)]^n;$$

este último se llama polinomio de interpolación de Jacobi.

Consideremos el término complementario de la fórmula de interpolación correspondiente

$$R_{mp}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\frac{[q(z)]^p}{[q(\zeta)]^p}\,d\zeta.$$

Para hallar una cota, obsérvese que, desde el principio, a la curva γ solamente se la han impuesto las siguientes restricciones: γ junto con su parte interior pertenece al recinto G en el cual la función $f(z)$ es analítica y contiene en su interior a todos los puntos $z_1, \ldots, z_m$. Tomemos como curva γ la lemniscata Λ_ρ con los focos en los puntos $z_1, \ldots, z_m$:

$$|q(z)|=\rho^m$$

(véase el cap. 3, ap. 6.2). Ya sabemos que ella encierra en su interior los puntos $z_1, \ldots, z_m$, cualquiera que sea $\rho>0$. Supongamos ahora que $\rho_0>0$ es un valor del radio tal, que $f(z)$ es uniforme y analítica en el interior de Λ_{ρ_0}, y sea $\rho>0$ un número positivo arbitrario, menor que ρ_0. Entonces, para cualquier ρ' que satisfaga a las desigualdades $\rho<\rho'<\rho_0$ la lemniscata $\Lambda_{\rho'}$ pertenece al interior de Λ_{ρ_0} y contiene el conjunto cerrado $\overline{G}_\rho$, constituido por la parte interior de la lemniscata Λ_ρ y la lemniscata misma. Como en todos los puntos $z\in\overline{G}_\rho$ se cumple la desigualdad

$$|q(z)|\leqslant\rho^m,$$

y en los puntos $\zeta\in\Lambda_{\rho'}$ se verifica la igualdad

$$|q(\zeta)|=\rho'^m,$$

tomando por γ la lemniscata $\Lambda_{\rho'}$ y designando con $M(\rho')$ el máximo del módulo de $f(z)$ en los puntos de la misma, tendremos:

$$|R_{mp}(z)|<\frac{1}{2\pi}\,\frac{M(\rho')}{\delta(\rho,\rho')}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{mp}\operatorname{long}\Lambda_{\rho'}\ (z\in G_\rho),$$

donde se ha designado con $\delta(\rho,\rho')$ la distancia entre Λ_ρ y $\Lambda_{\rho'}$.

De esta fórmula se ve que $R_{mp}(z)$ tiende a cero uniformemente en el conjunto $\overline{G}_\rho$, cuando p crece indefinidamente. Como

$$R_{mp}(z)=f(z)-f_{mp-1}(z)$$

y ρ se puede tomar arbitrariamente próximo a ρ_0, de aquí se deduce que la sucesión de polinomios $f_{mp-1}(z)$ converge uniformemente en el interior de Λ_{ρ_0} hacia la función $f(z)$:

$$f(z)=\lim_{p\to\infty} f_{mp-1}(z)=\lim_{p\to\infty}\sum_{n=0}^{p-1} Q_n(z)\,[q(z)]^n,$$

es decir, resulta el desarrollo en serie

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} Q_n(z)\,[q(z)]^n. \qquad (4.4:14)$$

Esta se llama **serie de interpolación de Jacobi.**

En resumen, *toda función $f(z)$, analítica en el interior de la lemniscata Λ_{ρ_0}, con los focos $z_1, \ldots, z_m$,* puede desarrollarse en serie de Jacobi (4.4:14), *la cual converge uniformemente en el interior de Λ_{ρ_0}.*

Recordemos que $q(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_m)$ y

$$Q_n(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{|q(\zeta)|^n} \frac{d\zeta}{(\zeta - z_1) \ldots (\zeta - z_{j+1})} (z - z_1) \ldots (z - z_j).$$

En el caso particular en que $m = 1$, se tiene $q(z) = z - z_1$,

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!},$$

y la serie de Jacobi se convierte en la serie de Taylor; la lemniscata Λ_{ρ_0} se convierte en la circunferencia $|z - z_1| = \rho_0$.

Cuando $m = 2$, se tiene: $q(z) = (z - z_1)(z - z_2)$ y

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)^{n+1}(\zeta - z_2)^n} d\zeta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)^{n+1}(\zeta - z_2)^{n+1}} d\zeta \, (z - z_1).$$

Aplicando a cada una de las integrales el teorema de los residuos y efectuando después unas transformaciones sencillas, resulta:

$$Q_0(z) = \frac{f(z_1)(z - z_2) - f(z_2)(z - z_1)}{z_1 - z_2},$$

y para $n \geqslant 1$

$$Q_n(z) = \frac{1}{n!\,(z_1 - z_2)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{(z_1 - z_2)^k} \left[(-1)^k f^{(n-k)}(z_1) \left(z - \frac{kz_1 + nz_2}{k+n} \right) - \right.$$
$$\left. - (-1)^n f^{(n-k)}(z_2) \left(z - \frac{nz_1 + kz_2}{k+n} \right) \right],$$

donde

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = n(n+1), \quad \lambda_k = \frac{n(n^2 - 1) \ldots [n^2 - (k-1)^2](n+k)}{k!} \quad (k \geqslant 2).$$

En particular, haciendo $z_1 = -z_2 = a$, hallaremos que toda función $f(z)$, analítica en el interior de la lemniscata Λ_{ρ_0}:

$$|(z - a)(z + a)| = \rho_0^2,$$

se desarrolla en serie:

$$f(z) = \frac{f(a)(z + a) - f(-a)(z - a)}{2a} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2 - a^2)}{n!\,(2a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{(2a)^k} \left[(-1)^k f^{(n-k)}(a) \left(z + \frac{n-k}{n+a} a \right) - \right.$$
$$\left. - (-1)^n f^{(n-k)}(-a) \left(z - \frac{n-k}{n+k} a \right) \right].$$

Es conveniente observar que mientras el interior de la lemniscata Λ_{ρ_0} no sea conexo (lo cual ocurrirá para valores suficientemente pequeños de ρ_0), la función analítica $f(z)$ podrá definirse en cada componente del conjunto abierto, cuya frontera es Λ_{ρ_0}, independientemente de como se defina en las demás componentes del mismo conjunto. Así, por ejemplo, si $m=2$ y $\rho_0 \leqslant |a|$, la lemniscata $|(z-a)(z+a)| = \rho_0^2$ limita dos recintos simplemente conexos, sin puntos comunes. Hagamos $f(z)$ igual a una constante A en aquel recinto de éstos que contiene al punto $-a$, e igual a una constante B en aquel recinto que contiene al punto a. Entonces, obtenemos la serie:

$$\frac{B+A}{2}+z\,\frac{B-A}{2a}+\frac{B-A}{2a}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)\,\ldots\,(2n-1)\,2n}{n!}\,\frac{z\,(z^2-a^2)^n}{2^{2n}a^{2n}},$$

la cual converge en uno de los dos recintos limitados por la lemniscata hacia la constante A y en el otro, hacia B.

Por cierto, el último resultado se puede obtener mediante el desarrollo binómico. En efecto, sustituyendo en la fórmula

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)\,\ldots\,(2n-1)\,2n}{n!\,2^{2n}}\,t^n,\quad |t|<1$$

t por $\dfrac{z^2-a^2}{a^2}$, en el interior de la lemniscata $|z^2-a^2|=|a|^2$ se tiene

$$|t|=\frac{|z^2-a^2|}{|a|^2}<1.$$

Por consiguiente,

$$\pm\frac{a}{z}=1+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)\,\ldots\,(2n-1)\,2n}{n!\,2^{2n}}\,\frac{(z^2-a^2)^n}{a^{2n}},$$

donde el signo en el primer miembro se debe elegir de modo que para $z=\pm a$ resulte la unidad; por esta razón, en el recinto limitado por la lemniscata y que contiene al punto $-a$ (una mitad del «ocho»), se debe tomar el signo menos, y en el recinto limitado por la lemniscata y que contiene al punto a (la otra mitad del «ocho»), el signo más. Del desarrollo obtenido se deduce que

$$\pm\frac{B-A}{2}=\frac{B-A}{2a}\,z+\frac{B-A}{2a}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)\,\ldots\,(2n-1)\,2n}{n!\,2^{2n}}\,\frac{z\,(z^2-a^2)^n}{a^{2n}},$$

de donde, finalmente, se deduce el resultado indicado anteriormente.

Para estudiar la teoría de interpolación recomendamos al lector leer los libros V. G o n c h a r o v, Teoría de la interpolación y aproximación de las funciones, (cap. I. Interpolación por puntos) (В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, М., Гостехиздат, 1954 (гл. I. Точечное интерполирование) y A. G u e l f o n d, Cálculo de diferencias finitas. (А. О. Г е л ь ф о н д, Исчисление конечных разностей, изд., 3, «Наука», 1966).

§ 5. FUNCIONES INVERSAS E IMPLICITAS

5.1. Supongamos que

$$w = f(z) = w_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (5.5:1)$$

donde $a_1 = f'(z_0) \neq 0$. Consideremos un círculo $|z - z_0| < \rho_0$, cuyo radio sea menor que el radio de convergencia de la serie (5.1:1) y en cuyos puntos, distintos de z_0, la función $f(z)$ tome valores distintos de $f(z_0) = w_0$ (véase el cap. 6.1, cap. 3). Designando con δ la distancia desde el punto w_0 hasta la imagen de la circunferencia γ: $|z - z_0| = \rho_0$ en la transformación $w = f(z)$, para cada punto w_1 perteneciente al entorno $|w - w_0| < \delta$ tendremos:

$$|f(z) - w_0| > |w_0 - w_1| \qquad (z \in \gamma),$$

de donde, en virtud del teorema de Rouché (véase el ap. 3.5), se deduce que la ecuación

$$f(z) - w_0 = 0$$

y

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1) = 0$$

tienen un mismo número de raíces en el interior de γ. Pero la primera de ellas solamente tiene una raíz z_0; por consiguiente, la segunda también tendrá solamente una raíz z_1:

$$f(z_1) = w_1.$$

En resumen, en el entorno $|w - w_0| < \delta$ está definida una función uniforme $z = \varphi(w)$, cuyos valores pertenecen al entorno $|z - z_0| < \rho_0$ y la cual es inversa con respecto de la función $w = f(z)$

Aquí obtendremos para la misma un desarrollo en serie de potencias de $w - w_0$, convergente en el círculo $|w - w_0| < \delta$, de donde se deducirá que la función $\varphi(z)$ es analítica en el círculo indicado. La serie que obtendremos representará la inversión de la serie (5.1:1). Queriendo establecer un resultado más general, consideremos una función arbitraria $F(z)$, analítica en un recinto que contenga al círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant \rho_0$, y formemos el desarrollo en serie para la función $F[\varphi(w)]$. En particular, haciendo $F(z) = z$, obtendremos el desarrollo de $\varphi(w)$.

Si w es un punto arbitrario del círculo $|w - w_0| < \delta$, entonces, como ya se ha observado, la función $f(z) - w$ tiene un cero simple único $z = \varphi(w)$ en el interior de γ: $|z - z_0| = \rho_0$. Por consiguiente, la función $F(\zeta)\dfrac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}$ tiene un polo simple único $\varphi(w)$ en el interior de γ, con el residuo igual a $F[\varphi(w)]$, de donde se deduce

que

$$F[\varphi(w)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta. \qquad (5.1:2)$$

Está claro, que la fórmula obtenida es un caso particular de la fórmula (3.5:1). Para obtener de aquí el desarrollo en serie pedido, apliquemos a la integral (5.1:2) un método análogo al que se empleó para obtener de la integral de Cauchy la serie de potencias para una función analítica.

Como $|w - w_0| < \delta$, mientras que $|f(\zeta) - w_0| \geqslant \delta$ $(\zeta \in \gamma)$, la fracción $\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}$ es desarrollable en serie de potencias de $\frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0}$:

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} = \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w_0 - (w - w_0)} = \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w_0} \left[\frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0}\right]^n.$$

Haciendo $\max_{\gamma} |f'(\zeta)| = M$, hallaremos que el módulo del término general de la serie obtenida no es superior en los puntos de la circunferencia γ al número $\frac{M}{\delta}\left(\frac{|w - w_0|}{\delta}\right)^n$, de donde se deduce que la serie es uniformemente convergente en γ y puede integrarse término a término. Poniendo este desarrollo en la fórmula (5.1:2), obtenemos:

$$F[\varphi(w)] = \frac{1}{2\pi i} \int F(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w_0} \left[\frac{w - w_0}{f(\zeta) - w_0}\right]^n d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta) f'(\zeta)}{[f(\zeta) - w_0]^{n+1}} d\zeta \, (w - w_0)^n. \qquad (5.1:3)$$

Hemos obtenido una serie de potencias para $F[\varphi(w)]$, convergente para $|w - w_0| < \delta$. En particular, si $F(z) = z$, resulta:

$$z = \varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\zeta f'(\zeta)}{[f(\zeta) - w_0]^{n+1}} d\zeta \, (w - w_0)^n. \qquad (5.1:4)$$

Esta es la inversión de la serie (5.1:1). Transformemos los coeficientes de los desarrollos hallados. Para $n = 0$ obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta) f'(\zeta)}{f(\zeta) - w_0} d\zeta = F(z_0),$$

puesto que en el interior de γ la función subintegral tiene un polo (simple) único en el punto $\zeta = z_0$ con el residuo igual a $F(z_0)$.

Supongamos ahora que $n \geqslant 1$. Entonces, empleando el método de integración por partes (el cual, evidentemente, es aplicable a las integrales de las funciones analíticas de variable compleja), obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)\, f'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^{n+1}}\, d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i n}\int_\gamma F(\zeta)\, d\left\{\frac{1}{[f(\zeta)-w_0]^n}\right\} = \frac{1}{2\pi i n}\int_\gamma \frac{F'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^n}\, d\zeta.$$

La función $\dfrac{F'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^n}$ tiene en el interior de γ un polo de orden n en el punto $\zeta = z_0$ (puesto que el denominador de la fracción $[f(\zeta) - w_0]^n$ tiene un cero de orden n en este punto). Por esta razón (véase el ap. 3.4),

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{F'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^n}\right\} = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left\{\frac{F'(\zeta)(\zeta-z_0)^n}{[f(\zeta)-w_0]^n}\right\}_{\zeta=z_0}.$$

Haciendo, para abreviar,

$$\frac{z-z_0}{f(z)-w_0} = \chi(z), \qquad (5.1{:}5)$$

donde, en virtud de las hipótesis hechas respecto de $f(z)$, la función $\chi(z)$ es analítica en el círculo $|z-z_0| < \rho_0$, resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)\, f'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\{F'(\zeta)[\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0}. \qquad (5.1{:}6)$$

Por consiguiente, la serie (5.1:3) puede escribirse definitivamente en la forma

$$F[\varphi(w)] = F(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\{F'(\zeta)[\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0}(w-w_0)^n. \qquad (5.1{:}7)$$

Esta serie, así como su caso particular (para $F(z) = z$):

$$z = \varphi(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\{[\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0}(w-w_0)^n, \qquad (5.1{:}8)$$

se llama *serie de Lagrange*.

5.2. Examinemos el problema de la inversión de una serie de potencias de la forma

$$w = f(z) = w_0 + a_h(z-z_0)^h + a_{h+1}(z-z_0)^{h+1} + \ldots, \qquad (5.2{:}1)$$

donde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0 \text{ y } k > 1.$$

Consideremos el círculo K: $|z - z_0| < \rho_0$, en el cual se verifica la relación

$$|a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \ldots| = |\lambda(z)| < |a_k|.$$

Entonces, en este entorno, para $z \neq z_0$, se tiene:

$$|f(z) - w_0| = |z - z_0|^k |a_k + \lambda(z)| \geqslant |z - z_0|^k (|a_k| - |\lambda(z)|) > 0,$$

es decir, $f(z)$ no toma el valor w_0 en los puntos distintos de z_0.

Introduzcamos ahora la función

$$\left[1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right]^{\frac{1}{k}}.$$

Como $\lambda(z)$ es analítica en el círculo K y en éste se cumple la desigualdad $\left|\frac{\lambda(z)}{a_k}\right| < 1$, esta función posee en este círculo una rama uniforme analítica $\psi(z)$, que se expresa por la fórmula

$$\psi(z) = \sqrt[k]{\left|1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right|} \left\{\cos\left[\frac{1}{k}\arg\left(1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + i \operatorname{sen}\left[\frac{1}{k}\arg\left(1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right)\right]\right\}$$

y se caracteriza por completo en que toma el valor 1 en el punto $z = z_0$, donde $\lambda(z) = 0$.

La función $\psi(z)$ es desarrollable en el círculo K en serie de potencias

$$\psi(z) = 1 + \alpha_1(z - z_0) + \alpha_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

el cual se puede obtener, por ejemplo, poniendo la serie

$$\frac{\lambda(z)}{a_k} = \frac{a_{k+1}}{a_k}(z - z_0) + \frac{a_{k+2}}{a_k}(z - z_0)^2 + \ldots$$

en la serie binómica

$$\psi(z) = \left[1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right]^{\frac{1}{k}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{k}\frac{\lambda(z)}{a_k} + \frac{1}{2!}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\left[\frac{\lambda(z)}{a_k}\right]^2 + \ldots$$

Mediante las funciones introducidas aquí, se puede representar la transformación $w = f(z)$ en el círculo K del modo siguiente:

$$w = f(z) = w_0 + a_k(z - z_0)^k\left[1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right] =$$
$$= w_0 + a_k(z - z_0)^k [\psi(z)]^k. \qquad (5.2:2)$$

Sustituyámosla por dos transformaciones, realizadas sucesivamente, una tras otra:

$$t = \sqrt[k]{f(z) - f(z_0)} = \sqrt[k]{a_k}\,(z - z_0)\,\psi(z) =$$

$$= \sqrt[k]{a_k}\,(z - z_0) + \sqrt[k]{a_k}\,\alpha_1 (z - z_0)^2 + \ldots, \qquad (5.2{:}3)$$

$$w = w_0 + t^k. \qquad (5.2{:}4)$$

En virtud de los resultados del apartado anterior, la ecuación (5.2:3) determina z en un entorno del punto $t = 0$, como una función uniforme y analítica de t (el valor $\sqrt[k]{a_k}$ está fijado):

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{[\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta = z_0} t^n,$$

donde

$$\chi(\zeta) = \frac{\zeta - z_0}{a_k^{\frac{1}{k}} (\zeta - z_0)\,\psi(\zeta)} = \frac{\zeta - z_0}{[f(\zeta) - f(z_0)]^{\frac{1}{k}}}.$$

Observando que $t = (w - w_0)^{\frac{1}{k}}$ es una función k-forme de w, la cual es analítica para $w \neq w_0$, sacamos la conclusión de que la función $z = \varphi(w)$, inversa con respecto de (5.2:1), es una función k-forme de w, analítica en un entorno $\varkappa$ del punto w_0, a excepción del mismo punto w_0. En este entorno, ésta se expresa por una serie dispuesta según las potencias fraccionarias de $w - w_0$:

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{\chi[(\zeta)]^n\}_{\zeta = z_0} (w - w_0)^{\frac{n}{k}}. \qquad (5.2{:}5)$$

Si en el entorno indicado $\varkappa$ del punto w_0 se traza algún radio, entonces la función $t = (w - w_0)^{\frac{1}{k}}$ tendrá en el recinto que se obtiene de $\varkappa$ excluyendo los puntos pertenecientes a este radio, k ramas uniformes analíticas. A cada una de ellas la corresponde una rama uniforme y analítica determinada de la función $z = \varphi(w)$ (5.2:5).

A un recorrido 1-ple del punto w por una circunferencia con el centro en w_0 le corresponderá el paso de una de las ramas de $(w - w_0)^{\frac{1}{k}}$ a otra y, debido a esto, el paso de una de las ramas de la función $z = \varphi(w)$ a otra. Como resultado de un recorrido k-ple alrededor del punto w_0, cada rama de la función $(w - w_0)^{\frac{1}{k}}$ pasará a sí misma; por esto, también cada rama de la función $z = \varphi(w)$ pasará a sí

misma, de donde se deduce que el punto $w = w_0$ es un punto de ramificación algebraico de la función $\varphi(w)$ de orden $k-1$.

En resumen, como resultado de invertir la serie de potencias (5.2:1) resulta una función analítica k-forme con un punto de ramificación algebraico de orden $k-1$ en el punto $w = w_0$.

El lector extenderá fácilmente los resultados precedentes al caso en que las series estén dispuestas según las potencias negativas de z, o al caso en que cada una de las series, estando dispuesta según las potencias enteras de $z - z_0$, contenga un número finito de potencias negativas de $z - z_0$.

5.3. Examinemos unos cuantos ejemplos de aplicación de la serie de Lagrange.

Ejemplo 1. Sea

$$w = ze^{-az} = \sum_0^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} z^{n+1} = f(z),$$

donde $a \neq 0$.

Designando la función inversa como anteriormente, mediante $z = \varphi(w)$, tomando $F(z) = e^{bz}$ $(b \neq 0)$ y observando que en el caso dado $z_0 = w_0 = 0$ y $\chi(z) = \frac{z}{f(z)} = e^{az}$, según la fórmula (5.1:7), obtenemos:

$$F[\varphi(w)] = e^{b\varphi(w)} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} [be^{(b+an)\zeta}]_{\zeta=0} w^n$$

$$= 1 + b \sum_1^{\infty} \frac{(b+an)^{n-1}}{n!} w^n.$$

El radio de convergencia de esta serie se puede determinar por la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|b+an|^{n-1}}{n!}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e|b+an|^{1-\frac{1}{n}}}{n}} = \frac{1}{e|a|}.$$

Haciendo $b = a$, obtenemos para $z = \varphi(w)$:

$$F(z) = e^{az} = \frac{z}{w}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\varphi(w)}{w} = 1 + \sum_1^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^n$$

y

$$\varphi(w) = w + \sum_{1}^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^{n+1} = \sum_{0}^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^{n+1}$$

Ejemplo 2. Polinomios de Legendre. Sea

$$w = 2\frac{z-t}{z^2-1} = f(z) \qquad (t \neq \pm 1).$$

Aquí

$$z_0 = t, \quad w_0 = 0, \quad \chi(z) = \frac{z-z_0}{f(z)} = \frac{z^2-1}{2},$$

y, por consiguiente, según la fórmula (5.1:8), en cierto entorno del punto $w=0$ tiene que verificarse el desarrollo

$$z = \varphi(w) = t + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \left(\frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n \right\}_{\zeta=t} w^n. \qquad (5.3:1)$$

Demostremos que esta serie es uniformemente convergente respecto del parámetro t en todo círculo $|t| < R$, si w es, respectivamente, suficientemente pequeño en valor absoluto. En efecto, los coeficientes de la serie se pueden expresar en forma de integrales:

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \left(\frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n \right\}_{\zeta=t} = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-t|=1} \frac{\left(\frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n}{(\zeta-t)^n} d\zeta,$$

de donde, para todos los $|t| < R$, se tiene:

$$|\alpha_n| < \frac{1}{2\pi} \frac{(R+2)^{2n}}{2^n} 2\pi = \left[\frac{(R+2)^2}{2} \right]^n.$$

Si, por consiguiente, $|w| \leqslant \frac{2\theta}{(R+2)^2}$, donde $0 < \theta < 1$, entonces,

$$|\alpha_n w^n| < \theta^n,$$

de donde se deduce la convergencia uniforme de la serie.

Teniendo esto en cuenta, derivemos término a término la serie obtenida respecto de t, manteniendo w fijo. Resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left\{ \left(\frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n \right\}_{\zeta=t} w^n.$$

Por otra parte, de la ecuación propuesta se puede expresar fácilmente $z = \varphi(w)$ mediante las funciones elementales. Se tiene:

$$z = \varphi(w) = \frac{1-\sqrt{1-2tw+w^2}}{w},$$

donde se debe tomar aquel valor de la raíz cuadrada que se hace igual a 1 cuando $w = 0$ (entonces, como fácilmente se comprueba, obtenemos: $\varphi(0) = t$, como tenía que ser). De aquí hallamos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}}.$$

Comparando las dos expresiones para $\frac{\partial z}{\partial t}$, obtenemos el desarrollo:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \left\{ \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2-1)^n \right\}_{\zeta=t} w^n, \qquad (5.3:2)$$

el cual es uniformemente convergente respecto de t en cualquier círculo $|t| < R$ y respecto de w en el círculo correspondiente de radio suficientemente pequeño. Para determinar el radio de convergencia de la serie para un valor fijado $t = t_0$, es suficiente observar que la función que figura en el primer miembro de la igualdad sigue siendo analítica en un entorno del origen de coordenadas mientras en este entorno no haya puntos en los que se anule la expresión subradical. Para los puntos indicados tiene que verificarse la igualdad

$$t_0 = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right).$$

Pero es sabido (véase el ap. 4.9 del segundo capítulo) que la función $t = \frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$ transforma el interior del círculo $|w| < \rho < 1$ en el exterior de la elipse E_ρ con los focos ± 1 y los semiejes $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right)$ y $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)$. Si el punto t_0 está situado en la elipse E_{ρ_0} (en el caso en que t_0 está situado en el intervalo $(-1, +1)$ del eje real, se debe tomar $\rho_0 = 1$), entonces, para todos los w pertenecientes al círculo $|w| < \rho_0$, los valores $t = \frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$ estarán situados en el exterior de la elipse E_{ρ_0} y, por consiguiente, no puede verificarse la igualdad $t_0 = \frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$. En resumen, la función $\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}}$ es analítica en el interior de la circunferencia $|w| = \rho_0 < 1$, cuya imagen en la transformación $t = \frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$ (la elipse E_{ρ_0}) pasa por el punto t_0. En el interior de esta circunferencia es convergente la serie de potencias que hemos obtenido.

Los coeficientes de la serie son funciones del parámetro t. Como $(\zeta^2-1)^n$ es un polinomio en ζ de grado $2n$, $\frac{d^n}{d\zeta^n}(\zeta^2-1)^n$ también

es un polinomio en ζ de grado n, y, por consiguiente, las funciones

$$\frac{1}{2^n n!}\left\{\frac{d^n}{d\zeta^n}(\zeta^2-1)^n\right\}_{\zeta=t}$$

son polinomios en t de grado n. Estos se llaman **polinomios de Legendre** y se designan mediante $P_n(t)$.

Así, pues,

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\left\{\frac{d^n}{d\zeta^n}(\zeta^2-1)^n\right\}_{\zeta=t}. \qquad (5.3:3)$$

Estos polinomios poseen muchas propiedades admirables. Señalemos algunas de ellas.

a) Hagamos $(t^2-1)^n=s$; entonces, calculando la derivada logarítmica, tendremos:

$$\frac{2nt}{t^2-1}=\frac{s'}{s}, \text{ o bien } (t^2-1)s'=2nts,$$

de donde, derivando $n+1$ veces:

$$(t^2-1)s^{(n+2)}+2(n+1)ts^{(n+1)}+(n+1)ns^{(n)}=$$
$$=2nts^{(n+1)}+2n(n+1)s^{(n)}.$$

Sustituyendo aquí $\frac{1}{2^n n!}s^{(n)}$ por $P_n(t)$, obtenemos:

$$(t^2-1)\frac{d^2P_n(t)}{dt^2}+2t\frac{dP_n(t)}{dt}-n(n+1)P_n(t)=0.$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, a la cual satisface $P_n(t)$.

b) Derivando término a término el desarrollo (5.3:2) respecto de w, obtenemos:

$$\frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)w^{n-1}.$$

De aquí que

$$\frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{1}{2}}}=(1-2tw+w^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)w^{n-1}=$$
$$=P_1(t)+2[P_2(t)-tP_1(t)]w+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(t)-2ntP_n(t)+$$
$$+(n-1)P_{n-1}(t)]w^n.$$

Por otra parte,

$$\frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{1}{2}}}=(t-w)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\,w^n=$$

$$=t+[tP_1(t)-1]\,w+\sum_{n=2}^{\infty}[tP_n(t)-P_{n-1}(t)]\,w^n.$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales w^n en los desarrollos obtenidos de la función $\frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{1}{2}}}$, hallaremos:

$$P_1(t)=t,\qquad 2P_2(t)-3tP_1(t)+1=0,$$
$$(n+1)\,P_{n+1}(t)-(2n+1)\,tP_n(t)+nP_{n-1}(t)=0\qquad (n\geqslant 2).$$

Estas relaciones permiten calcular los polinomios de Legendre uno tras otro.

He aquí los polinomios de Legendre de grados inferiores:

$$P_0(t)=1,\qquad P_1(t)=t,\qquad P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2},\qquad P_3(t)=\frac{5t^3-3t}{2},$$
$$P_4(t)=\frac{35t^4-30t^2+3}{8},\ \ldots$$

c) Señalemos, finalmente, la propiedad importante de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, que se expresa por las relaciones siguientes:

$$\int_{-1}^{+1}P_n(t)\,P_m(t)\,dt=0,\quad \text{si}\quad n\neq m.$$

Para demostrar estas relaciones, apliquemos las ecuaciones diferenciales a las que satisfacen $P_n(t)$ y $P_m(t)$. Se tiene:

$$(1-t^2)\,P_n''(t)-2tP_n'(t)+n\,(n+1)\,P_n(t)=0,$$
$$(1-t^2)\,P_m''(t)-2tP_m'(t)+m\,(m+1)\,P_m(t)=0.$$

Multiplicando la primera de ellas por $P_m(t)$, la segunda por $P_n(t)$ y restando, obtenemos:

$$(1-t^2)\,[P_n''(t)\,P_m(t)-P_m''(t)\,P_n(t)]-2t\,[P_n'(t)\,P_m(t)-$$
$$-P_m'(t)\,P_n(t)]+(n-m)\,(n+m+1)\,P_n(t)\,P_m(t)=0.$$

Observando que dos términos del primer miembro de esta relación representan la derivada del producto

$$(1-t^2)\,[P_n'(t)\,P_m(t)-P_m'(t)\,P_n(t)],$$

e integrando la relación obtenida en el segmento $[-1, +1]$, hallamos:

$$\{(1-t^2)[P_n'(t)P_m(t)-P_m'(t)P_n(t)]\}_{-1}^{+1}+$$
$$+(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{+1}P_n(t)P_m(t)\,dt=0.$$

Como la expresión que figura entre llaves se anula para $t=\pm 1$ y $(n-m)(n+m+1)\neq 0$ para $n\neq m$, resulta:

$$\int_{-1}^{+1}P_n(t)P_m(t)\,dt=0.$$

Por lo tanto, queda demostrada la ortogonalidad de los polinomios de Legendre en el segmento $[-1, +1]$.

Ejemplo 3. Ecuación de Kepler. Esta ecuación desempeña un papel importante en la astronomía, en la determinación de la denominada anomalía excéntrica del planeta. Esta tiene la forma

$$E-e\operatorname{sen}E=\frac{t-T}{U}2\pi,$$

donde E es la anomalía excéntrica del planeta, e es la excentricidad de la órbita del planeta, $t-T$ es el tiempo transcurrido desde el momento del último paso del planeta por el perihelio, y U es el período de rotación total del planeta alrededor del Sol. Sustituyendo aquí E por z, e por w y $\frac{t-T}{U}2\pi$ por τ, escribamos la ecuación de Kepler en la forma

$$w=\frac{z-\tau}{\operatorname{sen}z}=f(z).$$

Aquí $z_0=\tau\neq k\pi$ (k es un número entero) y, por consiguiente,

$$w_0=0,\quad \chi(\zeta)=\frac{\zeta-z_0}{f(\zeta)}=\operatorname{sen}\zeta.$$

Por esto, según la fórmula (5.1:8), para la función $z=\varphi(w)$, tendremos

$$z=\tau+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}(\operatorname{sen}\zeta)^n\right\}_{\zeta=\tau}w^n. \qquad (5.3:4)$$

Esta serie resuelve el problema planteado, puesto que permite calcular $z=E$ siendo dados $w=e$ y $\tau=\frac{t-T}{U}2\pi$.

Para determinar el radio de convergencia de esta serie debe recordarse que, cuando se deducía la serie de Lagrange, se partía de un círculo $|z - z_0| \leqslant \rho$, en el cual $f(z)$ era analítica y no tomaba el valor $w_0 = 0$ en los puntos distintos de z_0, y después se determinaba el número

$$\delta = \min_{|z-z_0|=\rho} |f(z) - f(z_0)| > 0.$$

La deducción hecha garantizaba la convergencia de la serie precisamente en el círculo $|w - w_0| < \delta$. Evidentemente, entre los números distintos δ que satisfacen a las condiciones impuestas, nos interesa el mayor posible. En el ejemplo dado se puede tomar por ρ un número positivo arbitrario, que no sea superior a la distancia desde el punto τ hasta el cero de sen z más próximo al mismo, el cual representa un polo de la función $f(z)$. Hagamos, para precisar, $\tau = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{por su mismo sentido, } \tau = \frac{t-T}{U} 2\pi \text{ varía desde 0 hasta } 2\pi\right)$; entonces se puede hacer variar ρ desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, puesto que los ceros de sen z próximos a τ ($z = 0$ y $z = \pi$) están a la distancia $\frac{\pi}{2}$ de τ. Si ρ está fijado entre estos límites, entonces el correspondiente δ es:

$$\min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |f(z)| = \min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} \left|\frac{z-\tau}{\operatorname{sen} z}\right| =$$

$$= \min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} \frac{\rho}{|\operatorname{sen} z|} = \frac{\rho}{\max\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |\operatorname{sen} z|}.$$

Pero el valor z que satisface a la condición $\left|z - \frac{\pi}{2}\right| = \rho$ puede expresarse en la forma $z = \frac{\pi}{2} + \rho e^{i\varphi}$. Por consiguiente, (véase la fórmula (3.6:11), cap. segundo),

$$|\operatorname{sen} z| = |\cos(\rho e^{i\varphi})| = |\cos(\rho\cos\varphi + i\rho \operatorname{sen}\varphi)| \leqslant |\operatorname{ch}(\rho \operatorname{sen}\varphi)| \leqslant \operatorname{ch}\rho.$$

Como para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ se tiene:

$$|\operatorname{sen} z| = |\cos(i\rho)| = \operatorname{ch}\rho,$$

sacamos la conclusión de que

$$\max_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |\operatorname{sen} z| = \operatorname{ch}\rho,$$

y, por consiguiente,

$$\delta = \min_{\left|z - \frac{\pi}{2}\right| = \rho} |f(z)| = \frac{\rho}{\operatorname{ch} \rho} = \delta(\rho).$$

No queda más que elegir ρ de modo que $\delta(\rho)$ tome el valor máximo. Igualando a cero la derivada logarítmica de $\delta(\rho)$, obtenemos la ecuación:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{e^{\rho} - e^{-\rho}}{e^{\rho} + e^{-\rho}} = 0 \quad \text{o bien} \quad e^{2\rho} = \frac{\rho + 1}{\rho - 1},$$

de donde se puede deducir que $\rho = 1{,}1997\ldots < \frac{\pi}{2}$.

Para este valor, $\delta(\rho)$ verdaderamente alcanza el máximo, igual a $\sqrt{\rho^2 - 1} = 0.6627\ldots = \delta$.

En resumen, si $\tau = \frac{\pi}{2}$, el desarrollo (5.3:4) es convergente para $|w| < 0{,}6627$. Se puede demostrar que el valor hallado de δ coincide con el radio de convergencia de la serie (5.3:4).

5.4. Los resultados obtenidos al resolver el problema de inversión de series, pueden considerarse como casos particulares de los teoremas de las funciones implícitas. El final de este capítulo está dedicado a estos teoremas.

Previamente daremos unas nociones sobre las funciones analíticas de dos variables, limitándonos solamente a lo más imprescindible.

Consideraremos una función $F(z, w)$ de dos variables complejas z y w, uniforme y continua respecto del conjunto de las variables para $z \in G$ y $w \in D$, donde G y D son dos recintos pertenecientes a los planos z y w, respectivamente. Diremos que ésta es analítica en el recinto de cuatro dimensiones $G \times D$*), si la función $F(z, w_0)$ es analítica en el recinto G para cada $w_0 \in D$, y la función $F(z_0, w)$ es analítica en el recinto D para cada $z_0 \in G$.

Para precisar, supongamos que G y D son recintos simplemente conexos, y C y Γ son dos curvas cerradas rectificables de Jordan, pertenecientes a G y D, respectivamente.

Consideremos la integral reiterada de segundo orden:

$$I \int_C d\zeta \int_\Gamma \frac{F(\zeta, \tau)\, d\tau}{(\zeta - z)(\tau - w)},$$

donde z está situado en el interior de C y w, en el interior de Γ, y cada uno de los circuitos se recorre en sentido positivo.

Entonces, observando que según la fórmula integral

$$\int_\Gamma \frac{F(\zeta, \tau)\, d\tau}{\tau - w} = 2\pi i F(\zeta, w),$$

---

*) Es de cuatro dimensiones porque cada uno de sus puntos se determina por cuatro números reales: las partes real e imaginaria de la variable z y las partes real e imaginaria de la variable w. La notación $\times$ designa el *producto* de dos conjuntos, es decir, el conjunto de todos los pares de elementos posibles, tomados cada elemento de uno de los conjuntos dados.

podemos representar I en la forma

$$I = 2\pi i \int_C \frac{F(\zeta, w)\, d\zeta}{\zeta - z} = -4\pi^2 F(z, w).$$

De aquí se deduce que

$$F(z, w) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_C d\zeta \int_\Gamma \frac{F(\zeta, \tau)\, d\tau}{(\zeta - z)(\tau - w)}.$$

El lector comprobará fácilmente que se obtiene el mismo resultado partiendo de la integral

$$\int_\Gamma d\tau \int_C \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\tau - w)}.$$

Por lo tanto, es indiferente el orden de integración en la fórmula hallada, y se puede escribir:

$$F(z, w) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{C\times\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau}{(\zeta - z)(\tau - w)}. \qquad (5.4:1)$$

Esta fórmula es análoga a la fórmula integral de Cauchy.

Basándose en esta fórmula, de un modo análogo al empleado en el ap. 3.3 del tercer capítulo para las integrales de tipo Cauchy, se puede demostrar la existencia de derivadas parciales de cualquier orden, las cuales se expresan por las fórmulas:

$$\frac{\partial^{k+m} F(z, w)}{\partial z^k\, \partial w^m} = -\frac{k!\,m!}{4\pi^2} \iint_{C\times\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau}{(\zeta - z)^{k+1} (\tau - w)^{m+1}} \qquad (5.4:2)$$

Estas fórmulas muestran que las derivadas parciales de $F(z, w)$ no dependen del orden de derivación. Además, cada una de las derivadas parciales es continua en el recinto que representa el producto de las partes interiores de las curvas C y Γ. En efecto, si $M = \max |F(\zeta, \tau)|$ en $C \times \Gamma$, $|z' - z| \leqslant r$ y $|w' - w| \leqslant \rho$ son dos círculos cerrados situados dentro de C y Γ, respectivamente, R es el mayor diámetro de las curvas C y Γ y, finalmente, $\delta\ (>0)$ es la menor de las dos distancias entre $|z' - z| = r$ y C y $|w' - w| = \rho$ y Γ, entonces, para z' y w' pertenecientes a los círculos indicados, se verifica la desigualdad

$$\left| \frac{\partial^{k+m} F(z' w')}{\partial z^k\, \partial w^m} - \frac{\partial^{k+m} F(z, w)}{\partial z^k\, \partial w^k} \right| =$$

$$= \frac{k!\,m!}{4\pi^2} \left| \iint_{C\times\Gamma} F(\zeta, \tau) \frac{(\zeta - z')^{k+1} (\tau - w')^{m+1} - (\zeta - z)^{k+1} (\tau - w)^{m-1}}{(\zeta - z)^{k+1} (\tau - w)^{m+1} (\zeta - z')^{k+1} (\tau - w')^{m+1}}\, d\zeta\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!\,m!}{4\pi^2} \left| \iint_{C\times\Gamma} F(\zeta, \tau) \left[\frac{(\zeta - z')^{k+1} |(\tau - w')^{m+1} - (\tau - w)^{m+1}|}{(\zeta - z)^{k+1} (\tau - w)^{m+1} (\zeta - z')^{k+1} (\tau - w')^{m+1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(\tau - w)^{m+1} |(\zeta - z')^{k+1} - (\zeta - z)^{k+1}|}{(\zeta - z)^{k+1} (\tau - w)^{m+1} (\zeta - z')^{k+1} (\tau - w')^{m+1}} \right] d\zeta\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!\,m!}{4\pi^2} M \frac{R^{k+1} \rho (m+1) R^m + R^{m+1} r (k+1) R^k}{\delta^{2k+2m+4}} \operatorname{long} C \operatorname{long} \Gamma.$$

Evidentemente, el segundo miembro de esta desigualdad puede hacerse menor que cualquier $\varepsilon > 0$ para valores suficientemente pequeños de r y ρ. Por consiguiente, la función $\frac{\partial^{h+m} F(z, w)}{\partial z^h \partial w^m}$ es continua. Además, ésta es analítica respecto de z para w fijado y respecto de w para z fijado, puesto que existen las derivadas $\frac{\partial^{h+1+m} F(z, w)}{\partial z^{h+1} \partial w^m}$ y $\frac{\partial^{h+m+1} F(z, w)}{\partial z^h \partial w^{m+1}}$. Por lo tanto, la derivada parcial de cualquier orden de la función $F(z, w)$ es analítica en el producto de las partes interiores de las curvas C y Γ. Como éstas son unas curvas arbitrarias situadas dentro de los recintos G y D, sacamos la conclusión de que

$$\frac{\partial^{h+m} F(z, w)}{\partial z^h \partial w^m}$$

es analítica en todo el recinto de cuatro dimensiones $G \times D$.

Mediante la fórmula (5.4:1) se puede obtener el desarrollo de una función analítica de dos variables en serie de potencias doble: serie de Taylor de la función $F(z, w)$. Con este fin, desarrollemos en serie de potencias la función $\frac{1}{(\zeta - z)(\tau - w)}$, donde

$$|\zeta - z_0| = r, \quad |\tau - w_0| = \rho, \quad |z - z_0| < r \quad \text{y} \quad |w - w_0| < \rho.$$

Como

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \ldots,$$

y

$$\frac{1}{\tau - w} = \frac{1}{\tau - w_0 - (w - w_0)} = \frac{1}{\tau - w_0} + \frac{w - w_0}{(\tau - w_0)^2} + \ldots,$$

y ambas series son absolutamente convergentes, el desarrollo de la función $\frac{1}{(\zeta - z)(\tau - w)}$ puede obtenerse multiplicando término a término estas series:

$$\frac{1}{(\zeta - z)(\tau - w)} = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^h (w - w_0)^m}{(\zeta - z_0)^{h+1} (\tau - w_0)^{m+1}}, \tag{5.4:3}$$

donde los términos de la serie obtenida, en virtud de su convergencia absoluta, se pueden escribir en cualquier orden.

Como para z y w fijos, cuando ζ y τ recorren las circunferencias $|\zeta - z_0| = r$ y $|\tau - w_0| = \rho$, los módulos de los términos de la última serie conservan valores constantes, esta serie es uniformemente convergente respecto de ζ y τ y se puede integrarla término a término. Poniendo el desarrollo (5.4:3) en la fórmula (5.4:1), donde C y Γ designan las circunferencias $|\zeta - z_0| = r$ y $|\tau - w_0| = \rho$, e integrando, hallamos el desarrollo:

$$F(z, w) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{C \times \Gamma} \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau}{(\zeta - z_0)^{h+1} (\tau - w_0)^{m+1}} (z - z_0)^h (w - w_0)^m. \tag{5.4:4}$$

Si $M(r, \rho)$ es el max $|F(\zeta, \tau)|$ en $C\times\Gamma$, entonces para los coeficientes A_{km} de la serie obtenemos la acotación:

$$|A_{km}| = \left| -\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{C\times\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau}{(\zeta - z_0)^{k+1} (\tau - w_0)^{m+1}} \right| \leqslant \frac{M 2\pi r 2\pi\rho}{4\pi^2 r^{k+1} \rho^{m+1}} = \frac{M}{r^k \rho^m},$$

de donde

$$|A_{km} (z - z_0)^k (w - w_0)^m| < M \left(\frac{|z - z_0|}{r}\right) \left(\frac{|w - w_0|}{\rho}\right)^m.$$

Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^k}{r^k} \frac{|w - w_0|^m}{\rho^m}$ es convergente para $|z - z_0| < r$ y $|w - w_0| < \rho$, de aquí se deduce que la serie (5.4:4) converge absoluta y uniformemente en el interior del recinto de cuatro dimensiones que representa el producto de los dos círculos $|z - z_0| < r$ y $|w - w_0| < \rho$. Los coeficientes A_{km}, según las fórmulas (5.4:2), pueden expresarse en la forma

$$A_{km} = -\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{C\times\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau}{(\zeta - z_0)^{k+1} (\tau - w_0)^{m+1}} = \frac{1}{k!m!} \frac{\partial^{k+m} F(z_0, w_0)}{\partial z^k\, \partial w^m}.$$

Así, pues, definitivamente, para una función analítica de dos variables z y w obtenemos el desarrollo de Taylor:

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!m!} \frac{\partial^{k+m} F(z_0, w_0)}{\partial z^k\, \partial w^m} (z - z_0)^k (w - w_0)^m. \qquad (5.4:5)$$

Debido a la convergencia absoluta de esta serie, ésta puede expresarse también en una de las dos formas siguientes:

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{m=0}^{m} \frac{1}{m!} \frac{\partial^{k+m} F(z_0, w_0)}{\partial z^k\, \partial w^m} (w - w_0)^m \right] (z - z_0)^k =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+m} F(z_0, w_0)}{\partial z^k\, \partial w^m} (z - z_0)^k \right] (w - w_0)^m.$$

Evidentemente, las expresiones entre corchetes representan las derivadas parciales de la función $F(z, w)$:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^{k+m} F(z_0, w_0)}{\partial z^k\, \partial w^m} (w - w_0)^m = \frac{\partial^k F(z_0, w)}{\partial z^k}$$

y

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+m} F(z, w_0)}{\partial z^k\, \partial w^m} (z - z_0)^k = \frac{\partial^m F(z, w_0)}{\partial w^m}.$$

Por esta razón, los desarrollos hallados también pueden escribirse en la forma

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F(z_0, w)}{\partial z^k} (z - z_0)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F(z, w_0)}{\partial w^m} (w - w_0)^m.$$

Indudablemente, cada uno de éstos podría haberse obtenido también directamente, considerando a $F(z, w)$ como una función analítica de z (para w fijo) o bien como una función analítica de w (para z fijo).

5.5. Considerando la teoría de las funciones implícitas, examinemos la ecuación

$$F(z, w) = 0, \tag{5.5:1}$$

donde $F(z, w)$ es una función de dos variables, analítica en el recinto $|z - z_0| < r$, $|w - w_0| < \rho$. Supongamos que se sabe que

$$F(z_0, w_0) = 0 \quad \text{y} \quad F(z_0, w) \not\equiv 0.$$

En estas condiciones, es válida la siguiente proposición, conocida por el nombre de teorema preparatorio de Weierstrass.

Existe un entorno $|z - z_0| < r' < r$, $|w - w_0| < \rho' < \rho$, *en el cuál* $F(z, w)$ *se expresa en la forma*

$$F(z, w) = [A_0(z) + \ldots + A_{k-1}(z) w^{k-1} + w^k] \Phi(z, w), \tag{5.5:2}$$

donde $A_0(z), \ldots, A_{k-1}(z)$ *son funciones analíticas para* $|z - z_0| < r'$, k *es un número natural que coincide con el orden menor de las derivadas* $\dfrac{\partial^n F(z_0, w_0)}{\partial w^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *que son distintas de cero, y* $\Phi(z, w)$ *es una función analítica en el recinto* $|z - z_0| < r' < r$, $|w - w_0| < \rho' < \rho$, que no se anula aquí.

De este teorema se deduce que en cierto entorno del punto dado (z_0, w_0), la ecuación (5.5:1) es equivalente a la ecuación

$$A_0(z) + A_1(z) w + \ldots + A_{k-1}(z) w^{k-1} + w^k = 0, \tag{5.5:3}$$

la cual es algebraica respecto de w.

De este modo, el teorema preparatorio de Weierstrass reduce el estudio local del caso general de una función implícita $w(z)$ al caso de una función implícita dada por una ecuación algebraica respecto de w (pero no respecto de z).

Pasando a demostrarlo, establezcamos primero la existencia de k soluciones de la ecuación (5.5:1) en un entorno del punto (z_0, w_0), y demostremos después que todas estas soluciones satisfacen a una misma ecuación de la forma (5.5:3).

Consideremos la función $F(z_0, w)$. Como ésta no es idénticamente igual a cero, entre las derivadas $\dfrac{\partial^n F(z_0, w_0)}{\partial w^n}$ hay distintas de cero. Sea k $(k \geqslant 1)$ el orden menor de las derivadas distintas de cero. Entonces la función $F(z_0, w)$ tendrá un cero de orden k en el punto w_0. Tomemos un entorno cerrado $|w - w_0| \leqslant \rho' < \rho$ del punto w_0 tan pequeño, que $F(z_0, w)$ no tenga ceros en el mismo, distintos de w_0. El módulo $|F(z_0, w)|$ en los puntos de la circunferencia γ': $|w - w_0| = \rho'$ tiene un mínimo positivo m. Si $|z - z_0| \leqslant r' < r$ es un entorno cerrado del punto z_0 tan pequeño, que para uno cualquiera de sus puntos y para cualquier $w \in \gamma'$ se verifica la desigualdad

$$|F(z, w) - F(z_0, w)| < m,$$

entonces, en virtud del teorema de Rouché (véase el ap. 3.5), las ecuaciones

$$F(z_0, w) = 0 \quad \text{y} \quad F(z_0, w) + [F(z, w) - F(z_0, w)] = F(z, w) = 0$$

(en la última, z está fijada arbitrariamente en el círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r'$) tienen que tener un mismo número de raíces en el interior de γ', precisamente k raíces. Así, pues, hemos establecido la existencia de unos entornos $|z - z_0| \leqslant r'$, $|w - w_0| < \rho'$ tales, que para cada z perteneciente al primero de ellos, la ecuación

$$F(z, w) = 0$$

posee k raíces (teniendo en cuenta los órdenes de multiplicidad) en el interior del segundo entorno (es natural, que puede poseer también otras raíces, situadas en el exterior a la circunferencia $|w - w_0| = \rho'$). Designando estas raíces con $w_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, formemos un polinomio respecto de w, cuyos ceros sean $w_j(z)$:

$$\prod_{1}^{k} [w - w_j(z)] = w^k - [w_1(z) + \ldots + w_k(z)] w^{k-1} + [w_1(z) w_2(z) + \ldots$$

$$\ldots + w_{k-1}(z) w_k(z)] w^{k-2} - \ldots + (-1)^k w_1(z) \ldots w_k(z) =$$

$$= w^k + A_{k-1}(z) w^{k-1} + A_{k-2} w^{k-2} + \ldots + A_k(z) = P(z, w). \qquad (5.5:4)$$

Como es sabido del álgebra *), los coeficientes $A_j(z)$ están ligados con las s u m a s d e p o t e n c i a s

$$s_m(z) = w_1^m(z) + \ldots + w_k^m(z)$$

mediante las siguientes relaciones:

$$s_m + s_{m-1} A_{k-1} + s_{m-2} A_{k-2} + \ldots + m A_{k-m} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, k).$$

De aquí se deduce que cada coeficiente $A_j(z)$ se expresa mediante las sumas de potencias $s_m(z)$ en forma de un polinomio de coeficientes numéricos. Así, por ejemplo,

$$A_{k-1}(z) = -s_1(z), \quad A_{k-2}(z) = \frac{1}{2}[s_1(z)]^2 - \frac{1}{2} s_2(z) \text{ etc.}$$

Por esta razón, la analiticidad de las funciones $A_j(z)$ en un entorno del punto z_0 será consecuencia de la analiticidad de las funciones $s_m(z)$ en el mismo entorno.

Para calcular estas últimas funciones, apliquemos la fórmula (3.5:1). Según ésta, la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} w^m \frac{\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}}{F(z, w)} dw \qquad (5.5:5)$$

aquí z está fijado en el círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r'$) es igual a la suma

$$w_1^m(z) + \ldots + w_k^m(z) = s_m(z),$$

puesto que $w_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ son todos los ceros de la función $F(z, w)$ en el interior de γ', y ésta no tiene polos (en el interior de γ').

Pero $F(z, w)$ y $\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}$ son funciones analíticas de z en el círculo $|z - z_0| \leqslant r'$ para w arbitrariamente fijado en γ'. Además, en este caso, $F(z, w)$ no se anula (puesto que $|F(z, w) - F(z_0, w)| < m$, mientras que $|F(z_0, w)| \geqslant m$, si $|z - z_0| \leqslant r'$ y $|w - w_0| = \rho'$). Debido a esto, $w^m \frac{\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}}{F(z, w)}$ es una función analítica de z en el círculo $|z - z_0| < r'$, que está, además, uniformemente acotada en valor absoluto, puesto que ella es continua con respecto al conjunto de las variables z y w en el conjunto cerrado $|z - z_0| \leqslant r'$, $|w - w_0| = \rho'$. De aquí (véase el corolario del teorema de Vitali, ap. 1.2) se deduce que la integral (5.5:5), y, por lo tanto, la suma de

*) Véase A. K u r o s c h, Curso de álgebra superior, Editorial Mir, 1968, § 52.

potencias $s_m(z)$, son funciones analíticas de z en el círculo $|z - z_0| < r'$. Por esta razón, $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ son funciones analíticas en el mismo círculo, es decir, todos los coeficientes del polinomio (5.5:4) son funciones analíticas de z en el círculo indicado.

No queda más que demostrar que el cociente

$$\Phi(z, w) = \frac{F(z, w)}{P(z, w)}$$

es una función analítica de dos variables z y w en el recinto $|z - z_0| < r'$, $|w - w_0| < \rho'$. Con este fin, obsérvese que siendo fijo z ($|z - z_0| < r'$), $F(z, w)$ y $P(z, w)$ son funciones analíticas de w en el círculo $|w - w_0| < \rho'$, que poseen en éste unos mismos ceros: $w_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Por consiguiente, $\Phi(z, w)$ para cualquier z ($|z - z_0| < r'$) es una función analítica de w en el círculo $|w - w_0| < \rho'$, que no se anula.

Como, para $|z - z_0| \leqslant r'$, las raíces $w_j(z)$ $(j = 1, \ldots, k)$ de la ecuación $F(z, w) = 0$ están situadas en el interior del círculo $|w - w_0| < \rho'$, es decir, $|w_j(z) - w_0| < \rho'$, la función $P(z, w)$ no se anula si $|z - z_0| < r'$ y $|w - w_0| = \rho'$. Fijemos arbitrariamente r'', $0 < r'' < r'$. Las funciones $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ son analíticas en el círculo $|z - z_0| < r'$; por lo tanto, ellas son continuas en el círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r''$ y, por consiguiente, la función $P(z, w)$ es continua en el conjunto cerrado $|z - z_0| \leqslant r''$, $|w - w_0| \leqslant \rho'$. De aquí se deduce que existe un anillo circular $\rho_1 \leqslant |w - w_0| \leqslant \rho'$, tan estrecho, que $P(z, w)$ no se anula para ningún z y w pertenecientes al conjunto $|z - z_0| \leqslant r''$, $\rho_1 \leqslant |w - w_0| \leqslant \rho'$.

Sea ρ'' un número arbitrario, comprendido entre ρ_1 y ρ'. Entonces,

$$\Phi(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - w_0| = \rho''} \frac{\Phi(z, \tau)}{\tau - w}\, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - w_0| = \rho''} \frac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau - w)}\, d\tau$$

para $|z - z_0| \leqslant r''$ y $|w - w_0| < \rho''$. La función $\dfrac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau - w)}$, para τ y w fijados, representa el cociente de dos funciones analíticas de z y, por consiguiente, también es una función analítica de z ($P(z, \tau) \neq 0$). Estando de nuevo w fijado en el círculo $|w - w_0| < \rho''$, si z recorre el círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r''$ y τ recorre la circunferencia $|\tau - w_0| = \rho'$, el numerador y el denominador de la fracción considerada serán funciones continuas de z y τ, y como el denominador de la fracción no se anula, el módulo de esta última se mantendrá acotado. De aquí, en virtud del conocido corolario del teorema de Vitali (ap. 1.2), se deduce que $\Phi(z, w)$ es una función analítica de z en el círculo $|z - z_0| < r''$ para cada w del círculo $|w - w_0| < \rho''$.

Demostremos, finalmente, que ésta es continua con respecto del conjunto de las variables z y w en los círculos indicados. Para esto, obsérvese que la función $\dfrac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau - w)}$ es continua con respecto del conjunto de las variables z, τ y w, si $|z - z_0| \leqslant r''$, $|\tau - w_0| = \rho''$ y $|w - w_0| \leqslant \rho_2 < \rho''$. Las últimas condiciones caracterizan el conjunto cerrado (del espacio de seis dimensiones); por esta razón, la función considerada será también uniformemente continua, puesto que para cualquier $\varepsilon > 0$ se tendrá:

$$\left| \frac{F(z', \tau)}{P(z', \tau)(\tau - w')} - \frac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau - z)} \right| < \frac{2\pi\varepsilon}{\rho''},$$

si

$$|z - z_0| < r'', \quad |w - w_0| < \rho_2, \; |\tau - w_0| = \rho''$$

y

$$|z' - z| < \delta(\varepsilon), \quad |w' - w) < \delta(\varepsilon).$$

Por lo tanto, en las condiciones indicadas:

$$|\Phi(z', w') - \Phi(z, w)| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - w_0| = \rho''} \left[\frac{F(z', \tau)}{P(z', \tau)(\tau - w')} - \frac{F(z-\tau)}{P(z-\tau)\tau - w)} \right] d\tau \right| < \varepsilon.$$

Resumiendo, $\Phi(z, w) = \frac{F(z, w)}{P(z, w)}$ es una función continua con respecto del conjunto de las variables en el recinto $|z - z_0| < r''$ $|w - w_0| < \rho''$ y analítica respecto de cada una de las variables z y w. Por consiguiente, ésta es una función analítica de dos variables: z y w. No queda más que observar que r'' y ρ'' pueden tomarse arbitrariamente próximos a r' y ρ, respectivamente.

En fin de cuentas, hemos obtenido que, para $|z - z_0| < r'$ y $|w - w_0| < < \rho'$, la función $F(z, w)$ se expresa en la forma

$$F(z, w) = [A_0(z) + A_1(z)w + \ldots + A_{k-1}(z)w^{k-1}]\,\Phi(z, w),$$

donde $A_j(z)$ son funciones analíticas en el círculo $|z - z_0| < r'$, y $\Phi(z, w)$ es una función de dos variables que es analítica en el recinto $|z - z_0| < r'$, $|w - w_0| < \rho'$ y no se anula. El teorema preparatorio de Weierstrass queda demostrado. De este mismo se deduce inmediatamente la siguiente proposición importante.

T e o r e m a d e l a s f u n c i o n e s i m p l í c i t a s. *Si $F(z, w)$ es una función de dos variables analítica en el recinto $|z - z_0| < r$, $|w - w_0| < \rho$ y satisface a las condiciones*

$$F(z_0, w_0) = 0, \qquad \frac{\partial F(z_0, w_0)}{\partial w_0} \neq 0,$$

entonces, en cierto entorno $|z - z_0| < r' < r$, $|w - w_0| < \rho' < \rho$ del punto (z_0, w_0), la ecuación $F(z, w) = 0$ tiene para cada z una raíz $w(z)$, y sólo una. Esta raíz es una función uniforme y analítica en el círculo $|z - z_0| < r'$ y representa una función implícita, determinada por la ecuación $F(z, w) = 0$ y por la condición complementaria $w(z_0) = w_0$.

Para demostrarlo es suficiente referirse al teorema preparatorio de Weierstrass, en virtud del cual $F(z, w)$ tiene en el caso dado ($k = 1$) la forma

$$F(z, w) = [A_0(z) + w]\,\Phi(z, w),$$

donde $\Phi(z, w) \neq 0$. Por consiguiente, para $|z - z_0 < r'$ y $|w - w_0| < \rho'$ (los números r' y ρ' se obtienen de la demostración del teorema precedente), la ecuación

$$F(z, w) = 0$$

es equivalente a la siguiente:

$$A_0(z) + w = 0,$$

de donde resulta:

$$w = w(z) = -A_0(z).$$

Como la ecuación inicial dada se satisface para $z = z_0$ y $w = w_0$, la última ecuación también tiene que satisfacerse para estos valores, es decir, se tiene:

$$w_0 = w(z_0) = -A_0(z_0).$$

El teorema queda demostrado.

Volviendo a estudiar el caso general, consideremos la ecuación

$$P(z, w) = A_0(z) + A_1(z)w + \ldots + w^k = 0 \quad (k > 1).$$

Ya sabemos que para cada z, $|z - z_0| < r'$, esta ecuación posee k raíces $w_j(z)$ (distintas o algunas de ellas iguales), pertenecientes al círculo $|w - w_0| < \rho'$.

Si para un $z_1 \neq z_0$ dado y para uno de los valores $w_j(z_1) = w_1$ la derivada parcial $\frac{\partial P(z_1, w_1)}{\partial w_1}$ es distinta de cero, entonces, basándose en el teorema de las funciones implícitas, hallaremos una función $w(z)$, analítica en un entorno del punto z_1, que satisface a la ecuación $P(z, w) = 0$ (y, por consiguiente, también a la ecuación inicial $F(z, w) = 0$), y toma el valor w_1 para $z = z_1$.

Calculando $\frac{\partial P(z, w)}{\partial w}$, hallamos:

$$\frac{\partial P(z, w)}{\partial w} = A_1(z) + 2A_2(z)\,w + \ldots + kw^{k-1}.$$

Por consiguiente, no se puede aplicar el teorema de las funciones implícitas solamente para aquellos pares de valores z y w, para los cuales se cumplen simultáneamente las dos ecuaciones:

$$A_0(z) + A_1(z)\,w + \ldots + w^k = 0,$$

$$A_1(z) + 2A_2(z)\,w + \ldots + (k-1)\,A_{k-1}(z)\,w^{k-2} + kw^{k-1} = 0.$$

Eliminando entre éstas w, obtenemos el discriminante de la ecuación $P(z, w) = 0$ en la forma*)

$$D \equiv D(z) = \begin{vmatrix} k & s_1 & s_2 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix} = 0,$$

donde $s_m = s_m(z)$ son las sumas de potencias que, como se vio anteriormente, representan funciones analíticas de z en el entorno considerado.

De aquí se deduce que el teorema de las funciones implícitas puede aplicarse a cualquier punto z_1 para el cual $D(z_1) \neq 0$ y a cualquiera de los valores respectivos $w_j(z_1)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$.

A priori hay dos posibilidades: $D(z) \equiv 0$ y $D(z) \not\equiv 0$. En el primer caso no podemos basarnos directamente en el teorema de las funciones implícitas para ningún par de puntos z, $w_j(z)$. En el segundo caso se puede señalar un entorno del punto z_0 tan pequeño, en el cual $D(z) \neq 0$ en todos los puntos, a excepción del punto mismo z_0. Para cualquier punto z_1 de este entorno todas las raíces $w_j(z_1)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ serán distintas, y en el entorno del punto z_1 tendremos k funciones analíticas $w_j(z)$ (que son las ramas uniformes de la función $w(z)$) que satisfacen a la ecuación dada y toman los valores $w_j(z_1)$, respectivamente, para $z = z_1$.

Aquí nos limitaremos a estas observaciones. A continuación (véase el cap. octavo) se hará un estudio más detallado, ligado con el estudio de las funciones algebraicas. Ahora ilustraremos la teoría que acabamos de exponer en un ejemplo sencillo, cuando $k = 2$, es decir,

$$F(z_0, w_0) = 0, \quad \frac{\partial F(z_0, w_0)}{\partial w_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(z_0, w_0)}{\partial w_0^2} \neq 0.$$

Para mayor sencillez, tomemos $z_0 = w_0 = 0$ (sustituyendo z por $z' + z_0$ y w por $w' + w_0$ resulta precisamente este caso). Entonces, según el teorema preparatorio de Weierstrass, la ecuación $F(z, w) = 0$ será equivalente a la

*) Véase A. K u r o s c h, Curso de álgebra superior, Editorial Mir, 1968, § 54.

siguiente:

$$A_0(z)+A_1(z)w+w^2=0,$$

donde $A_0(z)$ y $A_1(z)$ son funciones analíticas en cierto entorno del punto $z=0$: $|z|<r'$.

Para $z=0$ esta ecuación tiene que tener una raíz doble, igual a cero, por lo cual,

$$A_0(0)=0 \text{ y } A_1(0)=0.$$

El discriminante de la ecuación se obtiene eliminando w entre las dos ecuaciones:

$$A_0(z)+A_1(z)w+w^2=0$$

y

$$A_1(z)+2w=0,$$

y tiene la forma

$$D(z)=[A_1(z)]^2-4A_0(z)=0.$$

Si $D(z)\equiv 0$, el teorema general de las funciones implícitas no es aplicable. Pero en este caso la ecuación dada puede escribirse en la forma

$$\left[w+\frac{1}{2}A_1(z)\right]^2=0,$$

de donde $w=-\frac{1}{2}A_1(z)$. Hemos obtenido aquí una función uniforme analítica.

Supongamos ahora que $D(z)\not\equiv 0$. Como $D(0)=[A_1(0)]^2-4A_0(0)=0$, se puede señalar un entorno del origen de coordenadas, $|z|<r$, de modo que en el mismo $D(z)$ no tendrá ceros para $z\neq 0$. Si z_1 es un punto de este entorno, que para precisar supondremos que satisface a la condición $|z_1|<\frac{r}{2}$, entonces en el círculo $|z-z_1|<|z_1|$ los coeficientes $A_0(z)$ y $A_1(z)$ serán funciones analíticas, $D(z)\neq 0$ y, por consiguiente, obtendremos dos ramas uniformes y analíticas de la función $w(z)$ que se expresan por la fórmula

$$w_{1,2}(z)=-\frac{1}{2}A_1(z)+\frac{1}{2}\sqrt{D(z)},$$

donde cada rama $w_1(z)$ y $w_2(z)$ corresponde a una rama determinada de la raíz $\sqrt{D(z)}$. En lo que se refiere al comportamiento de $w(z)$ en el origen de coordenadas, aquí son posibles dos casos, según que el origen de coordenadas sea un cero de orden par o impar de la función $D(z)$.

En el primer caso, el desarrollo de $D(z)$ tiene la forma

$$D(z)=a_{2m}z^{2m}+a_{2m+1}z^{2m+1}+\ldots(a_{2m}\neq 0),$$

de donde

$$\sqrt{D(z)}=\sqrt{a_{2m}}(z^m+\ldots)$$

y

$$w(z) = -\frac{1}{2}A_1(z) + \sqrt{a_{2m}}\,(z^m + \ldots).$$

Hemos obtenido dos ramas uniformes y analíticas de la función $w(z)$ en el entorno del origen de coordenadas.

En el segundo caso

$$D(z) = a_{2m-1}z^{2m-1} + a_{2m}z^{2m} + \ldots (a_{2m-1} \neq 0),$$

de donde

$$\sqrt{D(z)} = \sqrt{a_{2m-1}}\,z^{\frac{2m-1}{2}}(1 + \ldots)$$

y

$$w(z) = -\frac{1}{2}A_1(z) + \sqrt{a_{2m-1}}\,z^{\frac{2m-1}{2}}(1 + \ldots).$$

Resulta una función biforme en un entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas, para la cual el origen de coordenadas es un punto algebraico de ramificación de primer orden.

APENDICE

DEL TRADUCTOR HECHO PARA LA EDICION
ESPAÑOLA DE ESTE LIBRO

Extracto del artículo E. Aparicio Bernardo, «Sobre la inclinación mínima a cero de los seudopolinomios de coeficientes enteros algebraicos» (Э. Апарисио Бернардо «О наименьшем отклонении от нуля квазимногочленов с целыми алгебраическими коэффициентами». Вестник МГУ, № 2, 1962, § 1, 21—24).

SEUDOPOLINOMIOS ORTOGONALES

Sea $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ $\left(\operatorname{Re} \lambda_k > -\frac{1+\tau}{2}\right)$ una sucesión de números complejos distintos, numerada en el orden de crecimiento de sus módulos, y en caso de números de igual módulo, en el orden de crecimiento del argumento; $\tau \geqslant 0$ es un número real.

Examinemos los seudopolinomios de la forma

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} x^{\lambda_k}, \qquad x \in (0, 1), \tag{1}$$

de coeficientes complejos $a_{k,n}$. Se supone que $x^{\lambda_k} = e^{\lambda_k \ln x}$, donde $\ln x$ significa el valor principal ($\ln 1 = 0$).

Hagamos

$$\overline{E}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{k,n} x^{\overline{\lambda}_k}$$

($\overline{\alpha}$ designa el número conjugado con α).

Hallemos una sucesión de seudopolinomios $E_n(x)$ ortonormales respecto del núcleo x^τ en el intervalo $(0, 1)$ del eje real, es decir, que

satisfagan a la condición

$$\int_0^1 x^{\tau} E_n(x)\,\overline{E}_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases} \qquad (2)$$

Obsérvese que las condiciones de ortogonalidad de los seudopolinomios (1) quedarán aseguradas si

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_{k,n} x^{\lambda_k} \right) x^{\overline{\lambda}_q+\tau}\,dx = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (3)$$

Después de integrar resulta el sistema de ecuaciones

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k,n}}{1+\lambda_k+\overline{\lambda}_q+\tau} = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (4)$$

del cual se hallan los coeficientes $a_{k,n}$ del seudopolinomio $E_n(x)$. Con este fin, consideremos las funciones racionales

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k,n}}{1+\lambda_k+\tau+z} = \frac{\varepsilon_n P_n(z)}{Q_{n+1}(z)}, \qquad (5)$$

donde

$$P_n(z) = z^n + \ldots \ \text{ y } \ Q_{n+1}(z) = \prod_{k=0}^{n} (z+\lambda_k+1+\tau)$$

son polinomios ordinarios de grados n y $n+1$, respectivamente, y $\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}$. Entonces, en virtud de (4),

$$P_n(\overline{\lambda}_q) = 0, \qquad q = 0, 1, \ldots, \qquad n-1,$$

por lo cual

$$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z-\overline{\lambda}_k).$$

Para determinar $a_{m,n}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ multipliquemos ambos miembros de (5) por $z+1+\tau+\lambda_m$ y pongamos después $z = -1-\tau-\lambda_m$; entonces tendremos:

$$a_{m,n} = \varepsilon_n \frac{P_n(-1-\tau-\lambda_m)}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq m}}^{n} (\lambda_k - a_m)}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

Hagamos ahora

$$\overline{Q}_{n+1}(z)=\prod_{k=0}^{n}(z+1+\tau+\overline{\lambda}_k),\quad \overline{P}_n(z)=\prod_{k=0}^{n-1}(z-\lambda_k),\tag{7}$$

entonces la expresión (6) para los coeficientes $a_{m,n}$ puede escribirse en la forma

$$a_{m,n}=\frac{\varepsilon_n}{1+\tau+\lambda_m+\overline{\lambda}_n}\cdot\frac{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_m)}{\overline{P}'_{n+1}(\lambda_m)},\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\ n.\tag{8}$$

El factor ε_n lo hallaremos ahora de la condición

$$\int_0^1 E_n(x)\,\overline{E}_n(x)\,x^{\tau}\,dx=1,$$

la cual, en virtud de (3), se puede sustituir por la condición

$$a_{n,n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{a}_{k,n}}{1+\tau+\overline{\lambda}_k+\lambda_n}=1.\tag{9}$$

Similarmente a (5) se puede obtener también la identidad

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{a}_{k,n}}{1+\tau+\overline{\lambda}_k+z}=\overline{\varepsilon}_n\frac{\overline{P}_n(z)}{\overline{Q}_{n+1}(z)},$$

de la cual, haciendo $z=\lambda_n$, hallamos que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{a}_{k,n}}{1+\tau+\overline{\lambda}_k+\lambda_n}=\overline{\varepsilon}_n\frac{\overline{P}_n(\lambda_n)}{Q_{n+1}(\lambda_n)}.$$

De aquí, teniendo en cuenta (9), obtenemos que

$$\overline{\varepsilon}_n=\frac{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_n)}{a_{n,n}\overline{P}_n(\lambda_n)}.\tag{10}$$

Por otra parte, haciendo $m=n$ en (8), hallamos que

$$\varepsilon_n=\frac{a_{n,n}(1+\tau+\lambda_n+\overline{\lambda}_n)\,\overline{P}'_{n+1}(\lambda_n)}{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_n)}.\tag{11}$$

Multiplicando (10) por (11) y teniendo en cuenta que

$$\overline{P}'_{n+1}(\lambda_n)=\overline{P}_n(\lambda_n),$$

obtenemos la igualdad

$$|\varepsilon_n|^2=1+\tau+\lambda_n+\overline{\lambda}_n,$$

de la cual hallamos definitivamente que

$$\varepsilon_n = \sqrt{1+\tau+\lambda_n+\bar{\lambda}_n},$$

puesto que ε_n se puede suponer real y positivo. Los coeficientes $a_{m,n}$ se puede hallar ahora de la fórmula (8):

$$a_{m,n} = \frac{\sqrt{1+\tau+\lambda_n+\bar{\lambda}_n}}{1+\tau+\lambda_m+\bar{\lambda}_n}\cdot\frac{\bar{Q}_{n+1}(\lambda_m)}{\bar{P}'_{n+1}(\lambda_m)}. \qquad (12)$$

En particular, para el coeficiente superior resulta

$$a_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau+\lambda_n+\bar{\lambda}_n}}\cdot\frac{\bar{Q}_{n+1}(\lambda_n)}{\bar{P}_n(\lambda_n)}. \qquad (13)$$

Por lo tanto, queda demostrado el siguiente teorema.

Teorema. Los seudopolinomios

$$E_n(x) = \sqrt{1+\tau+\lambda_n+\bar{\lambda}_n}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{1+\tau+\lambda_m+\bar{\lambda}_n}\cdot\frac{\bar{Q}_{n+1}(\lambda_m)}{\bar{P}'_{n+1}(\lambda_m)}\cdot x^{\lambda_m}, \qquad (14)$$
$$n = 0,\ 1,\ \ldots,$$

donde $\bar{P}_{n+1}(z)$ y $\bar{Q}_{n+1}(z)$ están definidos por las fórmulas (7), forman un sistema ortogonal y normal en el intervalo (0, 1) respecto del núcleo x^{τ} $(\tau > 0)$ *).

Fácilmente se comprueba que los seudopolinomios (14) pueden expresarse en las siguientes formas integrales:

$$E_n(x) + \frac{\sqrt{1+\tau+2\operatorname{Re}\lambda_n}}{2\pi i\ln\frac{1}{x}}\int_C x^z\frac{d}{dz}\left[\frac{\bar{Q}_{n+1}(z)}{(z+\bar{\lambda}_n+1+\tau)\bar{P}_{n+1}(z)}\right]dz$$

y

$$E_n(x) = \frac{\sqrt{1+\tau+2\operatorname{Re}\lambda_n}}{2\pi i}\int_C x^z\frac{\bar{Q}_{n+1}(z)}{(z+\bar{\lambda}_n+1+\tau)\bar{P}_{n+1}(z)}dz,$$

donde el circuito cerrado simple C está situado en el semiplano $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ y encierra los puntos $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

De la teoría de los polinomios ortogonales se deduce que entre

*) El caso $\tau = 0$, siendo λ_k números complejos arbitrarios $\left(\operatorname{Re}\lambda_k > -\frac{1}{2}\right)$, fue estudiado por el autor del presente apéndice en la tesis defendida por él en el año 1954.

todos los seudopolinomios de la forma

$$P(x) = x^{\lambda_n} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{\lambda_k}$$

el seudopolinomio

$$P_n(x) = \frac{1}{a_{n,n}} E_n(x)$$

proporciona el valor mínimo de la integral

$$\int_0^1 |P(x)|^2 x^{\tau}_{1} dx.$$

Según (2) y (12), este valor mínimo es igual a

$$\sigma = \frac{1}{|a_{n,n}|^2} \int_0^1 |E_n(x)|^2 x^{\tau} dx = (1 + \tau + 2\mathrm{Re}\,\lambda_n) \left| \frac{\bar{P}_n(\lambda_n)}{\bar{Q}_{n+1}(\lambda_n)} \right|^2 .$$

Para $\tau = 0$ y $\lambda_k = k$ los seudopolinomios (14) son los polinomios de Legendre.

BIBLIOGRAFIA

I. TRATADOS Y LIBROS DE PROBLEMAS DE TEORIA DE LAS FUNCIONES ANALITICAS DE UNA VARIABLE

1. Behnke H., und Sommer F., Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen veränderlichen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1962.
2. Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. I. Elemente der Funktionentheorie, 3 Aufl., Leipzig — Berlin, 1930.
3. Carathéodory C., Funktionentheorie, B. I., Basel, 1950.
4. Courant R., Geometrische Funktionentheorie, Springer, Berlin, 3ª ed., 1929.
5. Dienes P., The Taylor series. An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford, 1931.
6. Dinghas A., Vorlesungen über Funktionentheorie, Berlin — Göttingen — Geidelberg, 1961.
7. Evgráfov M., Funciones analíticas.
(Евграфов М. А., Аналитические функции, М., 1965.)
8. Favard J., Cours d'analyse de l'École polytechnique, t. II. Représentations. Functions analytiques, Paris, 1960.
9. Fuks B. y Shabat B., Funciones de variable compleja y algunas aplicaciones.
(Фукс Б. А. и Шабат Б. В., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, изд. 3-е, М., 1964.)
10. Goursat E., Cours d'analyse mathématique, Vol II, 7ª ed., 1949.
11. Hermite C., Cours d'analyse.
12. Hurwitz A., Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, Berlin, 3ª ed., 1929.
13. Jordan C., Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, 3 éd, t. II, Calcul intégral, Paris, 1913 (ch. VI—VIII).
14. Knopp K., 1) Funktionentheorie, T. I., Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen, 6 Aufl., Berlin, 1944; 2) lo mismo T. II. Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie, 6 Aufl., Berlin, 1944; 3) Aufgabensammlung zur Funktionentheorie, T. I, Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie, 3 Aufl., Berlin, 1944; 4) lo mismo T. II. Aufgaben zur höheren Funktionentheorie, 3 Aufl., Berlin, 1944.
15. Lavréntiev M. y Shabat B. Métodos de la teoría de funciones de variable compleja.
(Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3-е, испр., М., 1965.)

16. Littlewood J. E., Lectures on the theory of functions Oxford, 1944
17. Markushévich A., Elementos de la teoría de funciones analíticas. (Маркушевич А. И., Элементы теории аналитических функций, М., 1944.)
18. Markushévich A., Curso breve de la teoría de funciones analíticas. (Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, 3 изд., испр. и доп., М., 1966.)
19. Milloux H., Principes methodes générales, t. I, F. 1 [Traité de théorie des fonctions poublié sous la direction de M. Gaston Julia], Paris, 1953.
20. Osgood W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. I, 4 Aufl Leipzig — Berlin, 1923.
21. Picard E., Traité d'analyse, t. II, Fonctions harmoniques et fonctions analytiques, Introduction à la théorie des équation différentielles, Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann, 3 éd., Paris, 1927.
22. Pólya G. und Szegö G., Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Erster band., Berlin. Verlag von Julius Springer, 1925.
23. Priválov I., Introducción a la teoría de funciones de variable compleja. (Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 10-е, М., 1960.)
24. Saks S. and Zygmund A., Analytic Functions, transl. by E. J. Scott, Warszawa — Wroclaw, 1952.
25. Smirnov V., Curso de matemáticas superiores, t. III, 2ª parte. (Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, изд. 6-е, М., 1956.)
26. Stoilow S., Teoria functiilor de o variabila complexa, vol. I, Ed. Acad. Rep. Popul., Romîne, 1954.
27. Titchmarsh E., The theory of functions. 2ª ed., Univ. de Oxford, 1939.
28. Valiron G., Cours d'analyse mathématique, t. I, Théorie des fonctions, 2 éd., Paris, 1948.
29. Volkowiski L., Lunts G., Aramanóvich I., Problemas de teoría de funciones de variable compleja. (Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., Сборник задач по теории функций комплексного переменного, М., 1961.)
30. Whittaker E. and Watson G., A course of modern analysis. 4ª ed., Universidad de Cambridge, 1927.

II. MONOGRAFIAS SOBRE CUESTIONES ESPECIALES

A. Historia de la teoría de las funciones analíticas

Markushévich A., Bosquejo de historia de la teoría de las funciones analíticas.
(Маркушевич А. И., Очерки по истории теории аналитических функций, М.—Л., 1951)

B. Transformaciones homográficas

1. Fatou P. Fonctions automorphes (Théorie des fonstions algébriques d'une variable et des transcendantes qui s'y rattachent, par MM. P. Appell, É. Goursat, 2 éd., t. II), Paris, 1930 (ch. XIII, ch. XIV).
2. Ford L. Automorphic functions, Mcgraw — Hill Book Company, 1929.
3. Julia G., Principes géométriques d'analyse, t. I, Paris, 1932.

C. Práctica de las transformaciones conformes

1. Kantoróvich L. y Krilov V., Métodos aproximados del análisis superior.
(Approximate methods of higler analysys, Interscience, Nueva York, 1958.)
(Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, М.—Л., 1962.)
2. W. Koppenfels und F. Stallmann, Praxis der Konformen Abbildung, Springer — Vorlag, Berlin, Göttingen Heidelberg, 1959.

D. Integral de tipo Cauchy

1. Gólubiev V., Funciones uniformes analíticas. Funciones automorfas. (Голубев В. В., Однозначные аналитические функции, Автоморфные функции, М., 1961.)
2. Musjelishvili N., Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics. (Dep. of Supply and Development, Aer. Res. Lab., Melbourne, Australia, 1949; Noordhoff, Groningen, 1953.
(Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике, изд. 2-е, М., 1962.)
3. Priválov I., Propiedades de frontera de las funciones analíticas. (Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М.—Л., 1950.)

E. Series de potencias. Series de Dirichlet

1. Bernstein V., Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.
2. Hadamard J. et Mandelbrojt S., La série de Taylor et son prolongement analytique, 2 éd., Paris, 1926.
3. Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2 Aufl., Berlin, 1929.
4. Zygmund A., Trigonometric series. 2ª ed., 2 vols., Cambridg Univ. Press., 1959.

F. Principio de compacidad

Montel P., Familles normales de fonctions analytiques, Paris, 1927.

G. Teorema de Runge

1. Montel P., Leçons sur les séries de pôlynomes à une variable complexe, Paris, 1926.
2. Painlevé P., Sur le développement des fonctions analytiques (Note I al libro: É. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réalles et le développement en séries de polynomes, 2 éd., Paris, 1928.)
3. Smirnov V. y Liébediev N., Teoría constructiva de las funciones de variable compleja.
(Смирнов В. И. и Лебедев Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1964.)
4. Walsch J., Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Publ. by the American Mathem. Society, Second ed., 1960.

H. Teoría de los residuos

Lindelöf E., Le calcul de résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Paris, 1905.

I. Interpolación

1. G u e l f o n d A., Calcul des differences finies, Paris, Dunod, 1963 (Coll. Univ. Math.)
(Г е л ь ф о н д А. О., Исчисление конечных разностей, изд. 3-е, М., 1966.)
2. G o n c h a r o v V., Teoría de interpolación y aproximación de las funciones.
(Г о н ч а р о в В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М., 1954.)

J. Funciones de varias variables

1. B ó j n e r S. y M a r t i n U., Funciones de varias variables complejas.
(Б о х н е р С. и М а р т и н У. Т., Функции многих комплексных переменных, М., 1951.)
2. H e r v é M., Several complex variables, Oxford Univ. Press. Bombay, 1963.
3. F u k s B., Teoría de funciones analíticas de varias variables complejas.
(Ф у к с Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962.)
4. O s g o o d W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. II, 1-e Lieferung, 2 Aufl., 1929, Leipzig und Berlin.
5. V l a d í m i r o v V., Métodos de la teoría de las funciones de varias variables complejas.
(В л а д и м и р о в В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.)

INDICE ALFABETICO

LA EDITORIAL MIR PREPARA
LA EDICION DE LOS LIBROS

Elsgolz L.

ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO DE VARIACIONES

Este libro se debe al profesor L. Elsgolz, doctor en ciencias físico-matemáticas; está dedicado a las ecuaciones diferenciales y cálculos de variaciones.
El autor examina las ecuaciones diferenciales de primer orden y de orden superior, sistemas de ecuaciones diferenciales, teoría de la estabilidad, ecuaciones de derivadas parciales de primer orden, métodos de variaciones en los problemas con límites fijos, problemas de variaciones con límites móviles, condiciones suficientes del extremo, problemas de variaciones del extremo complejo y métodos directos en los problemas de variaciones.
Está destinado para los estudiantes de las facultados físico-matemáticas de los centros de enseñanza superior y especialistas que estudian los problemas de matemáticas indicados.

Kiselev A., Krasnov M., Makarenko G.

ECUACIONES INTEGRALES

El libro del docente del Instituto energético de Moscú Alexandr Kiselev, candidato a doctor en ciencias físicas y matemáticas Mijail Krasnov y Grigori Makarenko, contiene 322 problemas con respuestas referentes a los aspectos principales del curso de ecuaciones integrales. Consta de tres capítulos: «Ecuaciones integrales de Walterr», «Ecuaciones integrales de Fredholm» y «Métodos aproximativos».
En cada párrafo se ilustran los resultados pricipales, fórmulas y ejemplos típicos examinados detalladamente. El apéndice contiene un resumen de los principales métodos de solución de las ecuaciones integrales.
El libro está destinado para los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior e ingenieros.